www.tntextbooks.in

தமிழ்நாடு அரசு

கணக்கு

பத்தாம் வகுப்பு

விற்பனைக்கு அன்று

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

தமிழ்நாடு அரசு இலவசப்பாடநூல்
வழங்கும் திட்டத்தின்கீழ்
வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

www.tntextbooks.in

© தமிழ்நாடு அரசு

முதல் பதிப்பு – 2011
திருத்திய பதிப்பு – 2015
(பொதுப்பாடத் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்ட நூல்)

பாடநூல் உருவாக்கம்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல் பணிகள் கழகம்

கல்லூரிச் சாலை, சென்னை – 600 006.

இந்நூல் 80 ஜி. எஸ். எம். மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

விலை : ரூ.

வெப் ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர் :

பாடநூல் வலைதளம்

www.textbooksonline.tn.nic.in

www.tntextbooks.in

முகவுரை

தமிழ்நாட்டில், கல்வியில் குறிப்பாக பள்ளிக்கல்வியில் வியத்தகு மாற்றங்கள் நிகழ்ந்ததன் விளைவாக அனைத்து வகைப் பள்ளிகளிலும் ஒரே கல்வி முறை, சீரான பாடத்திட்டம் என்ற அடிப்படையில் பொதுப்பாடத் திட்டம் நடைமுறைப்படுத்தப்படுவது மன நிறைவை அளிக்கிறது. தமிழ்நாடு அரசு அளித்துள்ள இந்த அரிய வாய்ப்பினைக் கல்வியின் ஒட்டு மொத்த வளர்ச்சிக்குப் பயன்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும்.

அனைத்து அறிவியல்களுக்கும் அரசியான கணிதமானது உள்ளார்ந்த மதிப்பினையும், அதற்கே உரிய மிடுக்கும், அழகும் கொண்டு என்றென்றும் சிறந்து விளங்கும் ஒரு பாடமாகத் திகழ்கிறது. அறிவியல், பொறியியல் மற்றும் பிற பாடங்களிலும் கணிதம், பிரிக்க முடியாத இடத்தை வகிக்கிறது. எனவே அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப வளர்ச்சிக்கும் மற்றும் தனிநபர் தாம் தேர்ந்தெடுக்கும் துறையில் சிறந்து விளங்கவும், கணித அறிவு மிகவும் அவசியமாகிறது. அதிக அளவில் எடுக்கக் கூடிய கணிதப் பயிற்சியானது ஒருவருக்கு கணித அறிவை அளிப்பதோடு மட்டுமின்றி, சீரான சிந்திக்கும் திறனையும், சிக்கலானப் பிரச்சனைகளைப் பகுத்தாயும் ஆற்றலையும் அளிக்கும்.

தமிழ்க் கவிஞர்களில் தீர்க்கதரிசியான பொய்யாமொழிப் புலவர், அய்யன் திருவள்ளுவர் சுமார் இரண்டாயிரம் ஆண்டுகளுக்கு முன்பாகவே, கணிதக் கல்வியின் மதிப்பை உணர்த்தும் வகையில்,

எண்ணென்ப ஏனை எழுத்தென்ப இவ்விரண்டும்
கண்ணென்ப வாழும் உயிர்க்கு. – குறள் (392)

என்று கூறியுள்ளார்.

நம் வாழ்வில் நாளும் எழக்கூடிய சிக்கல்களுக்குத் தீர்வு காணும் ஆற்றலும், அவற்றை எதிர்கொள்ளும் திறமையும் அவசியம் நமக்குத் தேவைப்படுகின்றன. கணிதம் என்பது கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண உதவும் கருவி மட்டுமன்று; அது மிகவும் சக்தி வாய்ந்த படைப்பாற்றலை உருவாக்கும் விசையாகவும் உள்ளது. இந்த உண்மைகளை எல்லாம் மாணவர்கள் கருத்தில் கொண்டு, அவர்களின் மனமகிழ்ச்சிக்காகவும், மேன்மைக்காகவும் கணிதத்தை மேன்மேலும் பயில வேண்டும்.

நாட்டின் நல்ல எதிர்கால சந்ததியினரை உருவாக்கத் தேர்ந்த கணிதப்பயிற்சி அவசியமாகும். இப்போது கற்றுக் கொள்ளும் கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்துகள் உயர்கல்வியில் கணிதம் மற்றும் அறிவியல் பாடங்களுக்கு அடிப்படையாக அமையும். கணிதத்தின் அடிப்படைக் கூறுகளைக் கற்றுக் கொள்வதோடு நின்றுவிடாமல், அவைகளை எவ்வாறு கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் காண்பதில்

www.tntextbooks.in

பயன்படுத்துவது என்பதனையும் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். இதனைக் கருத்தில் கொண்டு இந்நூல் வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. பல்வேறு நிலைகளில் கணிதம் எப்படி வளர்கிறது; எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்று அறிய வைப்பதில் நாங்கள் அதிக கவனம் எடுத்துக் கொண்டுள்ளோம். இந்நூலிலுள்ள அத்தியாயங்கள் அனைத்தும் இயற்கையாக, தர்க்க ரீதியில், நல்ல எடுத்துக்காட்டுக்களுடன் வரிசைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. மேலும், மாணவர்கள் பயிற்சிகளை மேற்கொண்டு கணிதக் கருத்துகளைப் புரிந்து கொள்ள வாய்ப்பளிக்கும் வகையில் ஒவ்வொரு அத்தியாயமும் ஒழுங்கமைக்கப்பட்டுள்ளது. மாணவர்கள், ஆசிரியர்களின் துணையோடு கணிதத்தின் உள்ளார்ந்த கருத்துகளையும் அவற்றின் தொடர்புகளையும் தெரிந்து கொண்டு அதற்குப் பிறகு பயிற்சிக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பது சிறந்த முறை என நம்புகிறோம்.

எண்களின் அறிவியலை, கணிதம் ஒரு பகுதியாகக் கொண்டு பரந்தும் விரிந்தும் உள்ளது என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். வகுப்பறையில், மாணவர்கள் கணிதம் கற்பதில் ஆசிரியரின் பங்கு மிகமிக முக்கியமானதாகும். அவரின் உதவியும் ஆலோசனையும் கற்றலில் இன்றியமையாதன. ஆரம்பக் கணிதத்திலிருந்து உயர் கணிதத்திற்கு மாறுகின்ற படிநிலைகளில் ஆசிரியர் மிக முக்கியப் பங்கை வகிக்கிறார். இந்த நோக்கத்தினை நிறைவு செய்யக் கூடியதாகவும், ஒரு ஊக்கியாகவும் இப்பாடநூல் அமையும் என நம்புகிறோம். ஆசிரியர் – மாணவர் இரு வழிப் பரிமாற்றங்களில் உண்மையாக ஈடுபட்டால் இந்நூலின் மூலம் அதிக அளவு பயனடையலாம். கற்பவரை மையப்படுத்தும் வகுப்பறைச் செயல்பாடுகளுக்கு இம்முயற்சி சந்தேகத்திற்கிடமின்றி வழிவகை செய்யும். மாணவர்களுக்குக் கணிதத் தேடுதல் பயணத்திற்கும், எல்லா வகையிலும் திறன்களை வளர்த்துக் கொள்வதற்கும் வழியமைத்துத் தருவதை இந்நூல் முக்கிய நோக்கமாகக் கொண்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டுகளில் சரியாகப் பயிற்சிகளை மேற்கொண்டால், பயிற்சியிலுள்ள கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காணும் வழிமுறைகளைச் சரிவரப் புரிந்து கொள்வதற்கு அவை பேருதவி புரியும். அடிப்படைக் கருத்துகளைக் கற்பது, பயிற்சிக் கணக்குகளில் ஈடுபடுவது, பிறகு அதனோடு தொடர்புடைய புதிய கணக்குகளை உருவாக்குவது ஆகியவற்றின் மூலம் ஒருவருடைய கணித அறிவு வளம்பெறும்.

"கணக்குகள் செய்வதன் மூலம் கணிதத்தைக் கற்போம்"

("We learn Mathematics by doing Mathematics")

இந்நூலின் மேன்மைக்கு உரிய கருத்துகளை வல்லுநர்கள், ஆசிரியர்கள் மற்றும் மாணவர்கள் வழங்கினால், நாங்கள் மிகவும் மகிழ்ச்சியடைவோம்.

–பாடநூல் குழு

www.tntextbooks.in

பாடத்திட்டம்

தலைப்பு	பாடப்பொருள்	எதிர்பார்க்கப்படும் கற்றல் பலன்கள்	கற்பித்தலின் பரிமாற்றச் செயல் திட்டங்கள்	பிரிவேளை
I. கணங்களும் சார்புகளும்	• அறிமுகம் • கணச் செயல்பாடுகளின் பண்புகள் • டி மார்கனின் விதிகள் – சரிபார்த்தல் வென்படம் பயன்படுத்துதல் • சூத்திரம் $n(A \cup B \cup C)$ • சார்புகள்	• கணச் செயல்களின் அடிப்படைக் கருத்துகள் –மீள்பார்வை • கணப் பண்புகளைப் புரிந்து கொள்ளல் பரிமாற்றுப் பண்பு சேர்ப்புப் பண்பு பங்கீட்டுப் பண்பு (மூன்று கணங்களில் மட்டும்) • நிரப்பிக் கணத்தின் விதிகளைப் புரிந்து கொள்ளல் • டி மார்கன் விதிகளைப் புரிந்து கொள்ளல்; வென்படத்தின் மூலம் விளக்குதல் • சொற்றொடர் கணக்குகளைச் சூத்திரம் மூலமும், வென்படம் மூலமும் தீர்த்தல் • சார்புகளின் வரையறை, அவற்றின் வகைகள் மற்றும் அவைகளைக் குறிக்கும் முறைகள் ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளல் • சார்புகளின் வகைகளை எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் அறிதல்	• அனைத்து விளக்கங்களுக்கும் வென்படத்தைப் பயன்படுத்துதல் • பொருளியல், மருத்துவம், அறிவியல் போன்ற துறைகளிலிருந்து எடுத்துக்காட்டுகள்.	26
II. மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகள் மற்றும் தொடர்கள்	• அறிமுகம் • தொடர் வரிசைகள் • கூட்டுத் தொடர் வரிசை (A.P) • பெருக்குத் தொடர்வரிசை (G.P) • தொடர்கள்	• கூட்டுத் தொடர்வரிசை பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகியவற்றைப் புரிந்து கொள்ளல் • கூட்டுத் தொடர்வரிசை பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகியவற்றில் 'n' ஆவது உறுப்பைக் கண்டறிதல். • கூட்டுத் தொடர்வரிசை பெருக்குத் தொடர்வரிசை – n உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காணல் • சில முடிவுறு தொடர்களின் கூடுதல்களைக் காணல்	• அமைப்பு அணுகு முறையைப் பயன்படுத்துதல் • புள்ளி அமைப்பைத் துணைக் கருவியாகப் பயன்படுத்துதல் • எண் தொடர் அமைப்புகளைக் கொண்டு சூத்திரத்தை தருவித்தல் • நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களிலிருந்து எடுத்துக் காட்டுகள்	27
III. இயற்கணிதம்	• நேரியல் சமன்பாடுகளைத் தீர்த்தல் • பல்லுறுப்புக் கோவைகள்	• இரு மாறிகளுடைய ஒரு சோடி நேரியல் சமன்பாடுகள் பற்றிய கருத்தை புரிந்து கொள்ளல். இருமாறிகளுடன் ஒரு சோடி நேரியல் சமன்பாடுகளை, நீக்கல் முறையிலும், குறுக்குப் பெருக்கல் முறையிலும் தீர்த்தல்	• விளக்கமான எடுத்துக்காட்டுகள்	

III. இயற்கணிதம்	• தொகுமுறை வகுத்தல் • மீப்பெரு பொது வகுத்தி மற்றும் மீச்சிறு பொது மடங்கு • விகிதமுறு கோவைகள் • வர்க்க மூலம் • இருபடிச் சமன்பாடுகள்	• இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ளத் தொடர்பினை அறிதல் • கொடுக்கப்பட்ட கோவையின் ஈவு, மீதி ஆகியவற்றை தொகுமுறை வகுத்தல் மூலம் காணல் • தொகுமுறை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட கோவைக்குக் காரணிகளைக் கண்டறிதல் • விகிதமுறு கோவைகளில் மீ.பொ.வ, மீ.பொ.ம ஆகியவற்றுக்கு இடையே உள்ள வேறுபாடுகளைப் புரிந்து கொள்ளல் • விகிதமுறு கோவைகளை சுருக்குதல் (எளிய கணக்குகள்) • வர்க்கமூலத்தைப் புரிந்து கொள்ளல் • இருபடி சமன்பாட்டின் திட்ட வடிவத்தை அறிதல் • இருபடிச் சமன்பாட்டினைத் தீர்த்தல் (மெய்யெண்கள் மூலங்கள் மட்டும்) காரணிப்படுத்தும் முறை, வர்க்க நிரப்பி முறை, இருபடிச் சமன்பாட்டின் சூத்திர முறை. • இருபடிச் சமன்பாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு சொற்றொடர்களில் அமைந்த கணக்குகளைத் தீர்த்தல் • தன்மைக்காட்டிக்கும் மூலங்களின் தன்மைக்கும் இடையே உள்ளத் தொடர்பினைத் இணைத்துப் பார்த்தல் • மூலங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் இருபடிச் சமன்பாடுகளை அமைத்தல்	• மெல்லிய அட்டைப் படங்களை துணைக் கருவிகளாகக் கொள்ளல் • துவக்கத்தில் எண்களின் மீ.பொ.வ., மீ.பொ.ம நினைவு கூர்தல் • பின்னங்களின் செயல்பாடுகளுடன் ஒப்பிடல். • எண்களில் வர்க்கமூலச் செயல்களுடன் ஒப்பிடல் • மூலங்களின் தன்மையினை இயற்கணிதம் மூலமாகவும் வரைபடம் வாயிலாகவும் ஊகித்துணர உதவுதல்	40
IV. அணிகள்	• அறிமுகம் • அணிகளின் வகைகள் • கூட்டலும் கழித்தலும் • பெருக்கல் • அணிச் சமன்பாடு	• அணிகளை அமைத்தல் வரிசைகளை அறிதல் • அணிகளின் வகைகளைத் தெரிந்து கொள்ளல் • கொடுக்கப்பட்ட அணிகளைக் கூட்டவும் கழிக்கவும் கற்றல் • ஓர் அணியினைத் திசையிலியால் பெருக்குதல் மற்றும் நிரை நிரல் மாற்று அணி • கொடுக்கப்பட்ட (2 x 2, 2 x 3, 3 x 2 வரிசைகள்) அணிகளை ஏற்ற அணிகளால் பெருக்கல் • இருமாறிகளைக் கொண்ட சமன்பாடுகளை அணிமுறை மூலம் தீர்த்தல்	• செவ்வக வடிவ எண் தொகுப்பைப் பயன்படுத்துதல் நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களைப் பயன்படுத்துதல் எண் செயல்களைப் பயன்படுத்துதல்	16

V. ஆயத்தொலை வடிவியல்	• அறிமுகம் திருப்புதல் : இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் • பிரிவுச் சூத்திரம் நடுப்புள்ளிச் சூத்திரம் நடுக்கோட்டு மையம் சூத்திரம்) • முக்கோணத்தின் மற்றும் நாற்கரத்தின் பரப்பளவு, • நேர்க்கோடு	• இரு புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தூரத்தை நினைவு கூர்தல். இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் மையப்புள்ளியைக் குறித்தல் • பிரிவுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்திப் பிரிக்கும் புள்ளியைக் குறித்தல் • முக்கோணத்தின் பரப்பினைக் கணக்கிடுதல் • இரு புள்ளிகள் அல்லது சமன்பாடு, கொடுக்கப்படும் போது ஒரு கோட்டின் சாய்வு கண்டறிதல் • கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தைக் கொண்டு ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் கண்டறிதல் • சாய்வு வெட்டுத்துண்டு வடிவம், புள்ளி – சாய்வு வடிவம், இரு புள்ளிகள் வடிவம், வெட்டுத்துண்டு வடிவம் ஆகிய வடிவங்களில் ஒரு கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காணல் ஒரு புள்ளி வழியே செல்லும், ஒரு கோட்டிற்கு இணையாக, செங்குத்தாக உள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டுகளை அறிதல்		25
VI. வடிவியல்	• அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம் (நிருபணத்துடன்) அ.வி.ச.தே. மறுதலை (நிருபணத்துடன்) கோண இரு சமவெட்டித் தேற்றம் (நிருபணம் உட்புறம் மட்டும்) • கோண இருசமவெட்டி தேற்றம் – மறுதலை (நிருபணம் உட்புறம் மட்டும்) • வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (தேற்றங்கள் நிருபணமின்றி) • பிதாகரஸ் தேற்றம், தொடுகோடு-நாண் தேற்றம் (நிருபணமின்றி)	• தேற்றங்களைப் புரிந்து கொள்ளல், அவற்றை எளிய கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதில் பயன்படுத்துதல்	• தாள்களின் மடிப்பில் சமச்சீர் தன்மையை அறிதல், மாற்றங்களின் நுட்பங்களைக் கையாளுதல் • முறையான நிரூபணங்களை அறிதல் • வடிவப்படங்களை வரைதல் • படங்களுடன் கூடியத் தருக்க ரீதியான, படிப்படியான நிருபணங்கள். விளக்கப்படுதல், விவாதிக்கப்படுதல்	20
VII. முக்கோணவியல்	• அறிமுகம் • முற்றொருமைகள் • உயரங்களும் தூரங்களும்	• முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளை அறிதல் அவற்றை எளிய கணக்குகளில் பயன்படுத்துதல் • முக்கோணவியல் விகிதங்களை அறிதல். உயரங்கள், தூரங்கள் கணக்கிட அவற்றைப் பயன்படுத்துதல் (இரு செங்கோண முக்கோணங்களுக்கு மிகையாகாமல்)	• இயற்கணித சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்துதல் • முக்கோணவியல் விகிதங்களைப் பயன்படுத்துதல் • தோராய மதிப்புகளின் தன்மைகளை விளக்குதல்	21

VIII. அளவியல்	• அறிமுகம் • உருளை, கூம்பு, கோளம், அரைக்கோளம், இடைக் கண்டம் ஆகியவற்றின் புறப்பரப்பு, கனஅளவு • இணைந்த உருவங்களின் புறப்பரப்பு கன அளவு • மாறாக் கன அளவு	• உருளை, கூம்பு, கோளம், அரைக் கோளம், இடைக்கண்டம் ஆகியவற்றின் கனஅளவு மற்றும் புறப்பரப்பு அறிதல் • இணைந்த உருவங்களின் புறப்பரப்பு, கனஅளவு (இரண்டு உருவங்கள் மட்டும்) • மாறாக் கனஅளவுகளில் சில கணக்குகள்	• இணைந்த உருவங்களை உருவாக்க முப்பரிமாண மாதிரிகளைப் பயன்படுத்துதல் • மாதிரிகளையும் படங்களையும் துணைக் கருவிகளாக் பயன்படுத்துதல் • நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களிலிருந்து எடுத்துக் காட்டுகளைத் தெரிந்தெடுத்தல்	24
IX. செய்முறை வடிவியல்	• அறிமுகம் • வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகள் வரைதல் • முக்கோணங்கள் வரைதல் • வட்ட நாற்கரம் வரைதல்	• வட்டங்களுக்குத் தொடுகோடுகள் வரைதல் • முக்கோணம் வரைதல். அடிப்பக்கம், எதிர் முனையின் உச்சிக் கோணம் மற்றும் - நடுக்கோடு - குத்துயரம் கொடுக்கப்படின் • வட்ட நாற்கரம் வரைதல்	• தொடுகோடுகளின் நீளங்களை இயற்கணித முறையில் சரிபார்த்தலை அறிமுகப்படுத்துதல் • வட்டத்தில் அமையும் கோணங்களின் பண்புகளைப் படம் வரைவதற்கு முன்பு நினைவு கூர்தல் • தொடர்புடைய தேற்றங்களை நினைவு கூர்தல்	15
X. வரைபடங்கள்	• அறிமுகம் • இருபடி வரைபடம் • சில சிறப்பு வரைபடங்கள்	• இருபடிச் சமன்பாட்டினை வரைபடம் மூலம் தீர்த்தல் • சொற்றொடர் கணக்குகளை வரைபடம் மூலம் தீர்த்தல்	• நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களை அறிமுகப் படுத்துதல்	16
XI. புள்ளியியல்	• மையப் போக்களவைகளை நினைவு கூர்தல் • பரவுதலின் அளவுகள் • மாறுபாட்டுக்கெழு	• பரவுதல், வீச்சு, திட்ட விலக்கம், பரவற்படி, மாறுபாட்டுக்கெழு (தொகுக்கப்பட்ட, தொகுக்கப்பட்டாத விவரங்கள்) ஆகிய கருத்துகளைப் புரிந்து கொள்ளல் • மாறுபாட்டுக்கெழுவைக் கணக்கிடல்	• தேர்வுகள் விளையாட்டுகள் போன்ற நடைமுறை வாழ்க்கைச் சூழல்களைப் பயன்படுத்துதல்	10
XII. நிகழ்தகவு	• அறிமுகம் • நிகழ்தகவு தொன்மை வரையறை • நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்	• சமவாய்ப்புச் சோதனை, சோதனையின் கூறுவெளி, நிகழ்ச்சிகள், விலக்கிய நிகழ்ச்சி, நிரப்பி நிகழ்ச்சிகள், உறுதியான நிகழ்ச்சி, இயலா நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தைப் புரிந்துக் கொள்ளுதல். அதனை எளிய கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண பயன்படுத்துதல்	• நாணயம் சுண்டுதல், பகடை உருட்டுதல், சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டினை எடுத்தல்.	15

www.tntextbooks.in

பொருளடக்கம்

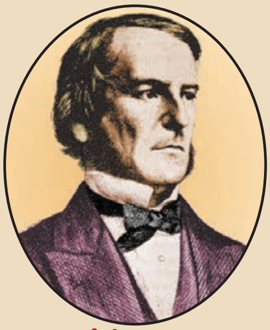
1.	**கணங்களும் சார்புகளும்**	**1-34**
1.1	அறிமுகம்	1
1.2.	கணங்கள்	1
1.3.	கணங்களின் மீதான செயல்கள்	3
1.4.	கணச் செயல்களின் பண்புகள்	5
1.5.	டி மார்கனின் விதிகள்	12
1.6.	கணங்களின் ஆதி எண் அல்லது கண எண்	16
1.7.	உறவுகள்	19
1.8.	சார்புகள்	20
2.	**மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகளும் தொடர்களும்**	**35-70**
2.1.	அறிமுகம்	35
2.2.	தொடர்வரிசைகள்	36
2.3.	கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்லது கூட்டு விருத்தி	39
2.4.	பெருக்குத் தொடர்வரிசை அல்லது பெருக்கு விருத்தி	44
2.5.	தொடர்கள்	50
3.	**இயற்கணிதம்**	**71-124**
3.1	அறிமுகம்	71
3.2	இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமை நேரியல் சமன்பாடுகள்	72
3.3	இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகள்	83
3.4	தொகுமுறை வகுத்தல்	86
3.5	மீப்பெரு பொது வகுத்தி மற்றும் மீச்சிறு பொது மடங்கு	90
3.6	விகிதமுறு கோவைகள்	97
3.7	வர்க்கமூலம்	101
3.8	இருபடிச் சமன்பாடுகள்	106
4.	**அணிகள்**	**125-147**
4.1	அறிமுகம்	125
4.2	அணிகளை அமைத்தல்	126
4.3	அணிகளின் வகைகள்	128
4.4	அணிகளின் மீதானச் செயல்கள்	133
4.5	அணிகளின் கூட்டல் பண்புகள்	136
4.6	அணிகளின் பெருக்கல்	137
4.7	அணிகளின் பெருக்கல் பண்புகள்	140
5.	**ஆயத்தொலை வடிவியல்**	**148-180**
5.1	அறிமுகம்	148
5.2	பிரிவுச் சூத்திரம்	149
5.3	முக்கோணத்தின் பரப்பு	155
5.4	ஒரே நேர்க்கோட்டிலமையும் மூன்று புள்ளிகள்	156
5.5	நாற்கரத்தின் பரப்பு	157
5.6	நேர்க்கோடுகள்	160
5.7	நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு	174

www.tntextbooks.in

6.	வடிவியல்	**181-205**
6.1	அறிமுகம்	181
6.2	அடிப்படை விகிதசமம் மற்றும் கோண இருசமவெட்டித் தேற்றங்கள்	182
6.3	வடிவொத்த முக்கோணங்கள்	191
6.4	வட்டங்கள் மற்றும் தொடுகோடுகள்	199
7.	முக்கோணவியல்	**206-229**
7.1	அறிமுகம்	206
7.2	முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள்	206
7.3	உயரங்களும் தூரங்களும்	215
8.	அளவியல்	**230-259**
8.1	அறிமுகம்	230
8.2	புறப்பரப்பு அல்லது மேற்பரப்பு	230
8.3	கனஅளவு	241
8.4	இணைந்த கனஉருவங்கள்	250
9.	செய்முறை வடிவியல்	**260- 277**
9.1	அறிமுகம்	260
9.2	ஒரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரைதல்	261
9.3	முக்கோணங்கள் வரைதல்	265
9.4	வட்ட நாற்கரங்கள் வரைதல்	270
10.	வரைபடங்கள்	**278-291**
10.1	அறிமுகம்	278
10.2	இருபடிக் கோவைகளின் வரைபடங்கள்	278
10.3	சில சிறப்பு வகை வரைபடங்கள்	287
11.	புள்ளியியல்	**292-311**
11.1	அறிமுகம்	292
11.2	பரவுதல் அளவைகள்	293
12.	நிகழ்தகவு	**312-331**
12.1	அறிமுகம்	312
12.2	நிகழ்தகவிற்கான தொன்மை வரையறை	315
12.3	நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்	324
	விடைகள்	**332-342**
	பல்வகைக் கணக்குகள்	**343-345**
	பார்வை நூல்கள்	**346**
	வினாத்தாள் வடிவமைப்பு	**347-350**

1

- அறிமுகம்
- கணங்கள்
- கணச் செயல்களின் பண்புகள்
- டி மார்கனின் விதிகள்
- சார்புகள்



ஜார்ஜ் பூலே
(GEORGE BOOLE)
(1815-1864)
இங்கிலாந்து

தருக்க ரீதியான விவாதங்களைக் குறிக்கும் குறியீடுகள் மற்றும் இயற்கணித குறியீடுகளுக் கிடையே நெருங்கிய ஒப்புமை உண்டு என்று பூலே நம்பினார்.

தருக்க ரீதியான தொடர்புகளுக்கு இவர் கணித குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தினார். இவர் காலத்தில் கணிப்பொறிகள் இல்லாதிருந்த போதிலும் அவருடைய பூலியன் இயற்கணிதம், கணிப்பொறி எண் கணிதசெயல்களுக்கு அடித்தளமாக அமைகிறது என்பதனை அறிந்தால் அவர் மகிழ்வடைந்திருப்பார்.

நவீன இலக்க-கணிப்பொறியியலின் தருக்கத்தின் அடிப்படையான பூலியன் தருக்கத்தை கண்டுபிடித்தவர் என்பதால், பூலே கணிப்பொறி அறிவியலின் தந்தை எனப் போற்றப்படுகிறார்.

கணங்களும் சார்புகளும்

A set is Many that allows itself to be thought of as a One
- Georg Cantor

1.1 அறிமுகம்

கணம் (set) என்பது கணிதத்தின் அடிப்படைக் கருத்துகளுள் ஒன்றாகும். கணவியலின் குறியீடுகளும் மற்றும் அதன் பயன்பாட்டுக் கலைச்சொற்களும் கணிதத்தின் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கின்றன. எனவே, கணவியலை (set theory) கணிதத்தின் மொழி (language of mathematics) எனக் கூறலாம். 19 ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில் ஜார்ஜ் பூலே (George Boole) (1815 - 1864) மற்றும் ஜார்ஜ் கேன்டர் (Georg Cantor) (1845-1918) ஆகிய கணித வல்லுநர்களின் பங்களிப்பினால் தோன்றிய கணவியலானது, 20ஆம் நூற்றாண்டில் கணிதத்தின் அனைத்து பிரிவுகளிலும் நடைபெற்ற வளர்ச்சிகளுக்கு பெருந்துணை புரிந்தது. கணிதத்தில் உள்ள வெவ்வேறு கருத்துகளை ஒன்றிணைக்க, கணவியல் உதவி புரிந்ததின் மூலம் கணிதம் வளர்ச்சியடைந்ததற்கு கணவியல் துணை நின்றது

ஒன்பதாம் வகுப்பில் கணம் பற்றிய கருத்துகள், கணங்களின் சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் இரு கணங்களின் வித்தியாசம் போன்ற கணச் செயல்களைப் பற்றிய கருத்துகளைக் கற்றுள்ளோம். இங்கு கணங்கள் தொடர்பான மேலும் பல கருத்துகளையும், கணிதத்தில் மற்றுமொரு முக்கிய கருத்தாகிய சார்புகள் பற்றியும் கற்றறிவோம். முதலில் அடிப்படை வரையறைகள் சிலவற்றை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் நினைவு கூர்வோம். இங்கு அனைத்து மிகை முழுக்களை $\mathbb{N}$ எனவும் அனைத்து மெய்யெண்களை $\mathbb{R}$ எனவும் குறிப்போம்.

1.2 கணங்கள் (Sets)

வரையறை

கணம் என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பாகும். ஒரு கணத்திலுள்ள பொருட்கள் அதன் உறுப்புகள் (elements) எனக் கூறப்படும்.

"நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட" என்பது, ஒரு கணத்தில் ஒரு பொருள் உறுப்பாக அமையுமா அல்லது அமையாதா என்பதனை ஐயமின்றி வரையறுப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, "சென்னையிலுள்ள அனைத்து உயரமான மனிதர்களின் தொகுப்பு" என்பது ஒரு கணத்தை அமைக்க இயலாது. ஏனெனில், உயரமான மனிதர்கள் என்பதைத் தீர்மானிக்கும் விதிமுறை நன்கு வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே இத்தொகுப்பு ஒரு கணத்தினை வரையறுக்கவில்லை.

குறியீடு

பொதுவாக ஒரு கணத்தைக் குறிக்க $A, B, X, \ldots$ போன்ற ஆங்கில பெரிய எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளைக் குறிக்க $x, y, \ldots$ போன்ற ஆங்கில சிறிய எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். x என்பது Y -ன் ஒரு உறுப்பு என்பதை $x \in Y$ என எழுதுகிறோம். t என்பது Y -ன் ஒரு உறுப்பு அல்ல என்பதை $t \notin Y$ என எழுதுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) தமிழ்நாட்டிலுள்ள அனைத்து உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவர்களின் கணம்.
(ii) தமிழ்நாட்டிள்ள அனைத்து உயர்நிலைப்பள்ளி அல்லது கல்லூரி மாணவர்களின் கணம்.
(iii) அனைத்து மிகை இரட்டை முழுக்களின் கணம்.
(iv) வர்க்கப்படுத்தும்போது குறை எண்ணாக அமையும் முழுக்களின் கணம்.
(v) நிலவில் இறங்கிய அனைத்து மனிதர்களின் கணம்.

A, B, C, D, E என்பன முறையே (i), (ii), (iii), (iv), (v) ஆகியவற்றைக் குறிப்பதாக கொள்வோம். இவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டக் கணங்களைக் குறிக்கும். ஒரு முழுவின் வர்க்கம், பூச்சியம் அல்லது மிகை முழு எண் என்பதால் எந்தவொரு முழுவின் வர்க்கமும் குறை எண்ணாக இருக்காது. எனவே, கணம் D-ல் எந்த ஒரு உறுப்பும் இல்லை. இம்மாதிரியான கணங்கள் வெற்றுக் கணம் (Empty Set) என அழைக்கப்படும். வெற்றுக் கணத்தை ϕ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

வரையறை

(i) ஒரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகள் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் (finite) இருப்பின் அக்கணம் முடிவுறு கணம் (Finite set) எனப்படும்.

(ii) ஒரு கணம் முடிவுறு கணமாக இல்லாமலிருப்பின், அது முடிவுறாக் கணம் அல்லது முடிவிலி கணம் (Infinite set) எனப்படும்.

மேலே குறிப்பிட்டவற்றில் கணம் A ஒரு முடிவுறு கணம், ஆனால் கணம் C ஒரு முடிவுறாக் கணம் ஆகும். வெற்றுக்கணத்தில் உறுப்புகள் ஏதுமில்லை என்பதை அறியவும். வெற்றுக்கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை பூச்சியம் ஆகும். எனவே, வெற்றுக்கணம் ஒரு முடிவுறு கணம் ஆகும்.

வரையறை

(i) கணம் X ஒரு முடிவுறு கணம் எனில், X-ன் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை அதன் கண எண் அல்லது ஆதி எண் (Cordinality of a set) எனப்படும். X-ன் கண எண்ணை $n(X)$ எனக் குறிப்போம்.

(ii) கணம் X ஒரு முடிவுறாக் கணம் எனில், X-ன் கண எண்ணை ∞ என்ற குறியால் குறிக்கிறோம்.

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் உள்ள கணங்கள் A, B ஆகியவற்றில் A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் B-ன் உறுப்பாகும். இத்தகைய நேர்வுகளில் A என்பது B-ன் உட்கணம் எனப்படும்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்ற சில வரையறைகளை நினைவு கூர்வோம்.

உட்கணம் (Subset) X, Y என்பன இரு கணங்கள் என்க. X-லுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் Y-ன் உறுப்புகள் எனில், X ஆனது Y-ன் உட்கணம் ஆகும். அதாவது $z \in X$ என்பது $z \in Y$ என உணர்த்துவதால், X என்பது Y-ன் உட்கணம் ஆகும். X என்பது Y-ன் உட்கணம் எனில், $X \subseteq Y$ எனக் குறிக்கிறோம்.

சம கணங்கள் (Equal sets) X, Y என்ற இரண்டு கணங்களிலும் ஒரே உறுப்புகள் இருந்தால் X மற்றும் Y ஆகியன சம கணங்கள் எனப்படும். இவ்வாறிருக்கும்போது $X = Y$ என குறிக்கின்றோம். மேலும், $X \subseteq Y$ மற்றும் $Y \subseteq X$ எனில், எனில் மட்டுமே $X = Y$ ஆகும்.

சமான கணங்கள் (Equivalent Sets) இரு முடிவுறு கணங்கள் X மற்றும் Y என்பனவற்றிற்கு $n(X) = n(Y)$ எனில், இவ்விரு கணங்களும் சமான கணங்கள் எனப்படும். சமான கணங்களில் ஒரே எண்ணிக்கையில் வெவ்வேறான உறுப்புகள் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $P=\{x\,|\,x^2-x-6=0\}$, $Q=\{3,-2\}$ மற்றும் $F=\{3,\ 2\}$ எனில், P,Q என்பன ஒரே உறுப்புகளைக் கொண்டுள்ளன. எனவே $P=Q$ ஆகும். F மற்றும் Q என்பன சமான கணங்களாகும். ஆனால் $Q\neq F$. சார்புகளைக் கொண்டு முடிவுறாக் கணங்களின் சமானத் தன்மையை வரையறுக்கலாம்.

அடுக்குக் கணம் (Power Set) கணம் A-ன் அனைத்து உட்கணங்களின் தொகுப்பு $P(A)$ எனில், $P(A)$ என்பது A-ன் அடுக்குக் கணம் எனப்படும்.

$n(A)=m$ எனில், $P(A)$-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n[P(A)]=2^m$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $A=\{a,b,c\}$ எனில், $P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ ஆகும். எனவே, $n[P(A)]=8$ ஆகும்.

இரு கணங்கள் கொடுக்கப்பட்டால் இவற்றைக் கொண்டு எவ்வாறு புதிய கணங்களை நாம் உருவாக்க முடியும் ?

இரு கணங்களிலுமுள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் ஒன்று சேர எடுத்துக் கொண்டு, புதிய கணமொன்றை அமைக்கலாம். பொதுவான உறுப்புகளை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டு ஒரு கணத்தை அமைக்கலாம். மேலும் ஒரு கணத்தில் இல்லாத மற்றொரு கணத்தில் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்டு ஒரு கணத்தை உருவாக்கலாம். இவ்வாறான கணங்களை அமைக்க பின்வரும் வரையறைகள் தெளிவுபடுத்தும். ஒவ்வொரு வரையறையிலும் அதனை விளக்கும் வகையில் வென்படங்கள் (Venn diagram) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

1.3 கணங்களின் மீதான செயல்கள் (Operations on sets)

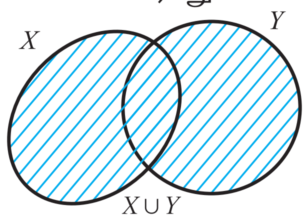
X,Y என்பன கணங்கள் என்க. அவற்றைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் புதிய கணங்களை வரையறுப்போம்.

(i) **சேர்ப்பு (Union)** $X\cup Y=\{z\,|\,z\in X$ அல்லது $z\in Y\}$

("X சேர்ப்பு Y" எனப் படிக்கவும்)

$X\cup Y$-ல் X மற்றும் Y கணங்களின் அனைத்து உறுப்புகளும் உள்ளன. படம் 1.1 இதை விளக்குகிறது.

$X\subseteq X\cup Y$ மற்றும் $Y\subseteq X\cup Y$ என்பது தெளிவாகின்றது.



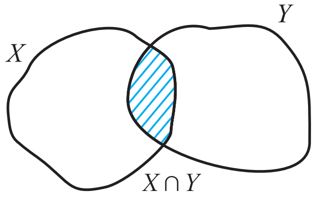
படம் 1.1

(ii) **வெட்டு (Intersection)** $X\cap Y=\{z\,|\ z\in X$ மற்றும் $z\in Y\}$

("X வெட்டு Y" எனப் படிக்கவும்)

$X\cap Y$-ல் X மற்றும் Y கணங்களின் பொதுவான உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளன. படம் 1.2 இதை விளக்குகிறது.

$X\cap Y\subseteq X$ மற்றும் $X\cap Y\subseteq Y$ என்பது தெளிவாகின்றது.



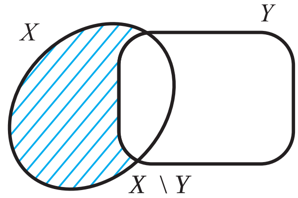
படம் 1.2

(iii) **கண வித்தியாசம் (Set difference)**

$X\setminus Y=\{z\,|\ z\in X$ ஆனால் $z\notin Y\}$

("X வித்தியாசம் Y" எனப் படிக்கவும்)

$X\setminus Y$ என்ற கணத்தில் Y-ல் இல்லாத X-ன் உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளன. இதை படம் 1.3 விளக்குகிறது. சில நூலாசிரியர்கள் $A\setminus B$ ஐ $A-B$ எனவும் எழுதுவர். $A\setminus B$ என்ற குறியீடு கணிதத்தில் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எனவே, நாமும் $A\setminus B$-யினை பயன்படுத்துவோம்.



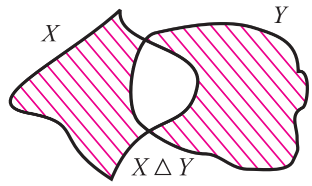
படம் 1.3

(iv) **சமச்சீர் வித்தியாசம் (Symmetric Difference)**

$X\,\triangle\,Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

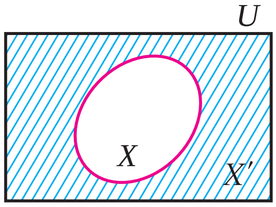
("X சமச்சீர் வித்தியாசம் Y" எனப் படிக்கவும்).

$X\,\triangle\,Y$ என்ற கணத்தில் $X\cap Y$-ல் இல்லாத ஆனால், $X\cup Y$-ல் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் உள்ளன.



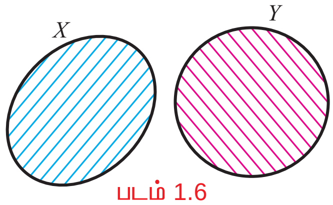
படம் 1.4

(v) **நிரப்பி (Complement)** U என்பது அனைத்துக் கணம் என்க. $X \subseteq U$ எனில், $U \setminus X$ என்பது U-ஐப் பொருத்து X-ன் நிரப்பிக் கணம் (கணநிரப்பி) ஆகும். அனைத்துக் கணம் குறிப்பிடப்பட்டால், $U \setminus X$ என்பதை X' எனக் குறிப்பிடலாம். அது X-ன் கணநிரப்பி எனப்படுகிறது. $A \setminus B$ என்னும் கண வித்தியாசம் A-ஐப் பொறுத்து B-ன் கணநிரப்பியாகும்.



படம் 1.5

(vi) **வெட்டாக் கணங்கள் (Disjoint sets)** கணங்கள் X மற்றும் Y-ல் பொதுவான உறுப்புகள் ஏதும் இல்லையெனில், அவை வெட்டாக் கணங்கள் எனப்படும். அதாவது $X \cap Y = \phi$ எனில், X மற்றும் Y என்பன வெட்டாக் கணங்களாகும்.



படம் 1.6

A மற்றும் B வெட்டாக் கணங்கள் எனில், $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ஆகும்.

குறிப்புரை

வென்படங்களில் கணங்களைக் குறிக்க பொதுவாக வட்டங்களைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஆயினும், கணத்தினைக் குறிக்க ஏதாவது ஒரு மூடிய வளைவரையினையும் (any closed curve) பயன்படுத்தலாம். கணத்தில் உறுப்புகளை எழுதும் போது ஒரு உறுப்பினை ஒரு முறைக்கு மேல் எழுதுவதை அனுமதிப்பதில்லை.

இப்பொழுது சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்போம்.

$A = \{x \mid x$ என்பது 12 ஐ விடச் சிறிய மிகை முழு$\}$,

$B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 12, 15\}$, $C = \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 7\}$ என்க.

(i) $A \cup B = \{x \mid x \in A$ அல்லது $x \in B\}$

$= \{x \mid x$ என்பது 12 ஐ விடச் சிறிய மிகை முழு அல்லது $x = 12$ அல்லது $15\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15\}$.

(ii) $C \cap B = \{y \mid y \in C$ மற்றும் $y \in B\} = \{1, 7\}$.

(iii) $A \setminus C = \{x \mid x \in A$ ஆனால் $x \notin C\} = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(iv) $A \triangle C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$

$= \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

(v) $U = \{x \mid x$ ஒரு முழு$\}$ என்பதை அனைத்துக்கணம் என்க.

பூச்சியம் மிகையுமல்ல குறையுமல்ல என்பதை அறிக. ஆகவே $0 \notin A$.

இப்பொழுது, $A' = U \setminus A = \{x : x$ என்பது ஒரு முழு ஆனால் A - ன் உறுப்பல்ல$\}$

$= \{x \mid x$ என்பது பூச்சியம் அல்லது ஒரு குறை முழு அல்லது 12-க்குச் சமமான மற்றும் 12-ஐ விடப் பெரிய மிகை முழு$\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0\} \cup \{12, 13, 14, 15, \cdots\}$

$= \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 12, 13, 14, 15, \cdots\}$.

சில பயனுள்ள முடிவுகளை பின்வருமாறு பட்டியலிடுவோம்.

U என்பது அனைத்துக் கணம் மற்றும் A, B என்பன U-ன் உட் கணங்கள் என்க.

(i) $A \setminus B = A \cap B'$

(ii) $B \setminus A = B \cap A'$

(iii) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \phi$

(iv) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

(v) $(A \setminus B) \cap B = \phi$

(vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

1.4 கணச் செயல்களின் பண்புகள் (Properties of set operations)

கணச் செயல்களின் சில பண்புகளை காண்போம். A, B மற்றும் C என்ற ஏதேனும் மூன்று கணங்களுக்கு பின்வரும் பண்புகள் மெய்யாகும்.

I. பரிமாற்றுப் பண்பு (Commutative property)

(i) $A \cup B = B \cup A$ (கணங்களின் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது)

(ii) $A \cap B = B \cap A$ (கணங்களின் வெட்டு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது)

II. சேர்ப்புப் பண்பு (Associative property)

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (கணங்களின் சேர்ப்பு, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது)

(ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (கணங்களின் வெட்டு, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது)

III. பங்கீட்டுப் பண்பு (Distributive property)

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (கணங்களின் வெட்டு, சேர்ப்பின் மீது பங்கீட்டுப் பண்பு உடையது)

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (கணங்களின் சேர்ப்பு, வெட்டின் மீது பங்கீட்டுப் பண்பு உடையது)

பொதுவாக, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களைக் கொண்டே இப்பண்புகளை நிருபிக்கலாம். மேலே கூறப்பட்டுள்ள பண்புகளை எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் சரிபார்த்தலுக்குப் பதிலாக, கணித ரீதியில் நிரூபணத்தைக் கொடுப்பது உகந்ததாகும். இது, இப்பாடநூலின் வரம்பிற்கு அப்பாற்பட்டது. இருப்பினும், கணித நிரூபணத்தைப் புரிந்து கொள்ளவும், அதனைப் பாராட்டவும், ஒரு பண்பை எடுத்துக் கொண்டு அதற்குரிய நிரூபணத்தைக் கொடுப்போம்.

I. (i) கணங்களின் சேர்ப்புக்கான பரிமாற்றுப் பண்பு

A, B ஆகிய இரு கணங்களை எடுத்துக் கொண்டு, $A \cup B$ மற்றும் $B \cup A$ ஆகியன சமகணங்கள் என நிறுவுவோம். இரு கணங்களில் ஒரே உறுப்புகளிருப்பின் அவை சம கணங்கள் என்பதை அறிவோம். முதலில் $A \cup B$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B \cup A$-ன் உறுப்பு என நிறுவுவோம்.

$z \in A \cup B$ என்பது ஏதேனும் ஒரு உறுப்பு என்க. A மற்றும் B-ன் சேர்ப்பின் வரையறையின்படி, $z \in A$ அல்லது $z \in B$.

அதாவது, ஒவ்வொரு $z \in A \cup B \implies z \in A$ அல்லது $z \in B$

$\implies z \in B$ அல்லது $z \in A$

ஆகவே, $B \cup A$-ன் வரையறையின்படி $z \in B \cup A$ (1)

ஒவ்வொரு $z \in A \cup B$ -க்கும் (1) உண்மையாதலால், $A \cup B$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $B \cup A$-ன் உறுப்பு என்பது மெய்யாகும்.

ஆகவே, உட்கணத்தின் வரையறையின்படி $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$.

தற்போது, $y \in B \cup A$ என்ற ஏதேனும் ஒரு உறுப்பை எடுத்துக் கொண்டு, y ஆனது $A \cup B$-ன் உறுப்பு எனக் காட்டுவோம்.

இப்பொழுது, ஒவ்வொரு $y \in B \cup A \implies y \in B$ அல்லது $y \in A$

$\implies y \in A$ அல்லது $y \in B$

$A \cup B$-ன் வரையறையின்படி, $y \in A \cup B$ (2)

ஒவ்வொரு $y \in B \cup A$-க்கு (2) ஆனது மெய் என்பதால், $B \cup A$-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் $A \cup B$-ன் உறுப்பு என்பது மெய்யாகும். ஆகவே, உட்கணத்தின் வரையறையின்படி $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$. ஆகவே, $(A \cup B) \subseteq (B \cup A)$ மற்றும் $(B \cup A) \subseteq (A \cup B)$ எனக் காட்டியுள்ளோம். இது $(A \cup B) = (B \cup A)$ எனில், எனில் மட்டுமே நிகழும். மேற்கூறப்பட்ட முறைகளில் மற்ற பண்புகளையும் நிரூபிக்கலாம்.

கணிதத்தில் நிரூபணங்கள் (Proofs in Mathematics)

கணிதத்தில் ஒரு கூற்று எப்பொழுதும் மெய்யானால், அது மெய்க்கூற்று எனப்படும். ஒரு கூற்று ஏதேனும் ஒரு நிகழ்வில் மெய்யாக இல்லை என்றாலும், அது தவறான கூற்று எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, பின்வரும் சில கூற்றுகளைக் கருதுவோம்.

(i) எந்த ஒரு மிகை ஒற்றை முழுவும் ஒரு பகா எண் ஆகும்.

(ii) ஒரு முக்கோணத்தின் அனைத்துக் கோணங்களின் கூடுதல் 180°

(iii) ஒவ்வொரு பகா எண்ணும் ஒரு ஒற்றை முழு

(iv) A, B என்ற எந்த இரு கணங்களுக்கும் $A \setminus B = B \setminus A$

பல ஒற்றை மிகை முழுக்கள் பகா எண்ணாக இருந்தாலும் கூட கூற்று (i) தவறானது. ஏனெனில், $9, 15, 21, 45$ போன்ற முழுக்கள் மிகை ஒற்றை எண்கள். ஆனால், பகா எண்களல்ல.

எந்த முக்கோணத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும் அதன் அனைத்து கோணங்களின் கூடுதல் 180°. ஆகவே, வாக்கியம் (ii) மெய்யாகும்.

கூற்று (iii) தவறானது. ஏனெனில், பகா எண் 2 ஒரு இரட்டை முழுவாகும். ஆனால் கூற்று (iii) எண் 2 ஐத் தவிர மற்ற ஒவ்வொரு பகா எண்ணுக்கும் உண்மையாகும். ஒரு கூற்றினை மெய்யென நிரூபிக்க வேண்டுமெனில், அனைத்து நிகழ்வுகளிலும் அது மெய்யானது என நாம் நிரூபிக்க வேண்டும். ஏதாவது ஒரு நிகழ்வில் அது தவறு என நிரூபிக்கப்பட்டால், அக்கூற்று தவறாகும். கூற்று (iv) தவறானது. அடிப்படையாக $A \setminus B$ ஐ அமைக்கும் போது, A-யிலிருந்து B-ன் அனைத்து உறுப்புகளையும் நீக்குகிறோம். அதே போல் $B \setminus A$-க்கு B-யிலிருந்து A-ன் அனைத்து உறுப்புகளும் நீக்கப்படும். $A = \{2, 5, 8\}$ மற்றும் $B = \{5, 7, -1\}$ என்க.

இங்கு $A \setminus B = \{2, 8\}$ மற்றும் $B \setminus A = \{7, -1\}$. ஆகவே, $A \setminus B \neq B \setminus A$.

எனவே, கூற்று (iv) என்பது தவறானது.

எடுத்துக்காட்டு 1.1

$A = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$ மற்றும் $B = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$ என்ற கணங்களுக்கு பின்வருவனவற்றை சரிபார்க்கவும். மேலும், வென்படம் மூலமும் சரிபார்க்கவும்.

(i) கணங்களின் சேர்ப்பு பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது

(ii) கணங்களின் வெட்டு பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது

தீர்வு

(i) கணங்களின் சேர்ப்பு பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என சரிபார்ப்போம்.

இப்பொழுது, $A \cup B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cup \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

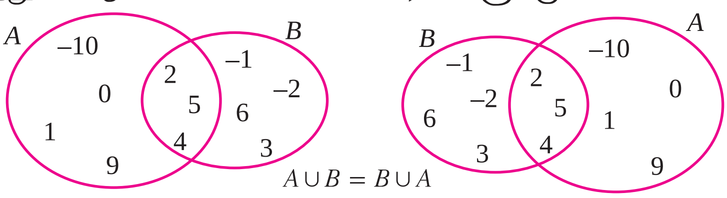
$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ (1)

$B \cup A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cup \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{-10, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ (2)

ஆகவே (1) மற்றும் (2)-லிருந்து கொடுக்கப்பட்ட கணங்கள் A, B-களுக்கு $A \cup B = B \cup A$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

வென்படம் மூலம், (படம் 1.7) கணங்களின் சேர்ப்பு என்பது பரிமாற்று பண்பு உடையது என சரிபார்க்கப்பட்டது.



படம் 1.7

(ii) கணங்களின் வெட்டு பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என சரிபார்ப்போம்.

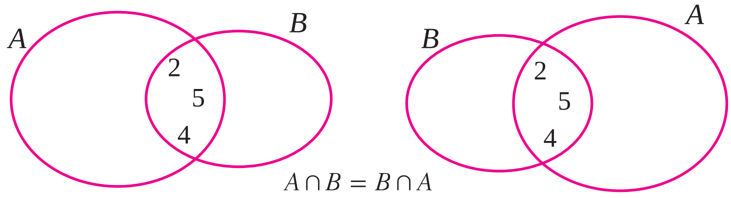
$A \cap B = \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\} \cap \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\}$

$= \{2, 4, 5\}.$ (1)

$B \cap A = \{-1, -2, 5, 6, 2, 3, 4\} \cap \{-10, 0, 1, 9, 2, 4, 5\}$

$= \{2, 4, 5\}.$ (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A \cap B = B \cap A$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.



படம் 1.8

வென்படம் மூலம் (படம் 1.8) $A \cap B = B \cap A$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.2

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ B = \{3, 4, 5, 6\},\ C = \{5, 6, 7, 8\}$ எனில்,

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ எனக்காட்டுக.

(ii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ என்பதை சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு

(i) $B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

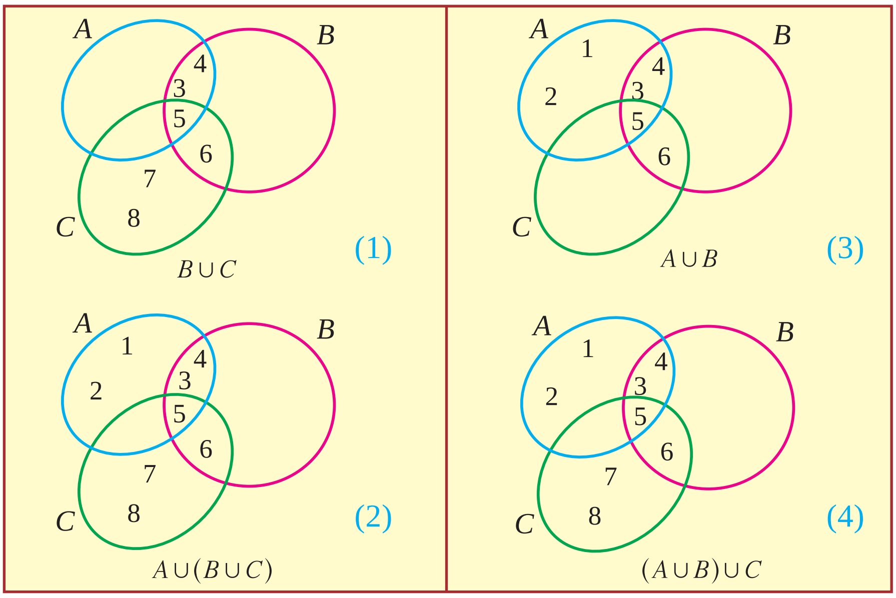
$\therefore \quad A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (1)

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore \quad (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) தகுந்த வென்படங்கள் பின்வருமாறு உள்ளன.



படம் 1.9

படம் 1.9-ல் (2) மற்றும் (4) ஆகியவற்றிலிருந்து கணங்களின் சேர்ப்பு ஆனது சேர்ப்புப் பண்பினை நிறைவு செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.3

$A=\{a,b,c,d\}, B=\{a,c,e\}$ மற்றும் $C=\{a,e\}$ எனில்,

(i) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ எனக் காட்டுக.

(ii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ என சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்டவை : $A=\{a,b,c,d\}, B=\{a,c,e\}, C=\{a,e\}$.

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ என்பதை சரிபார்ப்போம்.

முதலில், $A\cap(B\cap C)$-ஐ காண்போம்.

$B\cap C=\{a,c,e\}\cap\{a,e\}=\{a,e\}$

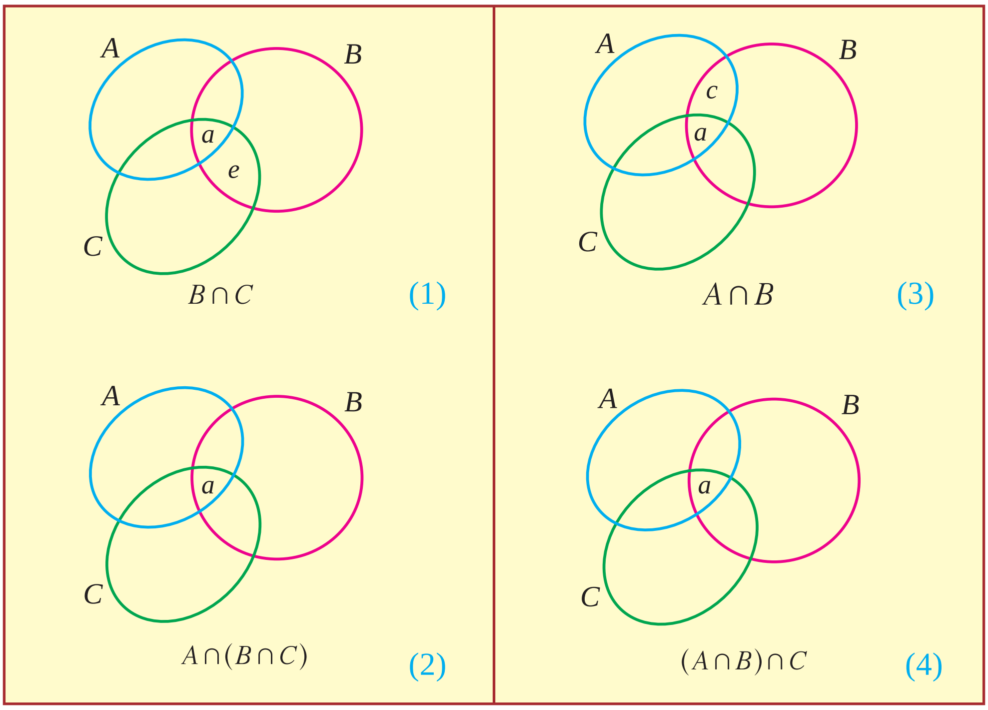
எனவே, $A\cap(B\cap C)=\{a,b,c,d\}\cap\{a,e\}=\{a\}$. (1)

அடுத்ததாக, $A\cap B=\{a,b,c,d.\}\cap\{a,c,e\}=\{a,c\}$

$(A\cap B)\cap C=\{a,c\}\cap\{a,e\}=\{a\}$ (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) தகுந்த வென்படங்கள் பின்வருமாறு.



படம் 1.10

படம் 1.10-ல் (2) மற்றும் (4)-லிருந்து $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.4

$A=\{a,b,c,d,e\}, B=\{a,e,i,o,u\}, C=\{c,d,e,u\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

(i) $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ எனக் காட்டுக.

(ii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A\setminus(B\setminus C)\neq(A\setminus B)\setminus C$ என சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு

(i) $(B \setminus C) = \{a,e,i,o,u\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{a,i,o\}$.

எனவே, $A \setminus (B \setminus C) = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,i,o\} = \{b,c,d,e\}$. (1)

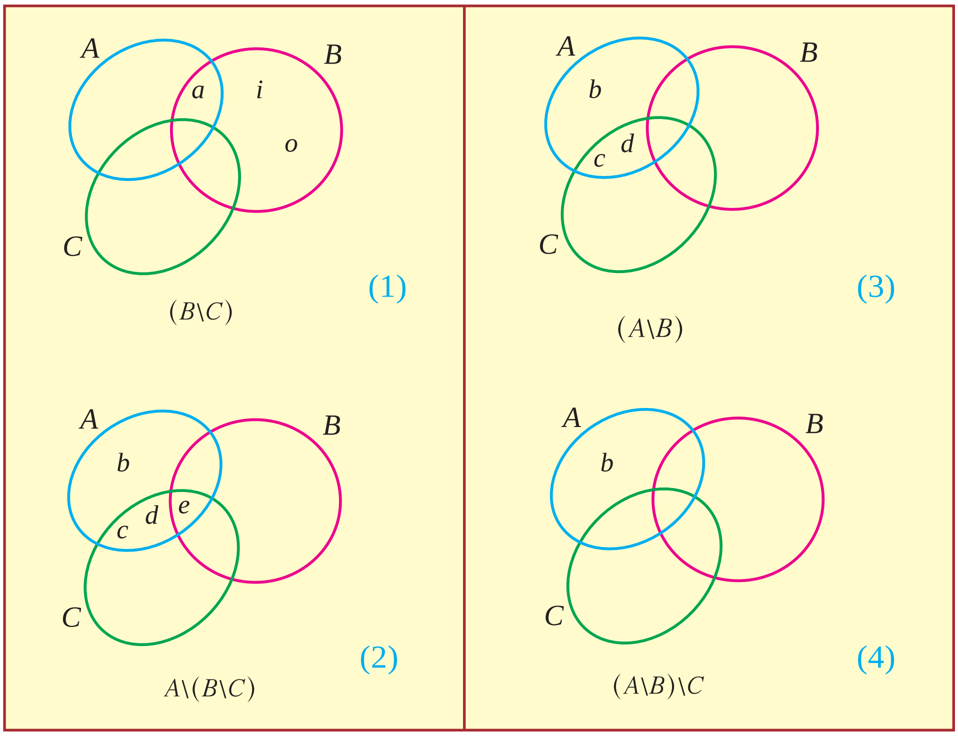
தற்போது, $A \setminus B = \{a,b,c,d,e\} \setminus \{a,e,i,o,u\} = \{b,c,d\}$.

எனவே, $(A \setminus B) \setminus C = \{b,c,d\} \setminus \{c,d,e,u\} = \{b\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ என நிறுவப்பட்டது.

ஆகவே, கணங்களின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பு உடையதல்ல.

(ii) தகுந்த வென்படங்கள் பின்வருமாறு.



படம் 1.11

(2) மற்றும் (4)-களிலிருந்து $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது. ஆதலால், கணங்களின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பு உடையதல்ல.

குறிப்புரை

பொதுவாக கணங்களின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பினை நிறைவு செய்யாவிட்டாலும், A,B,C என்பன ஒன்றுக்கொன்று வெட்டாக் கணங்கள் எனில், $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ ஆகும். இதை எளிதில் நிரூபிக்கலாம். B மற்றும் C ஆகியன வெட்டாக் கணங்கள். எனவே, $B \setminus C = B$ ஆகும். மேலும், A, B ஆகியன வெட்டாக் கணங்கள். எனவே $A \setminus B = A$ ஆகும். ஆகவே, $A \setminus (B \setminus C) = A$.

மேலும், $A \setminus B = A$ மற்றும் A, C ஆகியன வெட்டாக் கணங்களாகும். எனவே, $A \setminus C = A$. ஆதலால், $(A \setminus B) \setminus C = A$. ஆகவே, $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ என்பது உண்மையாகும். இவ்வாறு, வெட்டாக் கணங்களின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது என நிறுவப்பட்டது.

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 1.5

$A = \{0,1,2,3,4\}, B = \{1,-2,3,4,5,6\}$ மற்றும் $C = \{2,4,6,7\}$ என்க.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ எனக்காட்டுக.

(ii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு

(i) தற்போது, $B \cap C = \{1,-2,3,4,5,6\} \cap \{2,4,6,7\} = \{4,6\}$

ஆகவே, $A \cup (B \cap C) = \{0,1,2,3,4\} \cup \{4,6\} = \{0,1,2,3,4,6\}$. (1)

மேலும், $A \cup B = \{0,1,2,3,4\} \cup \{1,-2,3,4,5,6\}$

$= \{-2,0,1,2,3,4,5,6\}$,

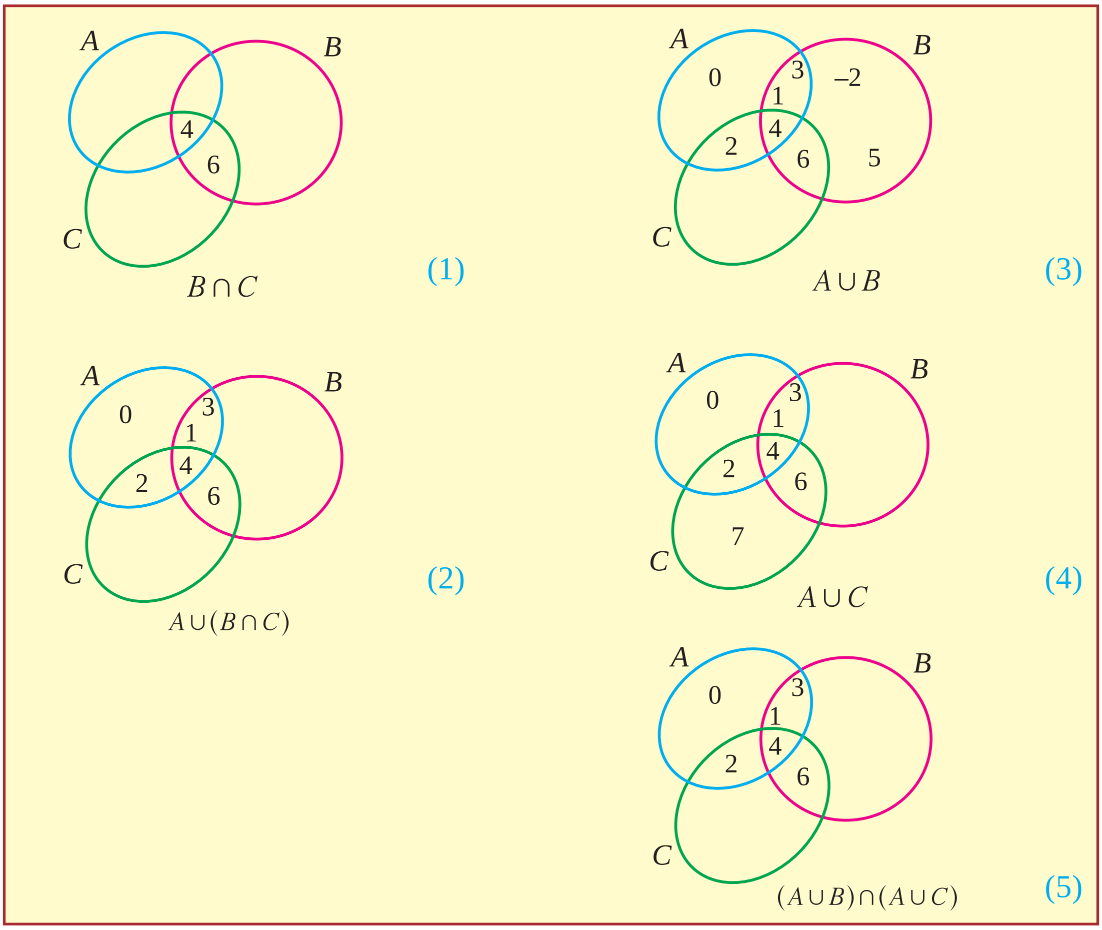
$A \cup C = \{0,1,2,3,4\} \cup \{2,4,6,7\} = \{0,1,2,3,4,6,7\}$.

ஆகவே, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{-2,0,1,2,3,4,5,6\} \cap \{0,1,2,3,4,6,7\}$

$= \{0,1,2,3,4,6\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

(ii) தகுந்த வென்படங்கள் பின்வருமாறு.



படம் 1.12

(2) மற்றும் (5)-லிருந்து $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.6

$A=\{x\,|-3\le x<4, x\in\mathbb{R}\}$, $B=\{x\,|\,x<5, x\in\mathbb{N}\}$ மற்றும்

$C=\{-5,-3,-1,0,1,3\}$ எனில், $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு A என்ற கணத்தில் –3 மற்றும் அதைவிட அதிகமான ஆனால், 4 ஐ விட குறைவான அனைத்து மெய்யெண்களும் உள்ளன.

மேலும், $A=\{x\,|-3\le x<4, x\in\mathbb{R}\}$-ல் எண் 4 சேர்க்கப்படவில்லை.

கணம் B-ல், 5 ஐ விடச் சிறிய அனைத்து மிகை முழுக்களும் உள்ளன.

மேலும், $B=\{x\,|\,x<5, x\in\mathbb{N}\}=\{1,2,3,4\}$

ஆகவே, $B\cup C=\{1,2,3,4\}\cup\{-5,-3,-1,0,1,3\}$

$=\{1,2,3,4,-5,-3,-1,0\}$

எனவே, $A\cap(B\cup C)=A\cap\{1,2,3,4,-5,-3,-1,0\}$

$=\{-3,-1,0,1,2,3\}.$ (1)

மேலும், $A\cap B=\{x\,|-3\le x<4, x\in\mathbb{R}\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,2,3\};$

$A\cap C=\{x\,|-3\le x<4, x\in\mathbb{R}\}\cap\{-5,-3,-1,0,1,3\}$

$=\{-3,-1,0,1,3\}.$

எனவே, $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,2,3\}\cup\{-3,-1,0,1,3\}$

$=\{-3,-1,0,1,2,3\}.$ (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ என்பது தெளிவாகிறது.

பயிற்சி 1.1

1. $A\subset B$ எனில், $A\cup B=B$ எனக் காட்டுக (வென்படத்தைப் பயன்படுத்தவும்).
2. $A\subset B$ எனில், $A\cap B$ மற்றும் $A\setminus B$ ஆகியவற்றைக் காண்க. (வென்படத்தைப் பயன்படுத்துக).
3. $P=\{a,b,c\}, Q=\{g,h,x,y\}$ மற்றும் $R=\{a,e,f,s\}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

   (i) $P\setminus R$ (ii) $Q\cap R$ (iii) $R\setminus(P\cap Q)$.
4. $A=\{4,6,7,8,9\}$, $B=\{2,4,6\}$ மற்றும் $C=\{1,2,3,4,5,6\}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

   (i) $A\cup(B\cap C)$ (ii) $A\cap(B\cup C)$ (iii) $A\setminus(C\setminus B)$
5. $A=\{a,x,y,r,s\}, B=\{1,3,5,7,-10\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களுக்கு, கணங்களின் சேர்ப்பு செயலானது, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என்பதை சரிபார்க்கவும்.
6. $A=\{l,m,n,o,2,3,4,7\}$ மற்றும் $B=\{2,5,3,-2,m,n,o,p\}$ ஆகியவற்றிற்கு கணங்களின் வெட்டு, பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது என்பதை சரிபார்க்கவும்.

www.tntextbooks.in

7. $A = \{x \mid x$ என்பது 42-ன் பகாக் காரணி$\}$, $B = \{x \mid 5 < x \leq 12, x \in \mathbb{N}\}$ மற்றும் $C = \{1,4,5,6\}$ எனில், $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ என்பதை சரிபார்க்கவும்.

8. $P = \{a,b,c,d,e\}, Q = \{a,e,i,o,u\}$ மற்றும் $R = \{a,c,e,g\}$ ஆகிய கணங்களின் வெட்டு, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது என்பதை சரிபார்க்கவும்.

9. $A = \{5,10,15,20\}, B = \{6,10,12,18,24\}$ மற்றும் $C = \{7,10,12,14,21,28\}$ ஆகிய கணங்களுக்கு $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ என்பது மெய்யாகுமா என ஆராய்க. உன் விடைக்கு தக்க காரணம் கூறுக.

10. $A = \{-5,-3,-2,-1\}, B = \{-2,-1,0\}$ மற்றும் $C = \{-6,-4,-2\}$ என்க. $A \setminus (B \setminus C)$ மற்றும் $(A \setminus B) \setminus C$ ஆகியவற்றைக் காண்க. இதிலிருந்து கிடைக்கும் கண வித்தியாசச் செயல்பாட்டின் பண்பினைக் கூறுக.

11. $A = \{-3,-1,0,4,6,8,10\}$, $B = \{-1,-2,3,4,5,6\}$ மற்றும் $C = \{-1,2,3,4,5,7\}$ ஆகியவற்றிற்கு பின்வருவனவற்றை சரிபார்க்கவும்.

    (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

    (iii) வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ மற்றும் $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ஆகியனவற்றை சரிபார்க்கவும்.

1.5 டி மார்கனின் விதிகள் (De Morgan's laws)

அகஸ்டஸ் டி மார்கனின் (Augustus De Morgan) தந்தை (ஆங்கிலேயர்) இந்தியாவில் கிழக்கிந்தியக் கம்பெனியில் பணியில் இருந்தார். டி மார்கன் (1806-1871) இந்தியாவில், தமிழ்நாட்டிலுள்ள மதுரையில் பிறந்தார். அவர் 7 மாதக் குழந்தையாய் இருந்த போது அவருடைய குடும்பம் இங்கிலாந்திற்கு குடிபெயர்ந்தது. அவர் இங்கிலாந்தில், கேம்பிரிட்ஜ்ல் உள்ள டிரினிடி கல்லூரியில் (Trinity college, Cambridge, England) கல்வி பயின்றார். அடிப்படை கணச் செயல்களான சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் நிரப்பி ஆகியவைகளை தொடர்புபடுத்தும் வகையில் டி மார்கனின் விதிகள் உள்ளன.

கண வித்தியாசத்திற்கான டி மார்கனின் விதிகள் (De Morgan's laws for set difference)

> A, B, C என்பன ஏதேனும் மூன்று கணங்கள் எனில்,
>
> (i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

கண நிரப்பிக்கான டி மார்கனின் விதிகள் (De Morgan's laws for complementation)

> கணம் A மற்றும் B-களை உட்கணங்களாகக் கொண்ட அனைத்துக் கணம் U எனில்,
>
> (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

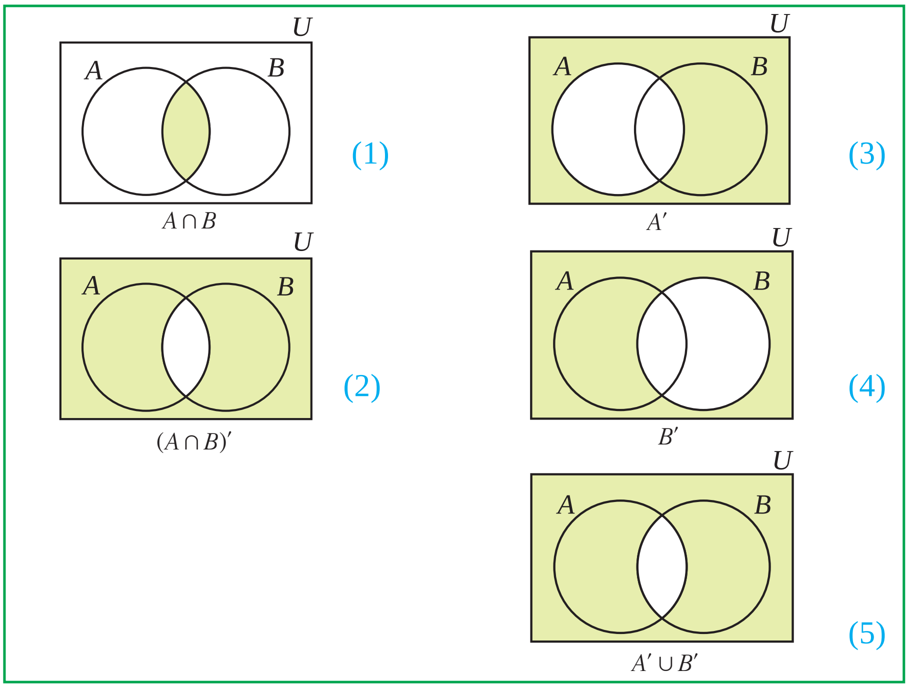
ஏதேனும் ஒரு கணம் D எனில், $D' = U \setminus D$ என்பதால், கண வித்தியாச விதிகளின் நிரூபணத்திலிருந்து கணநிரப்பி விதிகளின் நிரூபணத்தைப் பெறலாம் என்பதைக் கவனிக்கவும். இதற்கு நிரூபணம் தராமல், இவ்விதிகளைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதைக் கற்றுக் கொள்வோம்.

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 1.7

வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு



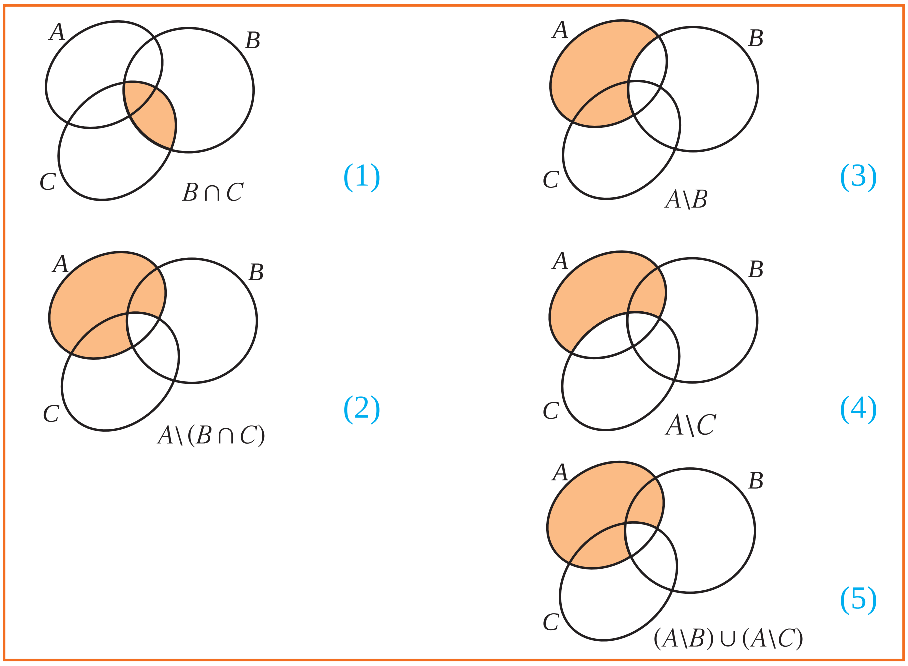
படம் 1.13

(2) மற்றும் (5)-லிருந்து $(A \cap B)' = A' \cup B'$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.8

வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ என்னும் டி மார்கனின் கண வித்தியாச விதியினைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு



படம் 1.14

(2) மற்றும் (5)-லிருந்து $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 1.9

$U = \{-2,-1,0,1,2,3,\cdots,10\}$, $A = \{-2,2,3,4,5\}$ மற்றும் $B = \{1,3,5,8,9\}$ என்க. டி மார்கனின் கண நிரப்பி விதிகளைச் சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு முதலில் $(A\cup B)' = A'\cap B'$ என்பதைச் சரிபார்ப்போம்.

$$A\cup B = \{-2,2,3,4,5\}\cup\{1,3,5,8,9\} = \{-2,1,2,3,4,5,8,9\}$$

எனவே, $(A\cup B)' = U \setminus \{-2,1,2,3,4,5,8,9\} = \{-1,0,6,7,10\}$. (1)

மேலும், $A' = U \setminus A = \{-1,0,1,6,7,8,9,10\}$

$B' = U \setminus B = \{-2,-1,0,2,4,6,7,10\}$.

ஆகவே, $A'\cap B' = \{-1,0,1,6,7,8,9,10\}\cap\{-2,-1,0,2,4,6,7,10\}$

$= \{-1,0,6,7,10\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $(A\cup B)' = A'\cap B'$ என அறிகிறோம்

இவ்வாறே, மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களுக்கு $(A\cap B)' = A'\cup B'$ எனவும் சரிபார்க்கலாம். இது பயிற்சிக்காக விடப்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1.10

$A = \{a,b,c,d,e,f,g,x,y,z\}$, $B = \{1,2,c,d,e\}$ மற்றும் $C = \{d,e,f,g,2,y\}$ என்க.

$A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ என்பதை சரிபார்க்கவும்.

தீர்வு $B\cup C = \{1,2,c,d,e\}\cup\{d,e,f,g,2,y\}$

$= \{1,2,c,d,e,f,g,y\}$

ஆகவே, $A\setminus(B\cup C) = \{a,b,c,d,e,f,g,x,y,z\}\setminus\{1,2,c,d,e,f,g,y\}$

$= \{a,b,x,z\}$. (1)

மேலும், $A\setminus B = \{a,b,f,g,x,y,z\}$ மற்றும் $A\setminus C = \{a,b,c,x,z\}$

ஆகவே, $(A\setminus B)\cap(A\setminus C) = \{a,b,x,z\}$. (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $A\setminus(B\cup C) = (A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

பயிற்சி 1.2

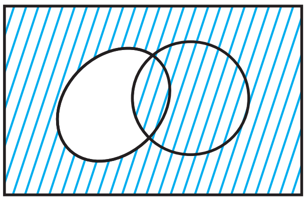
1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணங்களை, வென்படங்களின் மூலம் காட்டுக.

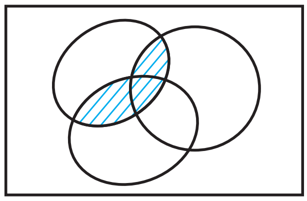
(i) $U = \{5,6,7,8,\cdots,13\}$, $A = \{5,8,10,11\}$ மற்றும் $B = \{5,6,7,9,10\}$

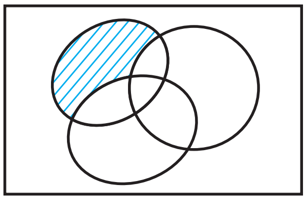
(ii) $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $M = \{b,d,f,g\}$ மற்றும் $N = \{a,b,d,e,g\}$

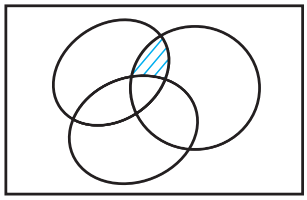
www.tntextbooks.in

2. நிழலிட்டுக் (கோடிட்டு) காட்டப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு பகுதியையும் குறியீட்டு முறையில் எழுதுக. $U, A, B, C, \cup, \cap,\ '$ மற்றும் $\setminus$ ஆகிய குறியீடுகளை தேவையான இடங்களில் பயன்படுத்துக.

(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

3. A, B மற்றும் C ஆகிய மூன்று கணங்களுக்கு பின் வருவனவற்றை விளக்கும் வென்படங்கள் வரைக.

(i) $A \cap B \cap C$

(ii) A மற்றும் B என்பன C-யின் உட்கணங்கள். மேலும் அவைகள் வெட்டாக் கணங்கள்.

(iii) $A \cap (B \setminus C)$ (iv) $(B \cup C) \setminus A$ (v) $A \cup (B \cap C)$

(vi) $C \cap (B \setminus A)$ (vii) $C \cap (B \cup A)$

4. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

5. $U = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$, $A = \{8, 16, 24\}$ மற்றும் $B = \{4, 16, 20, 28\}$ எனில், $(A \cup B)'$ மற்றும் $(A \cap B)'$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

6. $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, f, g\}$ மற்றும் $B = \{a, b, c\}$ எனில், டி மார்கனின் கண நிரப்பி விதிகளைச் சரிபார்க்கவும்.

7. பின்வரும் கணங்களைக் கொண்டு டி மார்கனின் கண வித்தியாச விதிகளைச் சரிபார்க்கவும். $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$ மற்றும் $C = \{3, 9, 10, 12, 13\}$.

8. $A = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$, $B = \{1, 5, 10, 15, 20, 30\}$ மற்றும் $C = \{7, 8, 15, 20, 35, 45, 48\}$ ஆகிய கணங்களுக்கு $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும்.

9. வென்படங்களைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றைச் சரியா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (iv) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

1.6 கணங்களின் ஆதி எண் அல்லது கண எண் (Cardinality of sets)

ஒன்பதாம் வகுப்பில் $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, இரு கணங்களைக் கொண்ட கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண்பதை அறிந்து கொண்டோம். இச்சூத்திரம் A, B மற்றும் $A\cap B$ ஆகியவற்றின் ஆதி எண்கள் கொடுக்கப்பட்டால் $A\cup B$ என்ற கணத்தின் ஆதி எண்ணைக் கணக்கிட உதவுகிறது. A, B மற்றும் C என்ற மூன்று கணங்களைக் கொண்டு $A\cup B\cup C$ என்ற கணத்தின் ஆதி எண் எவ்வாறு கண்டறிவது? இதற்கான சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$n(A\cup B\cup C)= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

இச்சூத்திரத்தின் பயன்பாட்டினைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் விளக்குகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 1.11

ஒரு குழுவில் 65 மாணவர்கள் கால்பந்தும், 45 பேர் ஹாக்கியும், 42 பேர் கிரிக்கெட்டும் விளையாடுகிறார்கள். 20 பேர் கால்பந்தாட்டமும் ஹாக்கியும், 25 பேர் கால்பந்தாட்டமும் கிரிக்கெட்டும், 15 பேர் ஹாக்கியும் கிரிக்கெட்டும் மற்றும் 8 பேர் மூன்று வியைாட்டுகளையும் விளையாடுகிறார்கள். அக்குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(ஒவ்வொரு மாணவனும் குறைந்தது ஒரு விளையாட்டினை விளையாடுவார் எனக் கொள்க.)

தீர்வு F, H மற்றும் C என்பன முறையே கால்பந்தாட்டம், ஹாக்கி, கிரிக்கெட் ஆடுபவர்களின் கணங்களைக் குறிக்கட்டும். ஆகவே, $n(F)=65, n(H)=45$ மற்றும் $n(C)=42$.

மேலும், $n(F\cap H)=20$, $n(F\cap C)=25$, $n(H\cap C)=15$ மற்றும் $n(F\cap H\cap C)=8$.

குழுவிலுள்ள மாணவர்களின் மொத்த எண்ணிக்கையைக் காண்போம்.

அதாவது, $n(F\cup H\cup C)$-ஐக் காண்போம்.

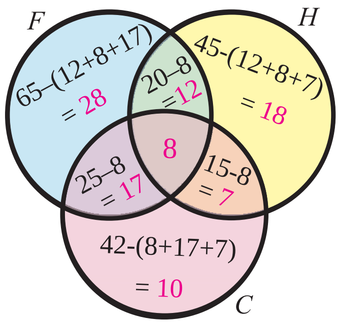
சூத்திரத்தின்படி, $n(F\cup H\cup C) = n(F)+n(H)+n(C)-n(F\cap H)-n(H\cap C)-n(F\cap C)+n(F\cap H\cap C)$

$= 65+45+42-20-25-15+8 = 100.$

ஆகவே, குழுவிலுள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 100.

மாற்று முறை

வென்படத்தைப் பயன்படுத்தி இதே கணக்கிற்குத் தீர்வு காண முடியும். இக்காலத்தில் வென்படங்களையும் தருக்க முறையையும் பயன்படுத்தி அன்றாட வாழ்க்கையில் நிகழும் சில கணக்குகளுக்குத் தீர்வு காண இயலும். இந்த கணக்கிற்குரிய வென்படங்கள், ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளும் மூன்று கணங்களைக் கொண்டது. ஒவ்வொன்றும் ஒரு விளையாட்டைக் குறிக்கும். படத்தைப் பார்த்து, கொடுக்கப்பட்ட கூற்றுக்களைக் கொண்டு, கவனமாகக் கணக்கிட்டு, விளையாட்டு வீரர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்போம். கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை படத்தில் குறிப்போம்.



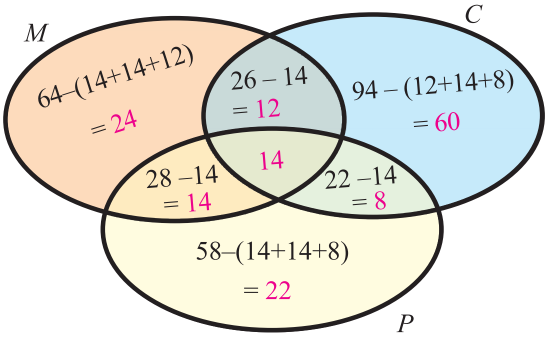
படம் 1.15

ஆகவே, குழுவில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கை = 28 + 12 + 18 + 7 + 10 + 17 + 8 = 100.

எடுத்துக்காட்டு 1.12

பல்கலைக்கழக மாணவர்களின் கணக்கெடுப்பில், 64 பேர் கணிதம், 94 பேர் கணிப்பொறி அறிவியல், 58 பேர் இயற்பியல் ஆகிய பாடங்களைக் கற்கின்றனர். 28 பேர் கணிதமும் இயற்பியலும், 26 பேர் கணிதமும் கணிப்பொறி அறிவியலும், 22 பேர் கணிப்பொறி அறிவியலும் இயற்பியலும் மற்றும் 14 பேர் மூன்று பாடங்களையும் கற்கின்றனர். கணக்கெடுப்பில் கலந்துக் கொண்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. மேலும், ஒரு பாடத்தை மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை வென்படத்தில் குறிப்பிடுவோம்.



படம் 1.16

M, C மற்றும் P என்பன முறையே கணிதம், கணிப்பொறி அறிவியல் மற்றும் இயற்பியல் கற்கும் மாணவர்களைக் குறிக்கும் கணங்கள் என்க. கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களை வென்படத்தில் குறிப்போம்.

$$n(M\cap C\cap P) = 14$$
$$n(M\cap C\cap P') = 26-14 = 12$$
$$n(M\cap P\cap C') = 28-14 = 14$$
$$n(C\cap P\cap M') = 22-14 = 8$$

கணக்கெடுப்பின் போது இருந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$= 24+12+60+8+22+14+14 = 154$$

கணிதம் மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 64-(14+14+12) = 24$

கணிப்பொறி அறிவியல் மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$= 94-(12+14+8) = 60$$

இயற்பியல் மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 58-(14+14+8) = 22$

எனவே, ஒரு பாடத்தை மட்டும் கற்கின்ற மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 24+60+22 = 106$.

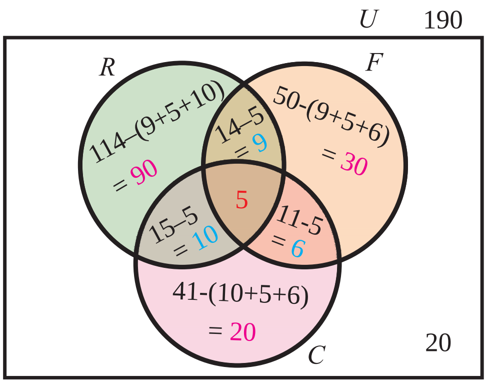
எடுத்துக்காட்டு 1.13

ஒரு வானொலி நிலையம் 190 மாணவர்களிடம் அவர்கள் விரும்பும் இசையின் வகைகளைத் தீர்மானிக்க ஒரு கணக்கெடுப்பு நடத்தியது. 114 பேர் மேற்கத்திய இசையையும், 50 பேர் கிராமிய இசையையும், 41 பேர் கர்நாடக இசையையும், 14 பேர் மேற்கத்திய இசையையும் கிராமிய இசையையும், 15 பேர் மேற்கத்திய இசையையும் கர்நாடக இசையையும், 11 பேர் கர்நாடக இசையையும் கிராமிய இசையையும் மற்றும் 5 பேர் இம்மூன்று இசைகளையும் விரும்புகின்றனர் எனக் கணக்கெடுப்பில் வெளிப்பட்டது. இத்தகவல்களிலிருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) மூன்று வகை இசைகளையும் விரும்பாத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) இரு வகை இசைகளை மட்டும் விரும்பும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.

(iii) கிராமிய இசையை விரும்பி மேற்கத்திய இசையை விரும்பாத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை.



படம் 1.17

தீர்வு R, F மற்றும் C ஆகியன முறையே மேற்கத்திய இசை, கிராமிய இசை மற்றும் கர்நாடக இசை விரும்பும் மாணவர்களின் கணங்களைக் குறிக்கட்டும். வென்படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் குறிப்போம்.

இங்கு, $n(R \cap F) = 14,\ n(R \cap C) = 15,\ n(C \cap F) = 11$ மற்றும் $n(R \cap F \cap C) = 5$

எனவே, $n(R \cap F \cap C') = 14 - 5 = 9$

$n(R \cap C \cap F') = 15 - 5 = 10$

$n(F \cap C \cap R') = 11 - 5 = 6.$

(i) வென்படத்திலிருந்து, ஏதேனும் ஒரு வகை இசையையாவது விரும்பும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $90 + 9 + 30 + 6 + 20 + 10 + 5 = 170.$

கணக்கெடுக்கப்பட்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 190.$

ஆகவே, மூன்று வகை இசைகளையும் விரும்பாதவர்களின் எண்ணிக்கை $= 190 - 170 = 20.$

(ii) ஏதேனும் இருவகை இசைகளை மட்டும் விரும்புபவர்கள் எண்ணிக்கை $= 9 + 6 + 10 = 25.$

(iii) கிராமிய இசையை விரும்பி, மேற்கத்திய இசையை விரும்பாத மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 30 + 6 = 36.$

பயிற்சி 1.3

1. A, B என்பன இரு கணங்கள் மற்றும் U என்பது அனைத்துக் கணம் என்க. மேலும் $n(U) = 700$, $n(A) = 200, n(B) = 300$ மற்றும் $n(A \cap B) = 100$ எனில், $n(A' \cap B')$ஐக் காண்க.

2. $n(A) = 285, n(B) = 195, n(U) = 500$ மற்றும் $n(A \cup B) = 410$ எனில், $n(A' \cup B')$-ஐக் காண்க.

3. A, B மற்றும் C ஏதேனும் மூன்று கணங்கள் என்க. மேலும்,
$n(A) = 17,\ n(B) = 17,\ n(C) = 17,\ n(A \cap B) = 7,\ n(B \cap C) = 6,\ n(A \cap C) = 5$ மற்றும் $n(A \cap B \cap C) = 2$ எனில், $n(A \cup B \cup C)$ -ஐக் காண்க.

4. பின்வரும் கணங்களுக்கு $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
என்பதை சரிபார்க்கவும். (i) $A = \{4,5,6\}, B = \{5,6,7,8\}$ மற்றும் $C = \{6,7,8,9\}$

(ii) $A = \{a,b,c,d,e\}, B = \{x,y,z\}$ மற்றும் $C = \{a,e,x\}.$

5. ஒரு கல்லூரியில் சேருவதற்கு 60 மாணவர்கள் வேதியியலிலும், 40 பேர் இயற்பியலிலும், 30 பேர் உயிரியலிலும் பதிவு செய்துள்ளனர். 15 பேர் வேதியியலிலும் இயற்பியலிலும்,10 பேர் இயற்பியலிலும் உயிரியலிலும் மற்றும் 5 பேர் உயிரியலிலும் வேதியியலிலும் பதிவு செய்துள்ளனர். மூன்று பாடங்களிலும் ஒருவருமே பதிவு செய்யவில்லை எனில், ஏதேனும் ஒரு பாடத்திற்காவது பதிவு செய்துள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை யாது?

6. ஒரு நகரத்தில் 85% பேர் தமிழ் மொழி, 40% பேர் ஆங்கில மொழி மற்றும் 20% பேர் இந்தி மொழி பேசுகிறார்கள். 32% பேர் தமிழும் ஆங்கிலமும், 13% பேர் தமிழும் இந்தியும் மற்றும் 10% பேர் ஆங்கிலமும் இந்தியும் பேசுகிறார்கள் எனில், மூன்று மொழிகளையும் பேசத் தெரிந்தவர்களின் சதவீதத்தினைக் காண்க.

7. 170 வாடிக்கையாளர்களில் 115 பேர் தொலைக்காட்சியையும், 110 பேர் வானொலியையும் மற்றும் 130 பேர் பத்திரிக்கைகளையும் பயன்படுத்திகிறார்கள் என்பதை ஒரு விளம்பர நிறுவனம் கண்டறிந்தது. மேலும், 85பேர் தொலைக்காட்சி மற்றும் பத்திரிக்கையையும், 75 பேர் தொலைக்காட்சி மற்றும் வானொலியையும், 95 பேர் வானொலி மற்றும் பத்திரிக்கையையும்,

www.tntextbooks.in

70 பேர் மூன்றினையும் பயன்படுத்துகிறார்கள் எனவும் கண்டறிந்தது. வென்படத்தில் விவரங்களைச் குறித்து, பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) வானொலியை மட்டும் பயன்படுத்துபவர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) தொலைக்காட்சியை மட்டும் பயன்படுத்துபவர்களின் எண்ணிக்கை.

(iii) தொலைக்காட்சி மற்றும் பத்திரிக்கைகளைப் பயன்படுத்தி வானொலியைப் பயன்படுத்தாதவர்களின் எண்ணிக்கை.

8. 4000 மாணவர்கள் பயிலும் ஒரு பள்ளியில் , 2000 பேருக்கு பிரெஞ்சு, 3000 பேருக்குத் தமிழ் மற்றும் 500 பேருக்கு இந்தி தெரியும். மேலும், 1500 பேருக்கு பிரெஞ்சு மற்றும் தமிழ், 300 பேருக்கு பிரெஞ்சு மற்றும் இந்தி, 200 பேருக்கு தமிழ் மற்றும் இந்தி, 50 பேருக்கு இம்மூன்று மொழிகளும் தெரியும் எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) மூன்று மொழிகளும் தெரியாதவர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) ஏதேனும் ஒரு மொழியாவது தெரிந்தவர்களின் எண்ணிக்கை.

(iii) இரு மொழிகள் மட்டுமே தெரிந்தவர்களின் எண்ணிக்கை.

9. 120 குடும்பங்கள் உள்ள ஒரு கிராமத்தில் 93 குடும்பங்கள் சமையல் செய்வதற்கு விறகைப் பயன்படுத்துகின்றனர். 63 குடும்பங்கள் மண்ணெண்ணெயினைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். 45 குடும்பங்கள் சமையல் எரிவாயுவைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். 45 குடும்பங்கள் விறகு மற்றும் மண்ணெண்ணெய், 24 குடும்பங்கள் மண்ணெண்ணெய் மற்றும் எரிவாயு, 27 குடும்பங்கள் எரிவாயு மற்றும் விறகு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துகின்றனர். விறகு, மண்ணெண்ணெய் மற்றும் சமையல் எரிவாயு இம்மூன்றையும் பயன்படுத்தும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

1.7 உறவுகள் (Relations)

முன் பாடப்பகுதியில் கணங்களைப் பற்றி கற்றறிந்தோம். கொடுக்கப்பட்ட கணங்களிலிருந்து சேர்ப்பு, வெட்டு மற்றும் நிரப்பி ஆகியவற்றினால் புதிய கணங்களை உண்டாக்குவது பற்றியும் கற்றோம். இங்கு, மற்றொரு முறையில், கொடுக்கப்பட்ட கணங்கள் A மற்றும் B-யிலிருந்து ஒரு புதிய கணத்தை உருவாக்குவது பற்றிக் காண்போம். இப்புதிய கணம், பிற முக்கிய கணிதக் கருத்துக்களான உறவு மற்றும் சார்பு ஆகியனவற்றை வரையறுக்க பயன்படுகிறது.

வெற்றுக் கணங்களல்லாத A மற்றும் B ஆகியவற்றிலிருந்து $A\times B$ (‘A கிராஸ் B’ என படிக்கவும்) என்ற புதிய கணத்தை உருவாக்குவோம். இது A, B ஆகியவற்றின் கார்டீசியன் பெருக்கற்பலன் (cartesian product) என அழைக்கப்படும்.

$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A$ மற்றும் $b\in B\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இவ்வாறே, $B\times A = \{(b,a) \mid b\in B$ மற்றும் $a\in A\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

(i) சோடி (a, b)-ல் உறுப்புகளின் வரிசை மிகவும் முக்கியம் ஆகும். அதாவது, $a\neq b$ எனில், $(a, b)\neq(b, a)$ ஆகும்.

(ii) கார்டீசியன் பெருக்கல் $A\times B$ ல் கணங்கள் A மற்றும் B சம கணங்களாகவும் இருக்கலாம்.

இப்போது நாம் ஒரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.

ஒரு கைப்பேசி கடைக்காரர் மூன்று வித்தியாசமான கைப்பேசிகளை விற்கிறார். அவற்றை நாம் C_1, C_2, C_3 என அழைப்போம். C_1 இன் விலை ₹ 1200, C_2 இன் விலை ₹ 2500 மற்றும் C_3 இன் விலை ₹ 2500 என எடுத்துக் கொள்வோம்.

$A = \{ C_1, C_2, C_3 \}$ மற்றும் $B = \{ 1200, 2500 \}$ என எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஆகவே, $A\times B = \{ (C_1, 1200), (C_1, 2500), (C_2, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 1200), (C_3, 2500) \}$

ஆனால், $B\times A = \{ (1200, C_1), (2500, C_1), (1200, C_2), (2500, C_2,), (1200, C_3), (2500, C_3) \}$.

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, $A \neq B$ எனில், $A \times B \neq B \times A$ என எளிதில் காணலாம்.

$A \times B$-ன் ஒரு உட்கணம் $F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ என்க.

மேலே உள்ள வரிசைச் சோடிகளில் முதல் கூறு ஒவ்வொன்றும் ஒரேயொரு B-ன் உறுப்புடன் தொடர்புடையது. முதல் இடத்தில் உள்ள எந்த கூறும் இரண்டாம் இடத்தில், ஒன்றைவிட அதிகமான B-ன் உறுப்புடன் சோடி சேரவில்லை.

F-ல் உள்ள ஒவ்வொரு சோடியிலுள்ள இரண்டாவது கூறு, முதல் கூறின் விலையைக் காட்டுகிறது. அடுத்ததாக, $B \times A$-ன் உட்கணம் $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ என்க.

இதில் முதல் கூறு 2500 ஆனது, இரு வெவ்வேறு A-ன் உறுப்புகள் C_2 மற்றும் C_3 ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபடுத்துப்பட்டுள்ளது.

வரையறை

A மற்றும் B ஆகியன வெற்றுக் கணங்கள் அல்ல என்க. A-யிலிருந்து B-க்கு உள்ள ஒரு உறவு R ஆனது $A \times B$-ன் வெற்றுக்கணமில்லாத உட்கணமாகும். அதாவது, $R \subseteq A \times B$.

R-ன் மதிப்பகம் (Domain) $= \{x \in A \mid (x, y) \in R,$ ஏதேனும் ஒரு $y \in B\}$

R-ன் வீச்சகம் (Range) $= \{y \in B \mid (x, y) \in R,$ ஏதேனும் ஒரு $x \in A\}$.

1.8 சார்புகள் (Functions)

பீட்டர் டிரிச்லெட்
(1805-1859)
ஜெர்மனி

எண்ணியல், பகுப்பாய்வியல் மற்றும் இயந்திரவியல் ஆகிய கணிதவியல் பிரிவுகளில் டிரிச்லெட் முக்கிய பங்களிப்பினைச் செய்துள்ளார்.

நவீன கணிதக் கருத்தான சார்பினையும், அதற்குரிய குறியீடான $y = f(x)$-யையும் 1837-ல் இவர் அறிமுகப்படுத்தினார். மேலும் அனைவராலும் நன்கு அறியப்பட்டக் கொள்கையான பிஜியன் ஹோல் கொள்கையை (Pigeonhole principle) அமைத்தார்.

வரையறை

A மற்றும் B என்பன இரு வெற்றற்ற கணங்கள் என்க. A-யிலிருந்து B-க்கு உள்ள ஒரு உறவு $f \subseteq A \times B$ ஆனது,

(i) உறவு f-ன் மதிப்பகம் = கணம் A.

(ii) $(x, y) \in f$ எனில் , ஒவ்வொரு $x \in A$-க்கு ஒரேயொரு $y \in B$ உள்ளது.

ஆகியனவற்றை நிறைவு செய்யுமானால், அது ஒரு சார்பு (function) எனப்படும்.

A-யிலிருந்து B-க்கு உள்ள ஒரு சார்பானது மேற்கண்ட (i) மற்றும் (ii) நிபந்தனையுடன் அமையும் ஒரு உறவாகும்.

சார்பினை கோர்த்தல் அல்லது உருமாற்றம் (mapping or transformation) எனவும் கூறலாம்.

A-யிலிருந்து B-க்கு உள்ள ஒரு சார்பு $f: A \to B$ எனக் குறிக்கப்படும். $(x, y) \in f$ எனில், $y = f(x)$ என எழுதலாம்.

உறவு என்ற கருத்தைப் பயன்படுத்தாமல், பின்வருமாறு சார்பின் வரையறையை மாற்றித் தெளிவாக அமைக்க முடியும். இவ்வாறு மாற்றி அமைக்கப்படுவதை, சார்பின் பயன்பாட்டு வரையறையாகக் கொள்ளலாம்.

வரையறை

A மற்றும் B என்பன வெற்றற்ற இரு கணங்கள் என்க. A-யிலிருந்து B-க்கு ஒரு சார்பு எனப்படுவது, A என்ற கணத்திலுள்ள ஒவ்வொரு x-ம் B என்னும் கணத்திலுள்ள y என்ற ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்புபடுத்தும் ஒரு விதி ஆகும். $y = f(x)$ என்பது, y ஆனது x-ல் ஒரு சார்பு என பொருள்படும்.

$f: A \to B$ என்னும் சார்பின் மதிப்பகம் (Domain) A எனவும், அதன் துணை மதிப்பகம் (Co-domain) B எனவும் அழைக்கப்படும். y என்பது x-ன் நிழல் உரு (image) எனவும் x என்பது y-ன் முன் உரு (preimage) எனவும் அழைக்கப்படும். f-ன் அனைத்து நிழல் உருக்களையும் கொண்ட கணமானது f-ன் வீச்சகம் (range) என அழைக்கப்படும். வீச்சகமானது, சார்பு f-ன் துணை மதிப்பகத்தின் ஒரு உட்கணம் ஆகும்.

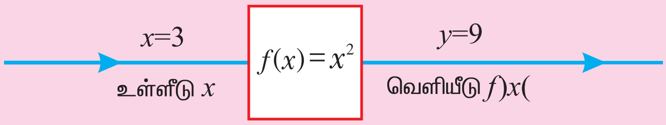
மேலே கூறப்பட்டுள்ள, சார்பின் புதிய வரையறையானது 1837 ஆம் ஆண்டில், நிக்கோலாய் லாபாச்வெஸ்கி (Nikolai Labachevsky) மற்றும் பீட்டர் டிரிச்லெட் (Peter Dirichlet)ஆகியோரால் தனித்தனியே கண்டறியப்பட்டதாகும். அதற்கு முன்பு சார்புக்கான தெளிவான வரையறை இல்லை.

பிரிவு 1.7-ல் கூறப்பட்டுள்ள எடுத்துக்காட்டில், $F \subseteq A \times B$ என்ற உறவு, சார்புகளுக்கான நிபந்தனைகள் (i) மற்றும் (ii) ஆகியவற்றை நிறைவு செய்வதால், $F = \{(C_1, 1200), (C_2, 2500), (C_3, 2500)\}$ என்பது ஒரு சார்பாகும்.

$(2500, C_2), (2500, C_3) \in E$ ஆகியன மேலேயுள்ள நிபந்தனை (ii) ஐ நிறைவு செய்யவில்லை என்பதால், $E = \{(1200, C_1), (2500, C_2), (2500, C_3)\}$ என்பது ஒரு சார்பாகாது.

குறிப்புரை

(i) உள்ளீடாக அமையும் ஒவ்வொரு மதிப்பு x-க்கும் ஒரேயொரு மதிப்பு y-ஐ வெளியீடாக தருகின்ற ஒரு இயந்திரமாக சார்பு f ஐக் கருதலாம்.



(ii) ஒரு சார்பை வரையறுக்க மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் மதிப்பகத்தின் ஒவ்வொரு உறுப்பினையும் துணை மதிப்பகத்தின் ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்பு படுத்தும் விதி ஆகியன நமக்குத் தேவை.

எடுத்துக்காட்டு 1.14

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$ என்க.

$R = \{(1, 3), (2, 6), (3, 10), (4, 9)\} \subseteq A \times B$ ஒரு உறவு எனில், R ஐ ஒரு சார்பு எனக் காட்டுக. அதன் மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகம் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு R-ன் மதிப்பகம் $= \{1, 2, 3, 4\} = A$.

ஒவ்வொரு $x \in A$ -க்கு $y = R(x)$ என்றவாறு ஒரேயொரு $y \in B$ உள்ளது.

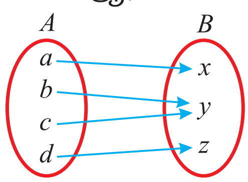
எனவே, R ஒரு சார்பாகும். R-ன் துணை மதிப்பகம் B ஆகும்.

$R(1) = 3, R(2) = 6, R(3) = 10$ மற்றும் $R(4) = 9$ என்பதால், R-ன் வீச்சகம் $= \{3, 6, 10, 9\}$.

எடுத்துக்காட்டு 1.15

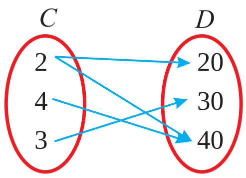
கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அம்புக்குறிப் படங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கின்றனவா என ஆராய்க.

(i)



படம் 1.18

(ii)



படம் 1.19

www.tntextbooks.in

தீர்வு அம்புக்குறிப் படம் (i)-ல் A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் ஒரேயொரு நிழல்உரு உள்ளது. ஆகவே, அது ஒரு சார்பாகும்.

அம்புக்குறிப் படம் (ii)-ல் உறுப்பு 2- க்கு 20 மற்றும் 40 என்ற இரு நிழல் உருக்கள் உள்ளன. எனவே, இது ஒரு சார்பாகாது.

எடுத்துக்காட்டு 1.16

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ என்க. பின்வரும் ஒவ்வொரு உறவும், X-லிருந்து X-க்கு ஒரு சார்பாகுமா என ஆராய்க. உன் விடைக்கு ஏற்ற விளக்கம் தருக.

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

(ii) $g = \{ (3, 1), (4, 2), (2, 1) \}$ (iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

தீர்வு

(i) $f = \{ (2, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 4) \}$

X-ன் உறுப்பு 2 ஆனது வெவ்வேறான உறுப்புகள் 3 மற்றும் 1 ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, f ஒரு சார்பல்ல.

(ii) $g = \{(3,1),(4,2),(2,1)\}$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 1 எனும் X-ன் உறுப்பிற்கு ஒரு நிழல்உரு X-ல் இல்லை. அதாவது, g-ன் மதிப்பகம் $\{2, 3, 4\} \neq X$. எனவே, g என்பது ஒரு சார்பல்ல.

(iii) $h = \{ (2, 1), (3, 4), (1, 4), (4, 3) \}$

X-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் X-ன் ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, h ஆனது ஒரு சார்பு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.17

$A = \{ 1, 4, 9, 16 \}$-லிருந்து $B = \{ -1, 2, -3, -4, 5, 6 \}$-க்கு பின்வரும் உறவுகளில் எவை சார்பாகும்? அவ்வாறு சார்பு எனில், அதன் வீச்சகத்தைக் காண்க.

(i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$

தீர்வு (i) $f_1 = \{ (1, -1), (4, 2), (9, -3), (16, -4) \}$

A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் B-ன் ஒரேயொரு உறுப்புடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, f_1 ஒரு சார்பு ஆகும்.

மேலும், f_1-ன் வீச்சகம் $= \{-1, 2, -3, -4\}$.

(ii) $f_2 = \{ (1, -4), (1, -1), (9, -3), (16, 2) \}$. இங்கு 1 ஆனது இரு வெவ்வேறான நிழல்உருக்கள் -4 மற்றும் -1 ஆகியவற்றுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.

ஆகவே, f_2 ஒரு சார்பல்ல. மேலும் 4க்கு நிழல் உரு இல்லை. எனவே f_2 ஒரு சார்பல்ல.

(iii) $f_3 = \{ (4, 2), (1, 2), (9, 2), (16, 2) \}$.
A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் B-ன் ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. எனவே, f_3 ஒரு சார்பாகும். மேலும், f_3-ன் வீச்சகம் $= \{ 2 \}$ ஆகும்.

(iv) $f_4 = \{ (1, 2), (4, 5), (9, -4), (16, 5) \}$.
A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் B-ன் ஒரேயொரு உறுப்போடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, f_4 ஒரு சார்பாகும். மேலும், f_4-ன் வீச்சகம் $= \{ 2, 5, -4\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.18

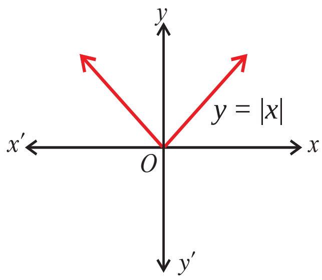
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ எனும்போது} \\ -x, & x < 0 \text{ எனும்போது} \end{cases},$$

$\{ (x,y) \mid y = |x|, x \in \mathbb{R} \}$ என்ற உறவு, சார்பை வரையறுக்கிறதா? அதன் வீச்சகம் காண்க.

தீர்வு x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் $y = |x|$ என்ற ஒரு தனித்த (ஒரேயொரு) மதிப்பு உள்ளது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட உறவு, ஒரு சார்பினை வரையறுக்கிறது. சார்பின் மதிப்பகம் அனைத்து மெய்யெண்களின் கணம் $\mathbb{R}$ ஆகும். ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணுக்கும் $|x|$ ஆனது எப்போதும் பூச்சியமாகவோ அல்லது மிகை மெய்யெண்ணாகவோ இருப்பதால், இச்சார்பினால் கிடைக்கும் நிழல்உருக்கள் மிகை மெய்யெண்களாகும்.

ஆகவே, இதன் வீச்சகம் குறை மெய்யெண்கள் அல்லாத (மிகை மெய்யெண் அல்லது பூச்சியம்) எண்களின் கணம் ஆகும்.



படம் 1.20

குறிப்புரை

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ எனும்போது} \\ -x, & x < 0 \text{ எனும்போது} \end{cases},$$ என்றவாறு அமையும் சார்பு $y = |x|, x \in \mathbb{R}$, என்பது மட்டுச் சார்பு அல்லது அறச் சார்பு (modulus or absolute value function) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $|-8| = -(-8) = 8$. மேலும், $|8| = 8$.

1.8.1 சார்புகளைக் குறிக்கும் முறை (Representation of functions)

$f : A \to B$ என்ற சார்பினை பின்வரும் முறைகளில் குறிக்கலாம்.

(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (a set of ordered pairs) (ii) அட்டவணை (a table)
(iii) அம்புக்குறிப் படம் (an arrow diagram) (iv) வரைபடம் (a graph)

(i) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$ என்றவாறு அமையும் அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக, சார்பு $f : A \to B$-ஐக் குறிக்கலாம்.

(ii) x-ன் மதிப்புகள் மற்றும் f ஆல் பெறப்படும் நிழல்உருக்கள் ஆகியனவற்றைக் கொண்டு ஒரு அட்டவணையை அமைக்கலாம்.

(iii) ஒரு அம்புக்குறிப் படத்தில் f-ன் மதிப்பகத்தின் உறுப்புகளையும் அவற்றிற்குரிய நிழல்உருக்களையும் அம்புக்குறிகள் மூலம் தொடர்புப்படுத்திக் காட்டலாம்.

(iv) $f = \{(x, y) : y = f(x), x \in A\}$-ல் உள்ள அனைத்து வரிசை சோடிகளை, ஒரு தளத்தில் புள்ளிகளாகக் குறிக்கலாம். அனைத்துப் புள்ளிகளையும் குறிக்கும் படம் f-ன் வரைபடமாகும்.

சார்புகளை பல்வேறு விதங்களில் குறிப்பதை சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலமாக விளக்குவோம்.

பல சார்புகளுக்கு அவற்றின் வரைபடத்தைப் பெற முடியும். ஆனால் ஒவ்வொரு வரைபடமும் ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

ஒரு வரைபடம் சார்பாகுமா என்பதைத் தீர்மானிக்க பின்வரும் சோதனையை பயன்படுத்தலாம்.

1.8.2 குத்துக்கோடு சோதனை (Vertical line test)

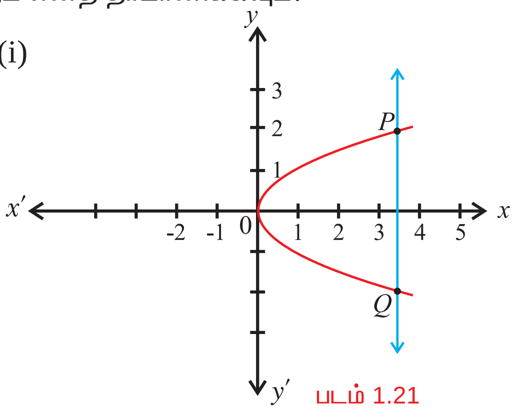
வரைபடத்தை, ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் அதிகபட்சம் ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டினால், அவ்வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

> *குறிப்பு*
>
> சில குத்துக்கோடுகள் வரைபடத்தை வெட்டாமலும் இருக்கலாம். ஏதேனும் ஒரு குத்துக்கோடு வரைபடத்தை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட புள்ளிகளில் வெட்டினால், அந்த வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது. ஏனெனில், x-ன் ஒரு மதிப்புக்கு, y-க்கு குறைந்தது இரண்டு மதிப்புகள் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, $y^2 = x$ என்பது ஒரு சார்பல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 1.19

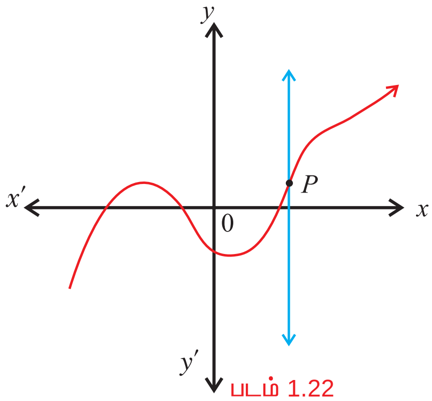
குத்துக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வரைபடங்களில் எவை சார்பினைக் குறிக்கும் எனத் தீர்மானிக்கவும்.

(i)



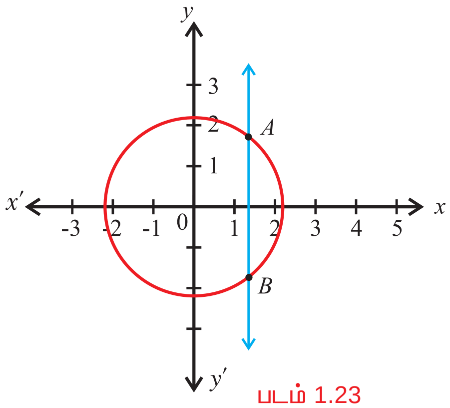
படம் 1.21

(ii)



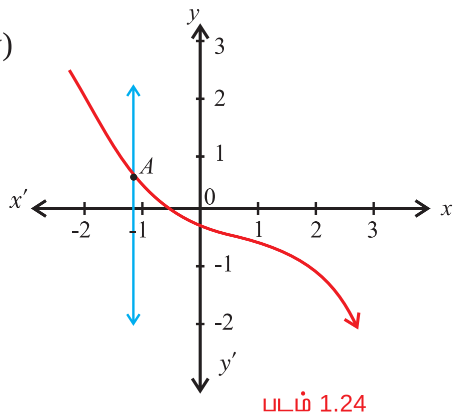
படம் 1.22

(iii)



படம் 1.23

(iv)



படம் 1.24

தீர்வு

(i) ஒரு குத்துக்கோடு, வரைபடத்தை P மற்றும் Q ஆகிய இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், கொடுக்கப்பட்ட வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

(ii) எந்த ஒரு குத்துக்கோடும் வரைபடத்தை அதிகபட்சமாக ஒரேயொரு புள்ளியில் வெட்டுவதால், இந்த வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

(iii) ஒரு குத்துக்கோடு வரைபடத்தை A மற்றும் B என்ற இரு புள்ளிகளில் வெட்டுவதால், இந்த வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்காது.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட வரைபடமானது குத்துக்கோடு சோதனையை நிறைவு செய்வதால், வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.20

$A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ மற்றும் $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ என்பன இரு கணங்கள் என்க. $f : A \to B$ என்னும் சார்பு $f(x) = 2x + 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சார்பினை (i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (ii) அட்டவணை (iii) அம்புக்குறிப் படம் (iv) வரைபடம் ஆகியவற்றால் குறிக்க.

தீர்வு $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $f(x) = 2x + 1$. ஆகவே,

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$, $f(1) = 2(1)+1 = 3$, $f(2) = 2(2) + 1 = 5$, $f(3) = 2(3) + 1 = 7$

(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு f -ஐ பின்வரும் வரிசைச் சோடிகளின் கணமாக எழுதலாம்.

$$f = \{ (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) \}.$$

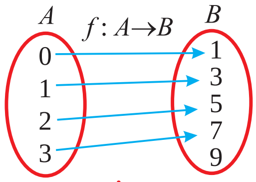
(ii) அட்டவணை அமைப்பு

சார்பு f ஐ கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையால் குறிப்போம்.

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	3	5	7

(iii) அம்புக்குறிப் படம்

சார்பு f -ஐ ஒரு அம்புக்குறிப் படத்தால் குறிப்போம். கணங்கள் A மற்றும் B ஆகியவற்றை இரண்டு மூடிய வளைவரைகளால் குறிப்போம்.



படம் 1.25

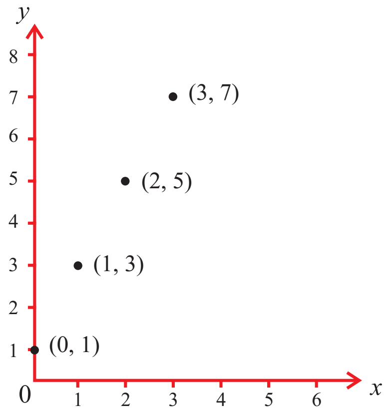
A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் B-ல் உள்ள அதன் ஒரேயொரு நிழல் உருவுடன் அம்புக்குறியால் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.

(iv) வரைபடம்

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} = \{(0,1), (1,3), (2,5), (3,7)\}$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7) ஆகிய புள்ளிகள், படம் 1.26-ல் காட்டியுள்ளவாறு தளத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளன.

அனைத்துப் புள்ளிகளும் சேர்ந்து சார்பினுடைய வரைபடத்தை குறிக்கின்றது.



படம் 1.26

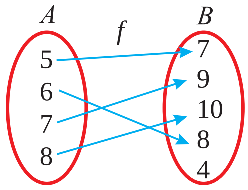
www.tntextbooks.in

1.8.3 சார்புகளின் வகைகள் (Types of functions)

சார்புகளின் பண்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு, சார்புகளை சில குறிப்பிட்ட வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்லது 1-1 சார்பு (One-One function)

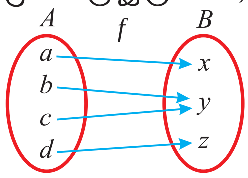
$f : A \to B$ என்பது ஒரு சார்பு என்க. A-ன் வெவ்வேறான உறுப்புகளை B-ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் f ஆனது தொடர்புபடுத்துமானல், f என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும். அதாவது A-ல் உள்ள உறுப்புகள் u, v என்பன $u \neq v$ எனும்போது $f(u) \neq f(v)$ என இருந்தால் f என்பது 1-1 சார்பு ஆகும். இதிலிருந்து f ஆனது 1-1 சார்பு எனில், A-ல் உள்ள ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகளின் நிழல் உருக்களாக B-ன் எந்த ஒரு உறுப்பும் இருக்கக்கூடாது. ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு என்பது ஒருபுறச் சார்பு (injective function) எனவும் அழைக்கப்படும். படம் 1.27, ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பினைக் குறிக்கிறது.



படம் 1.27

(ii) மேல் சார்பு (Onto function)

$f : A \to B$ என்ற சார்பில் B-யிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் A-யில் ஒரு முன்உரு இருப்பின், f ஒரு மேல் சார்பு (onto) எனப்படும். $f(a) = b$ என்பதற்கிணங்க ஒவ்வொரு $b \in B$-க்கும் குறைந்தது ஒரு உறுப்பு $a \in A$ இருப்பின், சார்பு f என்பது மேல் சார்பு எனப்படும். இது f-ன் வீச்சகம் B என்று கூறுவதற்குச் சமம். ஒரு மேல் சார்பை மேல்புறச் சார்பு (surjective function) எனவும் அழைக்கலாம். படம் 1. 28 மேல் சார்பைக் குறிக்கிறது.

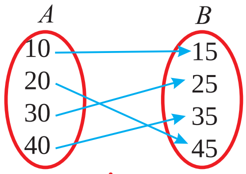


படம் 1.28

(iii) ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு (One-One and onto function)

சார்பு f என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகவும் மற்றும் மேல் சார்பாகவும் இருக்குமேயானால், $f : A \to B$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு அல்லது இருபுறச் சார்பு (bijective function) எனப்படும்.

$f : A \to B$ என்ற சார்பில் A-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகள் B-ன் வெவ்வேறு உறுப்புகளோடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளதாலும், B-யின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் A-யில் உள்ள ஒரு உறுப்பின் நிழல் உருவாக இருப்பதாலும் f ஆனது ஒரு ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பாகும்.



படம் 1.29

குறிப்பு

(i) $f : A \to B$ என்பது ஒரு மேல் சார்பு எனில், எனில் மட்டுமே $B = f$-ன் வீச்சகம் ஆகும்.

(ii) $f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$ எனவும், B-யின் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் A-யில் ஒரே ஒரு முன்உரு இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, $f : A \to B$ என்பது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பாக இருக்கும்.

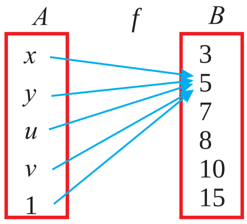
(iii) $f : A \to B$ என்பது இருபுறச் சார்பு மற்றும் A, B ஆகியன முடிவுறு கணங்கள் எனில், A, B களின் ஆதி எண்கள் (கண எண்கள்) சமமாக இருக்கும். படம் 1.29 ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பைக் குறிக்கிறது.

(iv) $f : A \to B$ ஆனது ஒரு இருபுறச் சார்பு எனில், A மற்றும் B என்பன சமான கணங்களாக இருக்கும்.

(v) ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு 'ஒன்றுக்கு ஒன்றான கோர்த்தல்' (one-one correspondence) என்றும் கூறப்படும்.

www.tntextbooks.in

(iv) மாறிலிச் சார்பு (constant function)



படம் 1.30

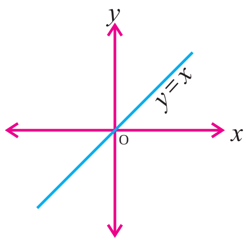
A-யில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் B-யில் உள்ள ஒரே ஒரு உறுப்பினை நிழல் உருவாகக் கொண்டால், $f : A \to B$ என்பது ஒரு மாறிலிச் சார்பு எனப்படும். மாறிலிச் சார்பின் வீச்சகம் ஒருறுப்பு கணம் (singleton set) ஆகும்.

$A = \{ x, y, u, v, 1 \}$, $B = \{ 3, 5, 7, 8, 10, 15\}$ என்க.

சார்பு $f : A \to B$ என்பது ஒவ்வொரு $x \in A$-க்கு $f(x) = 5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

படம் 1.30 ஆனது ஒரு மாறிலிச் சார்பினைக் குறிக்கிறது.

(v) சமனிச் சார்பு (identity function)



படம் 1.31

A ஒரு வெற்றற்ற கணம் என்க. அனைத்து $a \in A$-க்கும் $f(a) = a$ என இருந்தால், $f : A \to A$ என்பது A-ன் சமனிச் சார்பு எனப்படும். அதாவது, சமனிச் சார்பில் A-யிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் அதனுடனேயே தொடர்புப்படுத்தப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \mathbb{R}$ என்க. $x \in \mathbb{R}$-க்கு $f(x) = x$ என வரையறுக்கப்படும் சார்பு $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்பது சமனிச் சார்பாகும். $\mathbb{R}$-ன் மீதான சமனிச் சார்பின் வரைபடத்தை படம் 1.31 குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1.21

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \mathbb{N}$ மற்றும் $f : A \to B$ ஆனது $f(x) = x^2$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது f-ன் வீச்சகத்தைக் காண்க. மேலும், சார்பின் வகையைக் காண்க.

தீர்வு $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$; $B = \{ 1, 2, 3, 4, \cdots \}$

$f : A \to B$ ஆனது $f(x) = x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore\ f(1) = 1^2 = 1$; $f(2) = 4$; $f(3) = 9$; $f(4) = 16$ மற்றும் $f(5) = 25$.

எனவே, f-ன் வீச்சகம் $= \{ 1, 4, 9, 16, 25\}$

வெவ்வேறான உறுப்புகள் வெவ்வேறு நிழல் உருக்களோடு தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளதால், இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆகும். மேலும், $3 \in B$ இருப்பினும் $f(x) = x^2 = 3$ என்பதற்கிணங்க எந்த ஒரு உறுப்பு $x \in A$-ம் இல்லாததால், இது மேல் சார்பு அல்ல.

குறிப்புரை

$g(x) = x^2$ என்றவாறு அமைந்த $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ என்ற சார்பினைக் கருதுக. $u = 1$ மற்றும் $v = -1$ எனில், $u \neq v$. ஆனால் $g(u) = g(1) = 1 = g(-1) = g(v)$. ஆகவே, சார்பு g ஆனது ஒரு ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பல்ல. எனவே, சூத்திரம் மட்டுமே ஒரு ஒன்றுக்கு ஒன்றான அல்லது மேல் சார்பினை உருவாக்காது. ஒரு சார்பினை ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு என தீர்மானிக்க விதி, மதிப்பகம் மற்றும் துணை மதிப்பகம் ஆகியவற்றை கருத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1.22

சார்பு $f:[1,\ 6) \longrightarrow \mathbb{R}$ ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & 1 \leq x < 2 \\ 2x-1, & 2 \leq x < 4 \\ 3x^2-10, & 4 \leq x < 6 \end{cases} \qquad ([1\ ,6) = \{\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 6\}\})$$

(i) $f(5)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(1)$ (iv) $f(2)-f(4)$ (v) $2\,f(5)-3\,f(1)$
ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

(i) $f(5)$-ன் மதிப்பைக் காண்போம். 5 ஆனது 4-க்கும் 6-க்கும் இடையில் உள்ளது.
எனவே, $f(x) = 3x^2 - 10$ இல் $x = 5$ என பிரதியிட வேண்டும்.
ஆகவே, $f(5) = 3(5^2) - 10 = 65$

(ii) $f(3)$-ன் மதிப்பைக்காண்போம். 3 ஆனது 2-க்கும் 4-க்கும் இடையில் உள்ளது.
எனவே, $f(x) = 2x - 1$ இல் $x = 3$ என பிரதியிட வேண்டும்.
ஆகவே, $f(3) = 2(3) - 1 = 5.$

(iii) $f(1)$-ன் மதிப்பைக் காண்போம். 1 ஆனது $1 \leq x < 2$ என்ற இடை வெளியில் உள்ளது.
எனவே, $f(x) = 1 + x$ இல் $x = 1$ என பிரதியிட வேண்டும்.
ஆகவே, $f(1) = 1 + 1 = 2.$

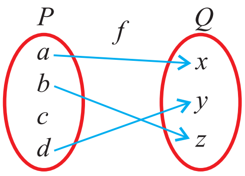
(iv) $2 \leq x < 4$ என்ற இடைவெளியில் $x = 2$ உள்ளது.
எனவே, $f(x) = 2x - 1 \implies f(2) = 2(2) - 1 = 3.$
மேலும், $4 \leq x < 6$ என்ற இடைவெளியில் $x = 4$ உள்ளது.
எனவே, $f(x) = 3x^2 - 10 \implies f(4) = 3(4^2) - 10 = 3(16) - 10 = 48 - 10 = 38$
ஆகவே, $f(2) - f(4) = 3 - 38 = -35.$

(v) $f(5) = 3(5^2) - 10 = 65.$ மேலும், $f(1) = 1 + 1 = 2.$
எனவே, $2\,f(5) - 3\,f(1) = 2(65) - 3(2) = 130 - 6 = 124.$

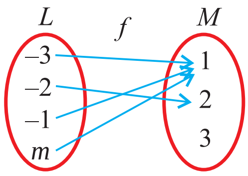
பயிற்சி 1.4

1. பின்வரும் அம்புக்குறிப் படங்கள் சார்பைக் குறிக்கின்றனவா எனக் கூறுக. உன் விடைக்குத் தகுந்த காரணம் கூறுக.

(i)



(ii)



2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள $F = \{\ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1)\ \}$ எனும் சார்பிற்கு, மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. $A = \{ 10, 11, 12, 13, 14 \}$; $B = \{ 0, 1, 2, 3, 5 \}$ மற்றும் $f_i : A \to B$, $i = 1,2,3.$ என்க. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை எவ்வகைச் சார்பினைக் குறிக்கும்? விடைக்கான தகுந்த காரணம் தருக.

(i) $f_1 = \{ (10, 1), (11, 2), (12, 3), (13, 5), (14, 3) \}$

(ii) $f_2 = \{ (10, 1), (11, 1), (12, 1), (13, 1), (14, 1) \}$

(iii) $f_3 = \{ (10, 0), (11, 1), (12, 2), (13, 3), (14, 5) \}$

4. $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ என்க. X-லிருந்து Y-க்கான உறவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றில் எவை சார்பாகும்? உன் விடைக்கான தகுந்த காரணம் தருக. மேலும், அவை சார்பு எனில், எவ்வகைச் சார்பாகும்?

(i) $R_1 = \{ (x, y) | y = x + 2,\ x \in X,\ y \in Y \}$

(ii) $R_2 = \{ (1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 5) \}$

(iii) $R_3 = \{ (1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 7) \}$

(iv) $R_4 = \{ (1, 3), (2, 5), (4, 7), (5, 9), (3, 1) \}$

5. $R = \{(a, -2), (-5, b), (8, c), (d, -1)\}$ என்பது சமனிச் சார்பைக் குறிக்குமெனில், a, b, c மற்றும் d ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

6. $A = \{ -2, -1, 1, 2 \}$ மற்றும் $f = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) : x \in A\right\}$ எனில், f-ன் வீச்சகத்தைக் காண்க. மேலும், f என்பது A-யிலிருந்து A-க்கு ஒரு சார்பாகுமா?

7. $f = \{ (2, 7), (3, 4), (7, 9), (-1, 6), (0, 2), (5, 3) \}$ என்பது

$A = \{ -1, 0, 2, 3, 5, 7 \}$ -யிலிருந்து $B = \{ 2, 3, 4, 6, 7, 9 \}$ -க்கு ஒரு சார்பு என்க. f என்ற சார்பு

(i) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா? (ii) மேல் சார்பாகுமா?

(iii) ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பாகுமா?

8. $f = \{ (12, 2), (13, 3), (15, 3), (14, 2), (17, 17) \}$ என்ற சார்பில் 2 மற்றும் 3 ஆகியவற்றின் முன்உருக்களைக் காண்க.

9. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணை ஆனது, $A = \{ 5, 6, 8, 10 \}$-யிலிருந்து

$B = \{ 19, 15, 9, 11 \}$-க்கு $f(x) = 2x - 1$ என்றவாறு அமைந்த ஒரு சார்பு எனில், a மற்றும் b ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க?

x	5	6	8	10
$f(x)$	a	11	b	19

10. $A = \{ 5, 6, 7, 8 \}$; $B = \{ -11, 4, 7, -10, -7, -9, -13 \}$ என்க.

$f = \{(x, y) : y = 3 - 2x,\ x \in A,\ y \in B \}$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

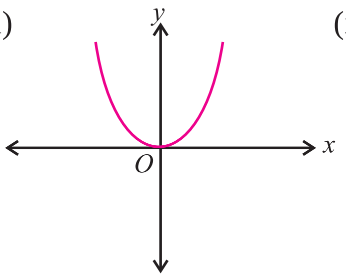
(i) f-ன் உறுப்புகளை எழுதுக (ii) அதன் துணை மதிப்பகம் யாது?

(iii) வீச்சகம் காண்க (iv) எவ்வகைச் சார்பு எனக் காண்க.

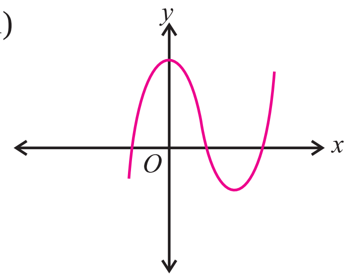
www.tntextbooks.in

11. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வரைபடங்களில் எவை சார்பினைக் குறிக்கின்றன? விடைக்கான தகுந்த காரணம் தருக.

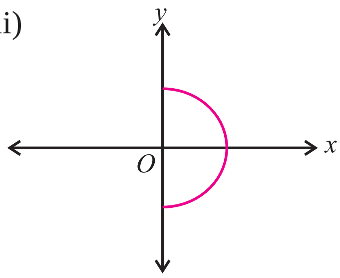
(i)



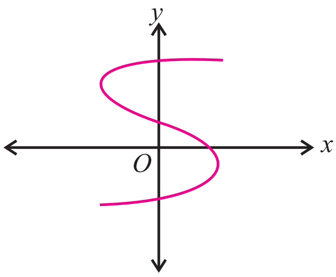
(ii)



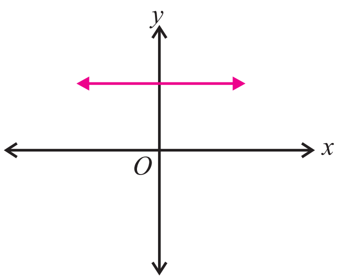
(iii)



(iv)



(v)



12. கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு $f = \{ (-1, 2), (-3, 1), (-5, 6), (-4, 3) \}$ ஐ

(i) அட்டவணை (ii) அம்புக்குறி படம் ஆகியவற்றின் மூலம் குறிக்கவும்.

13. $A = \{ 6, 9, 15, 18, 21 \}$; $B = \{ 1, 2, 4, 5, 6 \}$ மற்றும் $f : A \to B$ என்பது $f(x) = \dfrac{x-3}{3}$ என வரையறுக்கப்பட்டிருப்பின் சார்பு f-ஐ

(i) அம்புக்குறி படம் (ii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

(iii) அட்டவணை (iv) வரைபடம் ஆகியவற்றின் மூலம் குறிக்கவும்.

14. $A = \{4, 6, 8, 10 \}$ மற்றும் $B = \{ 3, 4, 5, 6, 7 \}$ என்க. $f : A \to B$ என்பது $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ என வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. சார்பு f-ஐ

(i) அம்புக்குறி படம் (ii) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (iii) அட்டவணை ஆகியவற்றின் மூலம் குறிக்கவும்.

15. சார்பு $f : [-3, 7) \to \mathbb{R}$ கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1; & -3 \le x < 2 \\ 3x - 2; & 2 \le x \le 4 \\ 2x - 3; & 4 < x < 7 \end{cases}$$

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $f(5) + f(6)$ (ii) $f(1) - f(-3)$

(iii) $f(-2) - f(4)$ (iv) $\dfrac{f(3) + f(-1)}{2f(6) - f(1)}$

www.tntextbooks.in

16. சார்பு $f:[-7,6)\rightarrow\mathbb{R}$ கீழ்க் கண்டவாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1; & -7\le x<-5\\ x+5; & -5\le x\le 2\\ x-1; & 2<x<6\end{cases}$$

பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $2f(-4)+3f(2)$ (ii) $f(-7)-f(-3)$ (iii) $\dfrac{4f(-3)+2f(4)}{f(-6)-3f(1)}$

பயிற்சி 1.5

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. A மற்றும் B, என்பன இரண்டு கணங்கள் என்க. $A\cup B=A$ என்பதற்குத் தேவையான மற்றும் போதுமான கட்டுப்பாடு.

   (A) $B\subseteq A$ (B) $A\subseteq B$ (C) $A\neq B$ (D) $A\cap B=\phi$

2. $A\subset B$ எனில், $A\cap B=$

   (A) B (B) $A\backslash B$ (C) A (D) $B\backslash A$

3. P மற்றும் Q என்பன ஏதேனும் இரண்டு கணங்கள் எனில், $P\cap Q=$

   (A) $\{x: x\in P$ அல்லது $x\in Q\}$ (B) $\{x:x\in P$ மற்றும் $x\notin Q\}$

   (C) $\{x:x\in P$ மற்றும் $x\in Q\}$ (D) $\{x:x\notin P$ மற்றும் $x\in Q\}$

4. $A=\{p,q,r,s\}$, $B=\{r,s,t,u\}$ எனில், $A\backslash B=$

   (A) $\{p,q\}$ (B) $\{t,u\}$ (C) $\{r,s\}$ (D) $\{p,q,r,s\}$

5. $n[p(A)]=64$ எனில், $n(A)=$

   (A) 6 (B) 8 (C) 4 (D) 5

6. A, B மற்றும் C ஆகிய ஏதேனும் மூன்று கணங்களுக்கு, $A\cap(B\cup C)=$

   (A) $(A\cup B)\cup(B\cap C)$ (B) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

   (C) $A\cup(B\cap C)$ (D) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$

7. A, B ஆகிய இரண்டு கணங்களுக்கு, $\{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\}\cap(A\cap B)=$

   (A) ϕ (B) $A\cup B$ (C) $A\cap B$ (D) $A'\cap B'$

8. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவைகளில் தவறான கூற்று எது?

   (A) $A\setminus B=A\cap B'$ (B) $A\setminus B=A\cap B$

   (C) $A\setminus B=(A\cup B)\cap B'$ (D) $A\setminus B=(A\cup B)\setminus B$

9. A, B மற்றும் C ஆகிய மூன்று கணங்களுக்கு $B\setminus(A\cup C)=$

   (A) $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ (B) $(B\setminus A)\cap(B\setminus C)$

   (C) $(B\setminus A)\cap(A\setminus C)$ (D) $(A\setminus B)\cap(B\setminus C)$

10. $n(A) = 20$, $n(B) = 30$ மற்றும் $n(A \cup B) = 40$ எனில், $n(A \cap B) =$

(A) 50 (B) 10 (C) 40 (D) 70

11. $\{ (x, 2), (4, y) \}$ ஒரு சமனிச் சார்பைக் குறிக்கிறது எனில், $(x, y) =$

(A) (2, 4) (B) (4, 2) (C) (2, 2) (D) (4, 4)

12. $\{ (7, 11), (5, a) \}$ ஒரு மாறிலிச்சார்பைக் குறிக்கிறது எனில், 'a'-ன் மதிப்பு

(A) 7 (B) 11 (C) 5 (D) 9

13. $f(x) = (-1)^x$ என்பது $\mathbb{N}$-லிருந்து $\mathbb{Z}$- க்கு வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது. f-ன் வீச்சகம்

(A) $\{ 1\}$ (B) $\mathbb{N}$ (C) $\{ 1, -1 \}$ (D) $\mathbb{Z}$

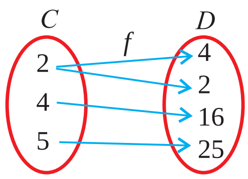
14. $f = \{ (6, 3), (8, 9), (5, 3), (-1, 6) \}$ எனில், 3-ன் முன் உருக்கள்

(A) 5 மற்றும் –1 (B) 6 மற்றும் 8 (C) 8 மற்றும் –1 (D) 6 மற்றும் 5

15. $A = \{ 1, 3, 4, 7, 11 \}$ மற்றும் $B = \{-1, 1, 2, 5, 7, 9 \}$ என்க.
$f = \{ (1, -1), (3, 2), (4, 1), (7, 5), (11, 9) \}$ என்றவாறு அமைந்த சார்பு $f : A \rightarrow B$ என்பது

(A) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (B) மேல் சார்பு
(C) இருபுறச் சார்பு (D) சார்பு அல்ல

16. கொடுக்கப்பட்டுள்ள படம் குறிக்கும் சார்பு, ஒரு



(A) மேல் சார்பு (B) மாறிலிச் சார்பு

(C) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (D) சார்பு அல்ல

17. $A = \{ 5, 6, 7 \}, B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ என்க. $f(x) = x - 2$ என்றவாறு வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பு $f : A \rightarrow B$இன் வீச்சகம்,

(A) $\{ 1, 4, 5 \}$ (B) $\{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ (C) $\{ 2, 3, 4 \}$ (D) $\{ 3, 4, 5 \}$

18. $f(x) = x^2 + 5$ எனில், $f(-4) =$

(A) 26 (B) 21 (C) 20 (D) –20

19. ஒரு சார்பின் வீச்சகம் ஓருறுப்புக் கணமானால், அது ஒரு

(A) மாறிலிச் சார்பு (B) சமனிச் சார்பு

(C) இருபுறச் சார்பு (D) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு

20. $f : A \rightarrow B$ ஒரு இருபுறச் சார்பு மற்றும் $n(A) = 5$ எனில், $n(B) =$

(A) 10 (B) 4 (C) 5 (D) 25

www.tntextbooks.in

நினைவில் கொள்க

கணங்கள்

- கணம் என்பது நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட பொருட்களின் தொகுப்பாகும்.
  - கணங்களின் சேர்ப்பு, பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.
  - கணங்களின் வெட்டு, பரிமாற்றுப் பண்பு மற்றும் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.
  - கணங்களின் வித்தியாசம் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதல்ல.
  - கணங்கள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டாக் கணங்களாயிருப்பின் அவற்றின் வித்தியாசம் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது.
- பங்கீட்டு விதிகள்
  - $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
  - $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- கண வித்தியாசத்திற்கான டி மார்கனின் விதிகள்
  - $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$
  - $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$
- கண நிரப்பிக்கான டி மார்கனின் விதிகள்
  - $(A\cup B)'=A'\cap B'$
  - $(A\cap B)'=A'\cup B'$
- கணங்களின் சேர்ப்பின் கண எண்ணைக் (ஆதி எண்) கண்டறியும் சூத்திரங்கள்
  - $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
  - $n(A\cup B\cup C)$
    $= n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

சார்புகள்

- A, B என்னும் இரு கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கற்பலன்
  $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$ என வரையறுக்கப்படும்.
- A-யிலிருந்து B-க்கு உறவு R என்பது $A\times B$-ன் வெற்றற்ற ஒரு உட்கணம் ஆகும். அதாவது, $R\subseteq A\times B$.
- $f:X\to Y$ என்ற சார்பு கீழ்க் காணும் நிபந்தனைகளின் படி வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது:
  ஒவ்வொரு $x\in X$ ம் ஒரேயொரு $y=f(x)\in Y$ உடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது.
- ஒவ்வொரு சார்பினையும் ஒரு வரைபடத்தின் மூலம் குறிக்கலாம். ஆயினும், பொதுவாக இதன் மறுதலை மெய்யாகாது.

- ஒவ்வொரு குத்துக்கோடும் வரைபடத்தை அதிகபட்சம் ஒரு புள்ளியில் வெட்டினால் அவ்வரைபடம் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கும்.
- (i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்
  (ii) அம்புக்குறிப் படம்
  (iii) அட்டவணை
  (iv) வரைபடம்
  ஆகியவற்றால் ஒரு சார்பினைக் குறிக்கலாம்.
- சார்பு $y = |x|$ எனும் மட்டுச் சார்பு அல்லது அறச் சார்பு என்பதின் வரையறை :

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ எனும்போது} \\ -x, & x < 0 \text{ எனும்போது} \end{cases}$$

- சார்புகளின் வகைகள் பின்வருமாறு
  - ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு (வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு வெவ்வேறு நிழல் உருக்கள்).
  - மேல் சார்பு (f-ன் வீச்சகம் = f-ன் துணை மதிப்பகம்)
  - இருபுறச் சார்பு (ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு)
  - மாறிலிச் சார்பு (f-ன் வீச்சகம் ஓருறுப்புக்கணம்)
  - சமனிச் சார்பு (ஒவ்வொரு உறுப்பின் நிழல்உரு அதே உறுப்பாகும்)

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

'மில்லினியம் பரிசு கணக்குகள்' (Millennium Prize problems) என்பன அமெரிக்காவில் உள்ள 'கிளே கணித நிறுவனம்' (Clay Mathematics Institute) 2000 ஆம் ஆண்டில் அறிவித்த ஏழு கணக்குகளாகும். ஆகஸ்ட் 2010 வரை ஆறு கணக்குகள் தீர்வு காணப்படாமல் உள்ளன. ஒரு கணக்கின் சரியானத் தீர்வுக்கு 1000,000 அமெரிக்க டாலர்கள், அந்நிறுவனத்தால் பரிசுத் தொகையாக அறிவிக்கப்பட்டுள்ளது. அந்த ஏழு கணக்குகளில் 'பாய்ன்கேர் கன்ஜெக்ச்சர்' (Poincare conjecture) என்பது மட்டுமே ரஷ்ய கணித மேதை கிரிகோரி பெரில்மேன் (Girigori Perelman) என்பவரால் 2010-ல் தீர்க்கப்பட்டது. ஆயினும், அதற்குரிய பரிசினைப் பெற அவர் மறுத்து விட்டார்.

(மெய் அல்லது மெய்யல்ல என நிரூபிக்கப்பட வேண்டிய கணிதக் கூற்றினை கன்ஜெக்ச்சர் (conjecture) என்போம்)

www.tntextbooks.in

2

மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகளும் தொடர்களும்

Mathematics is the Queen of Sciences, and arithmetic is the Queen of Mathematics - C.F.Gauss

- அறிமுகம்
- தொடர்வரிசைகள்
- கூட்டுத் தொடர்வரிசை (A.P.)
- பெருக்குத் தொடர்வரிசை (G.P.)
- தொடர்கள்

லியோநார்டோ பிசானோ (பிபோனாகி)
Leonardo Pisano (Fibonacci)
(1170-1250)
இத்தாலி

பண்டைக்காலக் கணிதத்திற்கு புத்துயிரூட்டுவதில் பிபோனாகி முக்கியப் பங்காற்றினார். அவருடைய பெயர் நவீன கணித வல்லுநர்களுக்கு, முக்கியமாக பிபோனாகியின் பெயரால் அழைக்கப்பட்ட எண்களில் அமைந்த தொடர்வரிசையின் காரணமாக அறிமுகமாயிற்று. பிபோனாகி எண்களை அவர் புதியதாக கண்டறியவில்லை. ஆனால் அவற்றை ஒரு தொடர் வரிசையின் உதாரணமாகப் பயன்படுத்தினார்.

2.1 அறிமுகம்

இப்பாடத்தில் மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகளைப் பற்றியும், தொடர்களைப் பற்றியும் கற்போம். தொடர்வரிசை என்பது நீண்ட வரலாறு கொண்ட அடிப்படைக் கணிதக் கருத்தாகும். மேலும், தொடர்வரிசைகள் பிற கணிதக் கருத்துக்களை மேம்படுத்துவதற்கும் இயல்பான வாழ்க்கைச் சூழ்நிலைகளை கணிதமயமாக்குவதற்கும் பயன்படும் கருவியாக அமைகின்றன.

$\mathbb{N}$ மற்றும் $\mathbb{R}$ என்பன முறையே அனைத்து மிகை முழுக்களையும் மற்றும் மெய்யெண்களையும் குறிக்கும் என்பதை நினைவுக் கூறுவோம்.

பின்வரும் நடைமுறை நிகழ்வுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(i) இஸ்ரோ (ISRO) விஞ்ஞானிகள், சம கால இடைவெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்கு கடல் மட்டத்திலிருந்து செயற்கைக் கோளின் உயரத்தைக் கண்காணித்து பதிவு செய்தனர்.

(ii) இரயில்வே அமைச்சகம், சென்னை மத்திய தொடர் வண்டி நிலையத்தை தினசரி எத்தனை பேர் பயன்படுத்துகின்றனர் என்பதை அறிய விரும்பியது. ஆகவே, மத்திய தொடர்வண்டி நிலையத்திற்கு நாள்தோறும் வருவோரின் எண்ணிக்கையை தொடர்ந்து 180 நாட்களுக்கு பதிவு செய்தது.

(iii) 9 ஆம் வகுப்பில் பயிலும் ஆர்வமுள்ள ஒரு மாணவன் $\sqrt{5} = 2.236067978\cdots$ என்ற விகிதமுறா எண்ணின் தசமப் பகுதியில் உள்ள தசம எண்களை அறிய விரும்பி பின்வருமாறு எழுதினான் : $2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 7, 8, \cdots$.

(iv) 1-ஐத் தொகுதியாகக் கொண்ட அனைத்து மிகை பின்னங்களையும் ஒரு மாணவன் கண்டறிய விரும்பி பின்வருமாறு எழுதினான் : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$.

(v) ஒரு கணித ஆசிரியை, தன் வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் பெயர்களை அகர வரிசையில் எழுதி, அவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களை பின்வருமாறு எழுதினார் :
75, 95, 67, 35, 58, 47, 100, 89, 85, 60.

(vi) அதே ஆசிரியை, அதே மதிப்பெண்களின் விவரத்தை பின்வருமாறு ஏறுவரிசையில் எழுதினார் :

35, 47, 58, 60, 67, 75, 85, 89, 95, 100.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகள் ஒவ்வொன்றின் தொகுப்பிலுள்ள மெய்யெண்களை குறிப்பிட்ட வரிசைப்படி பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

இந்த வரிசைஅமைப்புகளில் (iii) மற்றும் (iv)-களில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் உள்ளன. (i) (ii), (v) மற்றும் (vi)-களில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் உள்ளன. ஆனால், (v) மற்றும் (vi)-களில் ஒரே தொகுப்பிலுள்ள எண்கள் மாறுபட்ட வரிசையில் உள்ளன.

2.2 தொடர்வரிசைகள் (Sequences)

வரையறை

மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை என்பது, குறிப்பிட்ட வரிசையில் அமைக்கப்பட்ட அல்லது பட்டியலிடப்பட்ட மெய்யெண்களின் வரிசையாகும்.

(i) ஒரு தொடர்வரிசை முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அது முடிவுறு தொடர்வரிசை (finite sequence) எனப்படும்.

(ii) ஒரு தொடர்வரிசையில் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின், அது முடிவுறாத் தொடர்வரிசை (infinite sequence) எனப்படும்.

முடிவுறு தொடர்வரிசையை $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ அல்லது $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ எனவும், முடிவுறாத் தொடர்வரிசையை $S : a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ அல்லது $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ எனவும் குறிப்போம். இங்கு a_k என்பது தொடர்வரிசையின் k-ஆவது உறுப்பைக் குறிக்கும். எடுத்துக்காட்டாக, தொடர்வரிசையில் a_1 என்பது முதல் உறுப்பு எனவும் a_7 என்பது 7 ஆம் உறுப்பு எனவும் குறிப்பிடப்படும்.

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளில் (i), (ii), (v) மற்றும் (vi) என்பன முடிவுறு தொடர்வரிசைகளாகும். ஆனால், (iii) மற்றும் (iv) ஆகியவற்றில் உள்ள தொடர்வரிசைகள் முடிவுறாத் தொடர்வரிசைகளாகும்.

எண்களின் தொகுப்பைத் தொடர்வரிசையாக அமைத்தால், அத்தொடர்வரிசை தெளிவான முதல் உறுப்பு, இரண்டாம் உறுப்பு, மூன்றாம் உறுப்பு, எனத் தொடர்ச்சியாக பிற உறுப்புக்களையும் கொண்டிருக்கும். முன்பே தொடர்வரிசைக்கு சில எடுத்துக்காட்டுக்களைக் கண்டோம். மேலும், பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

(i) $2, 4, 6, 8, \cdots, 2010.$ (முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள்)

(ii) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots.$ (1 மற்றும் -1 ஆகியவற்றிற்கு இடையில் உறுப்புகள் ஊசலாடுகின்றன)

(iii) $\pi, \pi, \pi, \pi, \pi.$ (உறுப்புகள் ஒத்துள்ளன எனவே இது மாறிலித் தொடர்வரிசை)

(iv) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \cdots .$ (பகா எண்களின் பட்டியல்)

(v) $0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.33333, \cdots .$ (முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள்)

(vi) $S = \{a_n\}_1^{\infty}$, இங்கு நாணயத்தை தொடர்ந்து சுண்டும் போது n-ஆவது விளைவில் தலை அல்லது பூ கிடைத்தால் a_n -ன் மதிப்பு முறையே 1 அல்லது 0 ஆகும்.

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில் (i) மற்றும் (iii) என்பன முடிவுறு தொடர்வரிசைகள் மற்றவை முடிவுறாத் தொடர்வரிசைகள் ஆகும். (i)-லிருந்து (v) வரையிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகளில்

உள்ள தொடர்வரிசைகளில் உறுப்புகள் ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்பு அல்லது விதியின் படி வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. எனவே, அத்தகைய தொடர்வரிசைகளில் குறிப்பிட்ட நிலையில் உறுப்புகளைக் கண்டறியலாம். ஆனால், (vi)-ல் உள்ள தொடர்வரிசையில் குறிப்பிட்ட நிலையில் உள்ள உறுப்பினைத் தீர்மானிக்க இயலாது. அது 1 அல்லது 0 ஆக இருக்கும். இங்கு 'அமைப்பு' என்னும் சொல்லை, ஒரு தொடர்வரிசையில் n-ஆவது உறுப்பை அதன் முந்தைய உறுப்புகள் அமைந்துள்ள வகையைக் கொண்டு அறிதல் என்னும் பொருளில் பயன்படுத்துகிறோம். பொதுவாக தொடர்வரிசைகளை சார்புகளாகவும் கருதலாம்.

2.2.1 தொடர்வரிசைகளை சார்புகளாக அறிதல் (Sequences viewed as functions)

மெய்யெண்களாலான ஒரு முடிவுறு தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ அல்லது $S = \{a_j\}_{j=1}^{n}$ என்பதை $f(k) = a_k,\ k = 1, 2, 3, \cdots, n$ என வரையறுக்கப்பட்ட $f : \{1, 2, 3, 4, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பாகக் கருதலாம்.

மெய்யெண்களாலான ஒரு முடிவுறாத் தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ அல்லது $S = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ஐ $g(k) = a_k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ என வரையறுக்கப்பட்ட $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பாகக் கருதலாம்.

இங்கு '$\forall$' என்ற குறியீடு "எல்லாவற்றிற்குமாக" (for all) எனப் பொருள்படும். தொடர்வரிசை $\{a_k\}_1^{\infty}$-ன் பொது உறுப்பு a_k தரப்பட்டால், தொடர்வரிசையை முழுமையாக அமைக்க முடியும். ஆகவே, தொடர்வரிசை என்பது ஒரு சார்பு ஆகும். அதன் மதிப்பகம் இயல் எண்களின் கணம் $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots,\}$ ஆகவோ அல்லது இயல் எண்களின் சில உட்கணங்களாகவோ இருக்கும். அதன் வீச்சகம் மெய்யெண்களின் ஒரு உட்கணமாக இருக்கும்.

குறிப்புரை

சார்பானது ஒரு தொடர்வரிசையாக இருக்க வேண்டிய அவசியம் இல்லை. எடுத்துக்காட்டாக, சார்பு $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ஆனது $f(x) = 2x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ என அமையுமானால், அது ஒரு தொடர்வரிசையாகாது. ஏனெனில், இச்சார்பின் வீச்சகத்தின் உறுப்புகளை தொடர்வரிசையில் அமைக்க முடியாது. மேலும், இச்சார்பின் மதிப்பகம் ஆனது இயல் எண்களின் கணம் $\mathbb{N}$ ஆகவோ அல்லது இயல் எண்களின் உட்கணம் $\{1, 2, \cdots, n\}$ ஆகவோ அமையப் பெறவில்லை என்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.1

n-ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ள பின்வரும் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

$$c_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

தீர்வு இங்கு, $c_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

$n = 1$ எனில், $c_1 = \dfrac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1.$

$n = 2$ எனில், $c_2 = \dfrac{2(2+1)(4+1)}{6} = \dfrac{2(3)(5)}{6} = 5.$

$n = 3$ எனில், $c_3 = \dfrac{3(3+1)(7)}{6} = \dfrac{(3)(4)(7)}{6} = 14.$

எனவே, தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் முறையே 1, 5 மற்றும் 14.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டில், பொது உறுப்பின் சூத்திரம் நமக்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே, எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட உறுப்பையும் நேரடியாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில், மற்றொரு முறையில் தொடர்வரிசை அமைத்தலைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.2

பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளை காண்க.

(i) $a_1 = -1,\quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1$ மற்றும் $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n = 3, 4, \cdots.$

தீர்வு

(i) $a_1 = -1$ மற்றும் $a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2},\quad n > 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே,
$$a_2 = \frac{a_1}{2+2} = -\frac{1}{4}$$
$$a_3 = \frac{a_2}{3+2} = \frac{-\frac{1}{4}}{5} = -\frac{1}{20}$$
$$a_4 = \frac{a_3}{4+2} = \frac{-\frac{1}{20}}{6} = -\frac{1}{120}$$
$$a_5 = \frac{a_4}{5+2} = \frac{-\frac{1}{120}}{7} = -\frac{1}{840}$$

$\therefore$ தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகள் $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{120}$ மற்றும் $-\frac{1}{840}$.

(ii) $F_1 = F_2 = 1$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n = 3, 4, 5, \cdots$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இப்பொழுது,
$$F_1 = 1, F_2 = 1$$
$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$\therefore$ இத்தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகள் முறையே 1, 1, 2, 3, 5.

குறிப்புரை

$F_1 = F_2 = 1$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\quad n = 3, 4, \cdots$ என்பதிலிருந்து பெறப்படும் தொடர்வரிசை பிபோனாகி (Fibonacci sequence) தொடர்வரிசை எனப்படும். இதன் உறுப்புகள் 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, $\cdots$. சூரியகாந்திப் பூவில் உள்ள விதைகளின் அமைப்புபோன்று பிபோனாகி தொடர்வரிசை இயற்கையில் காணப்படுகிறது.

சூரியகாந்திப் பூவில் விதைகள் சுருள் சுருளாக எதிர் எதிர் திசைகளில் அமைந்துள்ளன. அந்தச் சுருள்களின் எண்ணிக்கை பிபோனாகி தொடர்வரிசையில் உள்ள அடுத்தடுத்த எண்களைக் குறிக்கிறது.

பயிற்சி 2.1

1. n-ஆவது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்ட பின்வரும் தொடர்வரிசை ஒவ்வொன்றிலும் முதல் மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = \frac{n(n-2)}{3}$ (ii) $c_n = (-1)^n 3^{n+2}$ (iii) $z_n = \frac{(-1)^n n(n+2)}{4}$

2. ஒவ்வொரு தொடர்வரிசையின் n-ஆவது உறுப்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவை ஒவ்வொன்றிலும் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = \dfrac{n+2}{2n+3}$; a_7, a_9 (ii) $a_n = (-1)^n 2^{n+3}(n+1)$; a_5, a_8

(iii) $a_n = 2n^2 - 3n + 1$; a_5, a_7. (iv) $a_n = (-1)^n(1 - n + n^2)$; a_5, a_8

3. $a_n = \begin{cases} n(n+3), & n \in \mathbb{N} \text{ மற்றும் } n \text{ இரட்டைப்படை எண் எனும்போது} \\ \dfrac{2n}{n^2+1}, & n \in \mathbb{N} \text{ மற்றும் } n \text{ ஒற்றைப்படை எண் எனும்போது} \end{cases}$

என வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையின் 18- வது மற்றும் 25-வது உறுப்புகளைக் காண்க.

4. $b_n = \begin{cases} n^2, & n \in \mathbb{N} \text{ மற்றும் } n \text{ இரட்டைப்படை எண் எனும்போது} \\ n(n+2), & n \in \mathbb{N} \text{ மற்றும் } n \text{ ஒற்றைப்படை எண் எனும்போது} \end{cases}$

என வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையின் 13 ஆவது மற்றும் 16ஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

5. $a_1 = 2,\ a_2 = 3 + a_1$ மற்றும் $a_n = 2a_{n-1} + 5,\ \ n > 2$, எனக்கொண்டத்தொடர்வரிசையின் முதல் 5 உறுப்புகளைக் காண்க.

6. $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ மற்றும் $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ \ n > 3$, எனக் கொண்டத் தொடர்வரிசையின் முதல் 6 உறுப்புகளைக் காண்க.

2.3 கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்லது கூட்டு விருத்தி
(Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression, A.P.)

இப்பகுதியில் சில சிறப்புத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்போம்.

வரையறை

$a_{n+1} = a_n + d,\ \ n \in \mathbb{N}$ மற்றும் d ஒரு மாறிலியாக இருப்பின், தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ஐ ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என்போம். இங்கு a_1 என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் மாறிலி d என்பது பொது வித்தியாசம் என்றும் கூட்டுத் தொடர்வரிசையை கூட்டு விருத்தி எனவும் அழைப்பர். இதனைச் சுருக்கமாக A.P. எனவும் குறிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(i) $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை. இங்கு, $a_1 = 2$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 3$ ஒரு மாறிலி.

(ii) $-4, -4, -4, -4, \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை.
இங்கு, $a_1 = -4$ மற்றும் $d = 0$ ஒரு மாறிலி.

(iii) $2,\ 1.5,\ 1,\ 0.5,\ 0,\ -0.5,\ -1.0,\ -1.5, \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை.
இங்கு, $a_1 = 2$ மற்றும் $d = -0.5$ ஒரு மாறிலி.

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவம் (General form of an Arithmetic Progression)

கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவத்தை அறிந்து கொள்வோம். ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ -ன் முதல் உறுப்பை a எனவும் பொது வித்தியாசத்தை d எனவும் எடுத்துக் கொள்க.

எனவே, $a_1 = a,\ \ a_{n+1} = a_n + d\ ,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

ஆகவே, $n = 1, 2, 3$ எனில்,

$$a_2 = a_1 + d = a + d = a + (2-1)d$$
$$a_3 = a_2 + d = (a+d) + d = a + 2d = a + (3-1)d$$
$$a_4 = a_3 + d = (a+2d) + d = a + 3d = a + (4-1)d$$

இம்முறையைத் தொடர, n-ஆவது உறுப்பினை பின்வருமாறு காணலாம்.

$$a_n = a_{n-1} + d = [a + (n-2)d] + d = a + (n-1)d.$$

எனவே, ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$-க்கும் $a_n = a + (n-1)d$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே, ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்லது கூட்டு விருத்தி (A.P.)

$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots,\ a+(n-1)d,\ a+nd, \cdots$ என அமையும்.

மேலும், ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பிற்கான சூத்திரம்

$$t_n = a + (n-1)d\ ,\quad \forall n \in \mathbb{N}\ .$$

குறிப்பு

(i) ஒரு தொடர்வரிசை முடிவுறு தொடர்வரிசையாகவும் இருக்கலாம். கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் n உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளது எனில், கடைசி உறுப்பு $l = a + (n-1)d$ ஆகும்.

(ii) $l = a + (n-1)d$ என்பதை $n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$ எனவும் எழுதலாம். முதல் உறுப்பு, கடைசி உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் ஆகியனக் கொடுக்கப்பட்டால் கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கண்டறிய இச்சூத்திரம் பயன்படும்.

(iii) ஒரு A.P.-ன் தொடர்ச்சியான 3 உறுப்புகளை $m-d,\ m,\ m+d$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு பொது வித்தியாசம் d ஆகும்.

(iv) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான 4 உறுப்புகளை $m-3d,\ m-d,\ m+d,\ m+3d$ எனக் கொள்ளலாம். இங்கு பொது வித்தியாசம் $2d$.

(v) கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்புடனும் ஒரே மாறிலியைக் கூட்டினாலும் கழித்தாலும் அத்தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகவே இருக்கும்.

(vi) கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலும்,வகுத்தாலும் அத்தொடர்வரிசை கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகவே இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.3

பின்வருவனவற்றுள் எவைக் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் (A.P.) உள்ளது?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \cdots$. (ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$.

தீர்வு

(i) $n \in \mathbb{N}$, t_n கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையின் n ஆவது உறுப்பு என்க.

$$\therefore \quad t_1 = \frac{2}{3},\ t_2 = \frac{4}{5},\ t_3 = \frac{6}{7}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

$$t_3 - t_2 = \frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30-28}{35} = \frac{2}{35}$$

இங்கு, $t_2 - t_1 \neq t_3 - t_2$.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை அல்ல. அதாவது, A.P. அல்ல.

www.tntextbooks.in

(ii) $3m-1, 3m-3, 3m-5, \cdots$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசையாகும்.

இங்கு, $t_1 = 3m-1,\ t_2 = 3m-3,\ t_3 = 3m-5, \cdots$.

$\therefore$ $t_2 - t_1 = (3m-3)-(3m-1) = -2$

$t_3 - t_2 = (3m-5)-(3m-3) = -2$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டத் தொடர்வரிசையானது $3m-1$ முதல் உறுப்பாகவும் மற்றும் பொது வித்தியாசம் -2 ஆகவும் கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.4

பின்வரும் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசத்தைக் காண்க.

(i) $5, 2, -1, -4, \cdots$. (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{17}{6}$

தீர்வு

(i) முதல் உறுப்பு $a = 5$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = 2-5 = -3$.

(ii) $a = \frac{1}{2}$ மற்றும் பொது வித்தியாசம் $d = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$.

எடுத்துக்காட்டு 2.5

$20, 19\frac{1}{4}, 18\frac{1}{2}, \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உறுப்பு t_n ஒரு குறை எண்ணாக அமைய n-ன் மிகச்சிறிய மிகை முழு மதிப்பு யாது ?

தீர்வு இங்கு, $a = 20,\ d = 19\frac{1}{4} - 20 = -\frac{3}{4}$.

$t_n < 0$ என்று அமையுமாறு n-ன் மீச்சிறு மிகை முழு மதிப்பைக் காண்பதானது,

மிகச்சிறிய $n \in \mathbb{N}$-ற்கு $a + (n-1)d < 0$-ஐத் தீர்ப்பதற்கு ஒப்பாகும்.

ஆகவே, மிகச்சிறிய $n \in \mathbb{N}$-ற்கு $20 + (n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$.

$$(n-1)\left(-\frac{3}{4}\right) < -20 \implies (n-1)\times\frac{3}{4} > 20$$

(அசமன்பாட்டினை இருபுறமும் -1 ஆல் பெருக்க)

$$\therefore \quad n-1 > 20\times\frac{4}{3} = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}.$$

ஆகவே, $n > 26\frac{2}{3} + 1$. அதாவது, $n > 27\frac{2}{3} = 27.66$

எனவே, இந்த அசமன்பாட்டினை நிறைவுச் செய்யும் மிகச்சிறிய மிகை முழு $n = 28$.

$\therefore$ கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் குறை எண் கொண்ட உறுப்பு, 28 ஆவது உறுப்பு (t_{28}) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.6

ஒரு பூந்தோட்டத்தில் முதல் வரிசையில் 23 ரோஜாச் செடிகள், இரண்டாம் வரிசையில் 21 ரோஜாச் செடிகள் மூன்றாம் வரிசையில் 19 ரோஜாச் செடிகள் என்ற முறையில் ரோஜாச் செடிகள் ஒரு தொடர்வரிசைஅமைப்பில் உள்ளன. கடைசி வரிசையில் 5 ரோஜாச் செடிகள் இருப்பின், அப்பூந்தோட்டத்தில் எத்தனை வரிசைகள் உள்ளன?

www.tntextbooks.in

தீர்வு பூந்தோட்டத்தில் உள்ள வரிசைகளின் (நிரைகள்) எண்ணிக்கை n என்க.

$1, 2, 3, \cdots, n$-ஆவது வரிசைகளில் உள்ள ரோஜாச் செடிகளின் எண்ணிக்கை முறையே $23, 21, 19, \cdots, 5$ ஆகும்.

இங்கு, $t_k - t_{k-1} = -2 \quad (k = 2, \cdots, n)$

எனவே, $23, 21, 19, \cdots, 5$ ஆகிய எண்கள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் (A.P.)அமைந்துள்ளன.

மேலும், $a = 23, \quad d = -2, \; l = 5$ என்பதால்,

$$\therefore \; n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{5-23}{-2} + 1 = 10.$$

எனவே, அப்பூந்தோட்டத்தில் 10 வரிசைகளில் ரோஜா செடிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 2.7

2010-ல் ஒருவர் ஆண்டு ஊதியம் ₹ 30,000 எனப் பணியில் சேருகிறார். மேலும் ஒவ்வொரு வருடமும் ₹600-ஐ ஆண்டு ஊதிய உயர்வாகப் பெறுகிறார். அவருடைய ஆண்டு ஊதியம் எந்த வருடத்தில் ₹39,000-ஆக இருக்கும் ?

தீர்வு n ஆவது வருடத்தில் அவருடைய ஆண்டு ஊதியம் ₹39,000 ஆக இருக்கும் எனக் கொள்க.

$2010, 2011, 2012, \cdots, [2010 + (n-1)]$ ஆகிய வருடங்களில் அவருடைய ஆண்டு ஊதியம் முறையே ₹30,000, ₹30,600, ₹31,200, $\cdots$, ₹39000.

ஆண்டு ஊதியங்களின் தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கிறது.

ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 100 ஆல் வகுக்க $300, 306, 312, \cdots, 390$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசை கிடைக்கிறது.

எனவே, $a = 300, \; d = 6, \; l = 390.$

$$n = \frac{l-a}{d} + 1$$

$$= \frac{390-300}{6} + 1 = \frac{90}{6} + 1 = 16$$

எனவே, 16 ஆவது ஆண்டில் ஊதியம் ₹ 39,000 ஆகும்.

ஆண்டு ஊதியம் ₹ 39,000-ஐ 2025-ஆம் ஆண்டு பெறுவார்.

எடுத்துக்காட்டு 2.8

மூன்று எண்களின் விகிதம் $2 : 5 : 7$ என்க. முதலாம் எண், இரண்டாம் எண்ணிலிருந்து 7-ஐக் கழித்துப் பெறப்படும் எண் மற்றும் மூன்றாம் எண் ஆகியன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை ஏற்படுத்தினால், அவ்வெண்களைக் காண்க.

தீர்வு அவ்வெண்களை $2x, 5x$ மற்றும் $7x$ என்க. $(x \neq 0)$

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் படி $2x, 5x-7, 7x$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

$\therefore \; (5x-7) - 2x = 7x - (5x-7) \implies 3x - 7 = 2x + 7 \implies x = 14.$

தேவையான அவ்வெண்கள் 28, 70, 98 ஆகும்.

www.tntextbooks.in

பயிற்சி 2.2

1. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 6 மற்றும் பொது வித்தியாசம் 5 எனில், அத்தொடர்வரிசையும், அதன் பொது உறுப்பையும் காண்க.

2. 125, 120, 115, 110, $\cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது வித்தியாசத்தையும் 15 ஆவது உறுப்பையும் காண்க.

3. $24, 23\frac{1}{4}, 22\frac{1}{2}, 21\frac{3}{4}, \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 3 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு ஆகும்?

4. $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 12 ஆவது உறுப்பு யாது ?

5. 4, 9, 14, $\cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 17 ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

6. பின்வரும் கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள மொத்த உறுப்புகளைக் காண்க.

   (i) $-1, -\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, \cdots, \frac{10}{3}$.   (ii) 7, 13, 19, $\cdots$, 205.

7. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 9 ஆவது உறுப்பு பூச்சியம் எனில், 19 ஆவது உறுப்பின் இருமடங்கு 29 ஆவது உறுப்பு என நிரூபி.

8. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் 10 மற்றும் 18 ஆவது உறுப்புகள் முறையே 41 மற்றும் 73 எனில், 27 ஆவது உறுப்பைக் காண்க.

9. 1, 7, 13, 19,$\cdots$ மற்றும் 100, 95, 90, $\cdots$ ஆகிய கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் n ஆவது உறுப்பு சமமெனில், n-ன் மதிப்பைக் காண்க.

10. 13ஆல் வகுபடும் ஈரிலக்க மிகை முழு எண்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

11. ஒரு தொலைக்காட்சிப் பெட்டித் தயாரிப்பாளர் ஏழாவது ஆண்டில் 1000 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளையும், பத்தாவது ஆண்டில் 1450 தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளையும் தயாரித்தார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் தயாரிக்கும் தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை சீராகவும் ஒரு மாறிலி எண் அளவும் அதிகரித்தால், முதலாம் ஆண்டிலும், 15 ஆவது ஆண்டிலும் தயாரிக்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

12. ஒருவர், முதல் மாதம் ₹640, 2ஆம் மாதம் ₹720, 3ஆம் மாதம் ₹800-ஐ சேமிக்கிறார். அவர் தன்னுடைய சேமிப்பை இதே தொடர்வரிசையில் தொடர்ந்தால், 25ஆவது மாதம் அவர் சேமிக்கும் தொகையைக் காண்க.

13. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 6 மற்றும் அவற்றின் பெருக்குத் தொகை –120 எனில், அம்மூன்று எண்களைக் காண்க.

14. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 18 மற்றும் அவ்வுறுப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 140 எனில், அம்மூன்று எண்களைக் காண்க.

15. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் m-ஆவது உறுப்பின் m மடங்கு அதன் n-ஆவது உறுப்பின் n மடங்குக்குச் சமமெனில், அக்கூட்டுத் தொடவரிசையின் $(m+n)$-ஆவது உறுப்பு பூச்சியம் எனக்காட்டுக.

16. ஒருவர் வருடத்திற்கு தனிவட்டி 14% தரும் முதலீட்டில் ₹25,000-ஐ முதலீடு செய்தார். ஒவ்வொரு வருட முடிவிலும் கிடைக்கும் அசல் மற்றும் தனிவட்டி சேர்ந்த மொத்தத் தொகை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்குமா? அவ்வாறெனில், 20 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு முதலீட்டில் உள்ள தொகையைக் காண்க.

17. a, b, c ஆகியன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருப்பின் $(a-c)^2 = 4(b^2 - ac)$ என நிறுவுக.

18. a, b, c ஆகியன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருப்பின் $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$ ஆகியன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருக்கும் என நிறுவுக.

19. a^2, b^2, c^2 ஆகியன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருப்பின் $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ஆகியனவும் கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் இருக்கும் எனக்காட்டுக.

20. $a^x = b^y = c^z$, $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ மற்றும் $b^2 = ac$ எனில், $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ஆகியன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

2.4 பெருக்குத் தொடர்வரிசை அல்லது பெருக்கு விருத்தி
(Geometric Sequence or Geometric Progression, G.P.)

வரையறை

$n \in \mathbb{N}$-க்கு $a_{n+1} = a_n r$ (இங்கு r என்பது ஒரு பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலி) என அமைந்த தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை **(Geometric Sequence)** எனப்படும். ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையை பெருக்கு விருத்தி **(Geometric Progression)** எனவும் கூறலாம். இங்கு, a_1 என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் r என்பது பொது விகிதம் **(common ratio)** எனப்படும்.

பெருக்குத் தொடர்வரிசைக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளை இங்குக் காண்போம்.

(i) $3, 6, 12, 24, \cdots$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \neq 0, \ n \in \mathbb{N}$ என்றவாறு அமைந்த

தொடர் வரிசை $\{a_n\}_1^\infty$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

இங்கு, $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2 \neq 0$ என்பதால் $3, 6, 12, 24, \cdots$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

(ii) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \cdots$.

இங்கு, $\frac{-\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{81}}{-\frac{1}{27}} = \frac{-\frac{1}{243}}{\frac{1}{81}} = -\frac{1}{3} \neq 0.$

எனவே, கொடுக்கப்பட்டத் தொடர்வரிசையானது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொதுவடிவம் (General form of a G.P)

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$-ன் முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொதுவிகிதம் r எனில், அனைத்து $n \in \mathbb{N}$-க்கு, $a_1 = a$ மற்றும் $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ ஆகும்.

www.tntextbooks.in

அதாவது, அனைத்து $n \in \mathbb{N}$-க்கு, $a_{n+1} = r\, a_n$ ஆகும்.

இதிலிருந்து $n = 1, 2, 3$ எனப் பிரதியிட,

$$a_2 = a_1 r = ar = ar^{2-1}$$
$$a_3 = a_2 r = (ar)r = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$a_4 = a_3 r = (ar^2)r = ar^3 = ar^{4-1}$$

மேலும், இம்முறையைத் தொடர,

$$a_n = a_{n-1} r = (ar^{n-2})r = ar^{n-1}$$ எனக் கிடைக்கும்.

எனவே, ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் n-ஆவது உறுப்பு $a_n = ar^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$, ஆகும்.

மேலும், ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையானது $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots,\ ar^{n-1},\ ar^n, \cdots.$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பினைக் காணும் சூத்திரம்

$$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$ ஆகும்.

ஒரு தொடர்வரிசையில் முதல் சில உறுப்புகள் கொடுக்கப்பட்டால், அத்தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையா அல்லது இல்லையா என எவ்வாறு தீர்மானிப்பது?

$\frac{t_{n+1}}{t_n} = r$, இங்கு $n \in \mathbb{N}$ மற்றும் r ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலி, என்றவாறு அமையும் தொடர்வரிசை $\{t_n\}_1^{\infty}$ ஆனது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

குறிப்பு

(i) தொடர்வரிசையில் முதல் உறுப்பினைத் தவிர்த்து, எந்த ஒரு உறுப்புக்கும், அதன் முந்தைய உறுப்புக்கும் உள்ள விகிதமானது, பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலி எனில், அத்தொடர்வரிசை, பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனப்படும்.

(ii) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலும் அல்லது வகுத்தாலும் கிடைக்கும் தொடர்வரிசை, ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகவே அமையும்.

(iii) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளை $\frac{a}{r}, a, ar$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். இங்கு r என்பது பொது விகிதம்.

(iv) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த நான்கு உறுப்புகளை $\frac{a}{r^3},\ \frac{a}{r},\ ar,\ ar^3$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம். (இங்கு பொது விகிதம் r^2)

எடுத்துக்காட்டு 2.9

பின்வருவனவற்றில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்?

(i) $5, 10, 15, 20, \cdots$. (ii) $0.15, 0.015, 0.0015, \cdots$. (iii) $\sqrt{7},\ \sqrt{21},\ 3\sqrt{7},\ 3\sqrt{21}, \cdots$.

தீர்வு

(i) அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் பொது விகிதத்தை எடுத்துக்கொண்டால் $\frac{10}{5} \neq \frac{15}{10}$.
எனவே, இத்தொடர்வரிசையில் பொது விகிதமில்லை.

ஆகவே, இத்தொடர்வரிசை, ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை அல்ல.

(ii) இங்கு, $\frac{0.015}{0.15} = \frac{0.0015}{0.015} = \cdots = \frac{1}{10}$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே, பொது விகிதம் = $\frac{1}{10}$ ஆகும். எனவே, இது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

(iii) இங்கு, $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{7}} = \cdots = \sqrt{3}$. இதன் பொது விகிதம் $\sqrt{3}$ ஆகும்.
எனவே, இத்தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.10

பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளின் பொது விகிதத்தையும் மற்றும் அதன் பொது உறுப்பையும் காண்க.

(i) $\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{18}{125}, \cdots$. (ii) $0.02, 0.006, 0.0018, \cdots$.

தீர்வு

(i) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர்வரிசை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்.

ஆகவே, பொது விகிதம் $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \cdots$.

எனவே, $r = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$. மேலும், முதல் உறுப்பு $\frac{2}{5}$ ஆகும்.

எனவே, பொது உறுப்பு,

$$t_n = ar^{n-1},\ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$$\Longrightarrow \quad t_n = \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

(ii) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொதுவிகிதம்

$$r = \frac{0.006}{0.02} = 0.3 = \frac{3}{10}.$$

முதல் உறுப்பு = 0.02

எனவே, இத்தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு

$$t_n = (0.02)\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

எடுத்துக்காட்டு 2.11

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் நான்காவது உறுப்பு $\frac{2}{3}$ மற்றும் அதன் ஏழாவது உறுப்பு $\frac{16}{81}$ எனில், அப்பெருக்குத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

தீர்வு $t_4 = \frac{2}{3}$; $t_7 = \frac{16}{81}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பிற்கான சூத்திரம், $t_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ என்பதை பயன்படுத்துவோம்.

$\Longrightarrow$ $t_4 = ar^3 = \frac{2}{3}$ மற்றும் $t_7 = ar^6 = \frac{16}{81}$ ஆகும்.

தற்போது, முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொதுவிகிதம் r ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

t_7-ஐ t_4 ஆல் வகுக்க,

$$\frac{t_7}{t_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{\frac{16}{81}}{\frac{2}{3}} = \frac{8}{27}.$$

$\Longrightarrow$ $r^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ என்பதிலிருந்து $r = \frac{2}{3}$.

r-ன் மதிப்பை t_4-ல் பிரதியிட,

$$t_4 = \frac{2}{3} \Longrightarrow ar^3 = \left(\frac{2}{3}\right).$$

$\Longrightarrow$ $a\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{2}{3}$. $\therefore$ $a = \frac{9}{4}$.

எனவே, பெருக்குத் தொடர்வரிசை : $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ ஆகும்.

அதாவது, G.P. = $\frac{9}{4}$, $\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)$, $\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\cdots$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.12

ஒரு நுண்ணுயிர் பரிசோதனையில் ஒவ்வொரு மணி நேரமும் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை இரட்டிப்பாகிறது. பரிசோதனையின் தொடக்கத்தில் 30 பாக்டீரியாக்கள் இருந்தன. 14 ஆவது மணி நேர முடிவில் உள்ள பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு தொடர்ந்து ஒவ்வொரு மணிநேர முடிவிலும் இருக்கக் கூடிய பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை இரு மடங்காகிறது.

நுண்ணுயிர் சோதனையின் தொடக்கத்தில் உள்ள பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை = 30

முதல் மணிநேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை = $2(30)$

2ஆம் மணிநேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை = $2(2(30)) = 30(2^2)$

இவ்வாறு தொடரும் பொழுது, ஒவ்வொரு மணிநேர முடிவிலும் உள்ள பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையை அமைக்கிறது. அதன் பொதுவிகிதம் $r = 2$.

n மணிநேர முடிவில் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை t_n என்று குறிப்பிட்டால்,

$t_n = 30\,(2^n)$ என்பது பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பாகும்.

ஆகவே, 14 ஆவது மணிநேர முடிவில் உள்ள பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை $t_{14} = 30\,(2^{14})$.

எடுத்துக்காட்டு 2.13

ஆண்டுக்கு 10% வீதம் கூட்டு வட்டி அளிக்கும் ஒரு வங்கியில், ஒருவர் ₹500-ஐ வைப்புத் தொகையாக செலுத்துகிறார். 10 ஆண்டு முடிவில் அவருக்குக் கிடைக்கும் மொத்த தொகை எவ்வளவு?

www.tntextbooks.in

தீர்வு அசல் = ₹500 மற்றும் கூட்டு வட்டி வீதம் 10%

ஒரு வருடத்திற்கான வட்டி $= 500\left(\frac{10}{100}\right) = 50.$

2 ஆவது வருடத்திற்கான அசல் = முதல் வருட அசல் + வட்டி

$= 500 + 500\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)$

2 ஆவது வருடத்திற்கான வட்டி $= \left(500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\right)\left(\frac{10}{100}\right).$

3 ஆவது வருடத்திற்கான அசல் $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right) + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)\frac{10}{100}$

$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால்,

n ஆவது ஆண்டிற்கு அசல் $= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}.$

$(n-1)$ ஆவது ஆண்டு முடிவில் கிடைக்கும் மொத்த தொகை = n ஆவது ஆண்டிற்கான அசல்.

ஆகவே, n ஆவது ஆண்டு முடிவில் கிடைக்கும் மொத்த தொகை

$$= 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1} + 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{n-1}\left(\frac{10}{100}\right) = 500\left(\frac{11}{10}\right)^n$$

10 ஆவது வருடமுடிவில் கிடைக்கும் மொத்த தொகை = ₹ $500\left(\frac{11}{10}\right)^{10}$.

குறிப்புரை

மேலேயுள்ள முறையைப் பயன்படுத்தி கூட்டுவட்டிக் கணக்குகளில் மொத்தத் தொகை காணும் பின்வரும் சூத்திரத்தை அமைக்க முடியும்.

$$A = P(1+i)^n,$$

இங்கு A என்பது n ஆவது ஆண்டு முடிவில் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை, P என்பது அசல், $i = \frac{r}{100}$, r என்பது ஆண்டு வட்டி வீதம் மற்றும் n என்பது ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை.

எடுத்துக்காட்டு 2.14

ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{13}{12}$ மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் -1 எனில், பொது விகிதத்தையும் மேலும் அவ்வுறுப்புகளையும் காண்க.

தீர்வு பெருக்குத் தொடரின் முதல் மூன்று உறப்புகள் $\frac{a}{r}, a, ar$ என்க.

இப்போது, $\frac{a}{r} + a + ar = \frac{13}{12}$

$\Longrightarrow \quad a\left(\frac{1}{r} + 1 + r\right) = \frac{13}{12} \quad \Longrightarrow \quad a\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12}$ (1)

மேலும், $\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1$

$\Longrightarrow \quad a^3 = -1 \quad \therefore \quad a = -1$

$a = -1$ ஐ சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட, நமக்குக் கிடைப்பது

$$(-1)\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{13}{12}$$

$$\Longrightarrow \qquad 12r^2 + 12r + 12 = -13r$$

$$12r^2 + 25r + 12 = 0$$

$$(3r+4)(4r+3) = 0$$

$$r = -\frac{4}{3} \text{ அல்லது } -\frac{3}{4}$$

$r = -\frac{4}{3}$, $a = -1$ எனும் போது, தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$.

$r = -\frac{3}{4}$, $a = -1$ எனும்போது, தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ என பின்நோக்கு வரிசையில் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.15

a, b, c, d என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில் $(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு a, b, c, d என்பன பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன.

முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது விகிதம் r எனக் கொள்க.

எனவே, $b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3$

$$\begin{aligned}(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 &= (ar - ar^2)^2 + (ar^2 - a)^2 + (ar^3 - ar)^2 \\ &= a^2[(r-r^2)^2 + (r^2-1)^2 + (r^3-r)^2] \\ &= a^2[r^2 - 2r^3 + r^4 + r^4 - 2r^2 + 1 + r^6 - 2r^4 + r^2] \\ &= a^2[r^6 - 2r^3 + 1] = a^2[r^3-1]^2 \\ &= (ar^3 - a)^2 = (a - ar^3)^2 = (a-d)^2\end{aligned}$$

பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எது பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனக் காண்க. பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளாக உள்ளனவற்றின் பொது விகிதம் காண்க.

   (i) $0.12, 0.24, 0.48, \cdots$. (ii) $0.004, 0.02, 0.1, \cdots$. (iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \cdots$.

   (iv) $12, 1, \frac{1}{12}, \cdots$. (v) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \cdots$. (vi) $4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \cdots$.

2. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, -2, \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 10 ஆவது உறுப்பையும், பொது விகிதத்தையும் காண்க.

3. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 4ஆவது மற்றும் 7 ஆவது உறுப்புகள் முறையே 54 மற்றும் 1458 எனில், அத்தொடர்வரிசையைக் காண்க.

4. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் மற்றும் ஆறாவது உறுப்புகள் முறையே $\frac{1}{3}, \frac{1}{729}$ எனில், அப்பெருக்குத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

www.tntextbooks.in

5. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் கொடுக்கப்பட்ட உறுப்பு எத்தனையாவது உறுப்பு எனக் காண்க.

(i) $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \cdots$-ல் $\frac{128}{15625}$ என்ற உறுப்பு (ii) $1, 2, 4, 8, \cdots$ -ல் 1024 என்ற உறுப்பு

6. $162, 54, 18, \cdots$ மற்றும் $\frac{2}{81}, \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \cdots$ ஆகிய பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளின் n ஆவது உறுப்பு சமமெனில், n-ன் மதிப்பு காண்க.

7. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 3 மற்றும் ஐந்தாவது உறுப்பு 1875 எனில், அதன் பொது விகிதம் காண்க.

8. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{39}{10}$ மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 1 எனில், அத்தொடர்வரிசையின் பொது விகிதத்தையும், அம்மூன்று உறுப்புக்களையும் காண்க.

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த 3 உறுப்புகளின் பெருக்குத் தொகை 216 மற்றும் அவைகளில் இரண்டிரண்டு உறுப்புக்களின் பெருக்கற்பலன்களின் கூடுதல் 156 எனில், அந்த உறுப்புகளைக் காண்க.

10. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 7 மற்றும் அவற்றின் தலைகீழிகளின் கூடுதல் $\frac{7}{4}$ எனில், அவ்வுறுப்புகளைக் காண்க.

11. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 13 மற்றும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 91 எனில், அத்தொடர்வரிசையைக் காண்க.

12. ஒருவர் ஆண்டிற்கு 5% கூட்டு வட்டி தரும் ஒரு வங்கியில் ₹1000-ஐ வைப்பு நிதியாக வைத்தால், 12 ஆம் வருடமுடிவில் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகையைக் காண்க.

13. ஒரு நிறுவனம் ₹ 50,000-க்கு ஒரு அச்சுப்பிரதி இயந்திரத்தை வாங்குகிறது. அவ்வியந்திரம் ஒவ்வொரு ஆண்டும் தன் மதிப்பில் 15% இழக்கிறது என மதிப்பிடப்படுகிறது. 15 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அந்த அச்சுப்பிரதி இயந்திரத்தின் மதிப்பு என்ன?

14. a, b, c, d ஆகியன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்தால், $(a-b+c)(b+c+d) = ab+bc+cd$ எனக்காட்டுக.

15. a, b, c, d ஆகியன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமைந்தால் $a+b,\ b+c,\ c+d$ என்பவையும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் என நிறுவுக.

2.5 தொடர்கள் (Series)

பின்வரும் கணக்கை எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஒருவர் ஆண்டு ஊதியம் ₹25,000 பெறும் பணியில் 1990 ஆம் ஆண்டு சனவரி முதல் தேதியன்று சேர்ந்தார். ஒவ்வொரு ஆண்டும் ஆண்டிற்கான ஊதிய உயர்வு ₹500 பெற்றார். 2010 ஆம் ஆண்டு சனவரி முதல் தேதி வரையில் அவர் பெற்ற மொத்த ஊதியம் எவ்வளவு?

முதலில் அவருடைய ஆண்டு ஊதியம் பின்வரும் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கிறது என அறியலாம்.

$25000,\ 25500,\ 26000,\ 26500, \cdots,\ (25000 + 19(500))$.

20 வருடங்களில் அவர் பெற்ற ஊதியத்தைக் கூட்டினால் இக்கணக்கிற்கான விடை கிடைக்கும்.

$\therefore$ மொத்த ஊதியம் = $25000 + 25500 + 26000 + 26500 + \cdots + (25000 + 19(500))$.

ஆதலால், தொடர்வரிசையின் உறுப்புகளின் கூடுதல் காண ஒரு வழிவகைக் காண வேண்டும்.

வரையறை

தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளை கூட்டல் குறி '+' ஆல் இணைத்து அவைகளின் கூடுதல்களாக எழுதுவதே தொடர் எனப்படும். ஒரு தொடரில் முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின், அது முடிவுறுத் தொடர் (Finite Series) எனப்படும். ஒரு தொடரில் முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருப்பின், அது முடிவுறாத் தொடர் (Infinite Series) எனப்படும்.

$S = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசையை எடுத்துக்கொள்வோம். ஒவ்வொரு $n \in \mathbb{N}$-க்கும் $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots,$ என பகுதியின் கூடுதலை வரையறுக்கிறோம். $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது தொடர்வரிசை $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ -ன் பகுதி கூடுதல்களின் தொடர்வரிசை ஆகும்.

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$ என்பது தொடர்வரிசை $\{a_n\}_1^{\infty}$-ல் உள்ள உறுப்புகளின் முடிவுறாத் தொடர் எனப்படும். இந்த முடிவுறாத் தொடரினை $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ அல்லது சுருக்கமாக $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ எனக் குறிப்போம். இங்கு Sigma என்றழைக்கப்படும் குறியான $\sum$ என்பது கூடுதலைக் குறிக்கும்.

முடிவுறுத் தொடர் என்பது முடிவுறு உறுப்புகளின் கூடுதல் என்பதை எளிதில் அறியலாம். முடிவுறா எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளடங்கிய தொடர் வரிசையின் கூடுதலை நாம் எவ்வாறு அறிய முடியும்? உயர் வகுப்புகளில் கணிதத்தில் இதைப்பற்றி கற்க இருக்கிறோம். தற்போது, குறிப்பாக முடிவுறுத் தொடர்களின் கூடுதல் காணுதலைப் பற்றிக் கற்போம்.

இப்பகுதியில் கூட்டுத் தொடர் மற்றும் பெருக்குத் தொடர் ஆகியவற்றைக் கற்க உள்ளோம்.

2.5.1 கூட்டுத் தொடர் (Arithmetic Series)

ஒரு தொடரிலுள்ள உறுப்புகள் கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலிருப்பின், அத்தொடர் ஒரு கூட்டுத் தொடர் எனப்படும்.

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலுள்ள முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்
(Sum of first n terms of the Arithmetic sequence)

ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d என்க.

அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசை $a,\ a+d,\ a+2d, ...,\ a+(n-1)d, \cdots$ ஆகும்.

S_n என்பது கூட்டு தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் என்க.

ஆகவே, $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\ (a+(n-1)d)$

$$\implies S_n = na + (d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d)$$
$$= na + d(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1))$$

தற்போது, $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ என்ற கூடுதல் கண்டுபிடிக்கப்பட்டால், இந்த சூத்திரத்தை சுருக்க இயலும்.

கூடுதல் $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ ஆனது $1,\ 2, \cdots, (n-1)$ எனும் கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் கூடுதலாகும்.

தற்போது, முதல் n மிகை முழுக்களின் கூட்டற்பலனைக் காண்போம்.

$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$ என்க. (1)

www.tntextbooks.in

மேலேயுள்ள கூட்டலைக் காண பின்வரும் ஒரு எளிய செயலைச் செய்வோம்.

(1) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியனவற்றைக் கூட்ட,

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1). \qquad (3)$$

சமன்பாடு (3)-ன் வலதுபுறத்தில் $(n+1)$ உறுப்புகள் உள்ளன.

(1) மற்றும் (2) ஆகிய ஒவ்வொன்றிலும் n உறுப்புகள் உள்ளன

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் கூட்ட n எண்ணிக்கையுள்ள $(n+1)$ மட்டுமே உள்ளன.

(3)-ஐச் சுருக்க $2S_n = n(n+1)$.

எனவே, முதல் n மிகை முழுக்களின் கூடுதல் $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

ஆகவே, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. (4)

இச்சூத்திரம் மிகை முழுக்களின் கூடுதல் காண ஒரு பயனுள்ள சூத்திரம் ஆகும்.

குறிப்புரை

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள கூடுதல் காணும் முறையானது, ஜெர்மனி நாட்டைச் சார்ந்தவரும், கணிதத்தின் இளவரசர் எனப் புகழப்பட்டவருமான கணிதவியலறிஞர் கார்ல் பிரெடரிக் காஸ் (Carl Fredrick Gauss) என்பார் 100 வரையிலுள்ள மிகை முழு எண்களின் கூடுதலைக் காணும்போது பயன்படுத்தியதாகும். அவருக்கு ஐந்து வயது இருக்கும் போது அவருடைய பள்ளி ஆசிரியர் கொடுத்தக் கணக்கு இதுவாகும். உயர் வகுப்பில் கணிதத்தைக் கற்கும் போது மேலேயுள்ள சூத்திரத்தைத் தருவிக்க வேறுசில முறைகளைக் கற்க உள்ளோம்.

Carl Fredrick Gauss
(1777 – 1855)

ஒரு பொதுவான கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலை தற்போது காண்போம். $a, a+d, a+2d, \cdots,$-ன் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்,

$$\begin{aligned} S_n &= na + [d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d] \\ &= na + d[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] \\ &= na + d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \qquad \text{(சூத்திரம் (4) ஐப் பயன்படுத்த)} \\ &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \qquad (5) \end{aligned}$$

ஆகவே, $S_n = \frac{n}{2}[a + (a + (n-1)d)] = \frac{n}{2}$ (முதல் உறுப்பு + கடைசி உறுப்பு)

$$= \frac{n}{2}(a + l).$$

முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d எனக்கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

(i) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ (பொது வித்தியாசம் d கொடுக்கப்பட்டால்)

(ii) $S_n = \frac{n}{2}(a + l)$ (கடைசி உறுப்பு l கொடுக்கப்பட்டால்)

எடுத்துக்காட்டு 2.16

$5+11+17+\cdots+95$ என்ற கூட்டுத் தொடரின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு $5+11+17+\cdots+95$ என்ற கூட்டுத்தொடரில்

$a=5,\quad d=11-5=6,\quad l=95.$

தற்போது, $n = \frac{l-a}{d}+1$

$\Longrightarrow\quad n = \frac{95-5}{6}+1 = \frac{90}{6}+1 = 16.$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட தொடரில் 16 உறுப்புகள் உள்ளன.

எனவே, $S_n = \frac{n}{2}[l+a]$

ஆகவே, $S_{16} = \frac{16}{2}[95+5] = 8(100) = 800.$

எடுத்துக்காட்டு 2.17

$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots$ என்ற தொடரின் முதல் $2n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots$ $2n$ உறுப்புகள் வரை கூடுதல் S என்க.

ஆகவே, கூடுதல் $S = 1-4+9-16+25-\cdots$ $2n$ உறுப்புகள் வரை

$= (1-4)+(9-16)+(25-36)+\cdots$ n அடைப்புக்குறிகள் வரை.

$= -3+(-7)+(-11)+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை.

இத்தொடர், ஒரு கூட்டுத்தொடராகும். மேலும் $a=-3$, $d=-7-(-3)=-4$ ஆகும்.

எனவே, கூடுதல் $= \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2(-3)+(n-1)(-4)]$

$= \frac{n}{2}[-6-4n+4] = \frac{n}{2}[-4n-2]$

$\therefore$ கூடுதல் $S = \frac{-2n}{2}(2n+1) = -n(2n+1).$

எடுத்துக்காட்டு 2.18

ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் 14 உறுப்புகளின் கூடுதல் -203 மற்றும் அடுத்த 11 உறுப்புகளின் கூடுதல் -572 எனில், அத்தொடரைக் காண்க.

தீர்வு $S_{14} = -203$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\Longrightarrow\quad \frac{14}{2}[2a+13d] = -203$

$\Longrightarrow\quad 7[2a+13d] = -203$

$\Longrightarrow\quad 2a+13d = -29.\qquad (1)$

www.tntextbooks.in

மேலும், அடுத்த 11 உறுப்புகளின் கூடுதல் $= -572$.

தற்போது, $S_{25} = S_{14} + (-572)$

$\Longrightarrow \quad S_{25} = -203 - 572$

$\Longrightarrow \quad \frac{25}{2}[2a + 24d] = -775$

$\Longrightarrow \quad 2a + 24d = -31 \times 2$

$\Longrightarrow \quad a + 12d = -31 \qquad (2)$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றைத் தீர்க்க, $a = 5$, $d = -3$.

எனவே, தேவையான கூட்டுத்தொடர் $5 + (5-3) + (5+2(-3)) + \cdots$ ஆகும்.

அதாவது, $5 + 2 - 1 - 4 - 7 - \cdots$ என்பது தேவையான கூட்டுத் தொடர் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.19

$24 + 21 + 18 + 15 + \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடரில் தொடர்ச்சியாக எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் -351 கிடைக்கும்?

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூட்டுத்தொடரில், $a = 24$, $d = -3$ மற்றும் $S_n = -351$.

தற்பொழுது, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = -351$

$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[2(24) + (n-1)(-3)] = -351$

$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[48 - 3n + 3] = -351$

$\Longrightarrow \quad n(51 - 3n) = -702$

$\Longrightarrow \quad n^2 - 17n - 234 = 0$

எனவே, $(n-26)(n+9) = 0$

$\therefore \quad n = 26$ அல்லது $n = -9$

இங்கு n என்பது தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை என்பதால் n-ன் மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்கக்கூடாது. எனவே கூடுதல் -351 எனக் கிடைக்க 26 உறுப்புகளை கூட்ட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.20

8 ஆல் வகுபடும் அனைத்து மூன்றிலக்க இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு

8 ஆல் வகுபடும் மூன்றிலக்க இயல் எண்கள் 104, 112, 120, $\cdots$, 992 ஆகும். அவற்றின் கூடுதல், $S_n = 104 + 112 + 120 + 128 +, \cdots + 992$.

இங்கு, $a = 104$, $d = 8$, $l = 992$.

$\therefore \quad n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{992-104}{8} + 1$

$= \frac{888}{8} + 1 = 112$.

ஆகவே, $S_{112} = \frac{n}{2}[a + l] = \frac{112}{2}[104 + 992] = 56(1096) = 61376$.

எனவே, 8 ஆல் வகுபடும் அனைத்து மூன்றிலக்க இயல் எண்களின் கூடுதல் = 61376.

எடுத்துக்காட்டு 2.21

ஒரு பலகோணத்தின் உட்கோணங்களின் அளவுகளை வரிசைப்படி எடுத்துக் கொண்டால், அவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கின்றன. அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் மிகக் குறைந்த கோண அளவு 85° மற்றும் மிக உயர்ந்த கோண அளவு 215° எனில், அந்தப் பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கையை n என்க.

கோணங்களின் அளவுகள் ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையை அமைப்பதால் பலகோணத்தின் கோணங்களின் அளவுகளின் கூடுதல்

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + l \quad \text{இங்கு, } a = 85\,,\ \ l = 215.$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a+l] \qquad (1)$$

ஒரு பலகோணத்தின் உட்கோணங்களின் கூடுதல் = $(n-2)\times 180^0$ என அறிவோம்.

ஆகவே, $S_n = (n-2)\times 180$

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, $\frac{n}{2}[a+l] = (n-2)\times 180$

$\Longrightarrow \quad \frac{n}{2}[85+215] = (n-2)\times 180$

$\Longrightarrow \quad 150n = 180(n-2) \quad \Longrightarrow \quad n = 12.$

ஆகவே, பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை 12 ஆகும்.

பயிற்சி 2.4

1. பின்வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.
   (i) முதல் 75 மிகை முழுக்கள் (ii) முதல் 125 இயல் எண்கள்
2. n ஆவது உறுப்பு $3+2n$ என்றவாறு அமைந்த ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் 30 உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.
3. பின்வரும் கூட்டுத்தொடர்களின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.
   (i) $38 + 35 + 32 + \cdots + 2.$ (ii) $6 + 5\frac{1}{4} + 4\frac{1}{2} + \cdots$ 25 உறுப்புகள் வரை.
4. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்ட கூட்டுத் தொடர்களின் கூடுதல் S_n காண்க.
   (i) $a = 5,\ n = 30,\ l = 121$ (ii) $a = 50,\ n = 25,\ d = -4$
5. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots$ என்ற தொடரின் முதல் 40 உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.
6. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் 11 உறுப்புகளின் கூடுதல் 44 மற்றும் அதன் அடுத்த 11 உறுப்புகளின் கூடுதல் 55 எனில், அத்தொடரைக் காண்க.
7. $60, 56, 52, 48, \cdots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பிலிருந்து தொடர்ச்சியாக எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 368 கிடைக்கும்?
8. 9 ஆல் வகுபடும் அனைத்து மூன்றிலக்க இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

www.tntextbooks.in

9. ஒரு கூட்டுத் தொடரின் 3 ஆவது உறுப்பு 7 மற்றும் அதன் 7 ஆவது உறுப்பானது 3 ஆவது உறுப்பின் மூன்று மடங்கை விட 2 அதிகம். அத்தொடரின் முதல் 20 உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.

10. 300-க்கும் 500-க்கும் இடையேயுள்ள 11 ஆல் வகுபடும் அனைத்து இயல் எண்களின் கூட்டற்பலன் காண்க.

11. $1 + 6 + 11 + 16 + \cdots + x = 148$ எனில், x-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

12. 100-க்கும் 200-க்கும் இடையேயுள்ள 5 ஆல் வகுபடாத அனைத்து இயல் எண்களின் கூட்டற்பலனைக் காண்க.

13. ஒரு கட்டுமான குழுமம், ஒரு பாலத்தை கட்டி முடிக்கத் தாமதமாகும் போது, தாமதமாகும் ஒவ்வொரு நாளுக்கும் அபராதத்தொகைக் கட்டவேண்டும். முதல் நாள் தாமதத்திற்கு அபராதம் ₹4000 மேலும் அடுத்துவரும் ஒவ்வொரு நாளுக்கும் முந்தைய நாளை விட ₹1000 அதிகம் செலுத்த வேண்டியிருக்கும். வரவு செலவுத்திட்டத்தின்படி அக்குழுமம் மொத்த அபராதத்தொகையாக ₹1,65,000 செலுத்த இயலும் எனில், எத்தனை நாட்களுக்கு பாலம் முடிக்கும் பணியை தாமதப்படுத்தலாம்?

14. 8% வீதம் தனிவட்டி தரும் நிறுவனத்தில் ஒவ்வொரு ஆண்டும் ₹1000 வைப்புத் தொகையாக செலுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வொரு ஆண்டின் இறுதியில் பெறும் வட்டியைக் கணக்கிடுக. பெறும் வட்டித்தொகைகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்குமா? அவ்வாறு அமைக்க முடியுமானால், 30 ஆண்டுகளின் முடிவில் கிடைக்கும் மொத்த வட்டியைக் காண்க.

15. ஒரு தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $3n^2 - 2n$ எனில், அத்தொடரானது ஒரு கூட்டுத் தொடர் என நிறுவுக.

16. ஒரு கடிகாரம் ஒரு மணிக்கு ஒரு முறை, 2 மணிக்கு இரு முறை, 3 மணிக்கு மூன்று முறை என்றவாறு, தொடர்ந்து சரியாக ஒவ்வொரு மணிக்கும் ஒலி எழுப்பும் எனில், ஒரு நாளில் அக்கடிகாரம் எத்தனை முறை ஒலி எழுப்பும்?

17. முதல் உறுப்பு a, இரண்டாம் உறுப்பு b மற்றும் கடைசி உறுப்பு c எனக் கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடரின் கூட்டற்பலன் $\dfrac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ எனக்காட்டுக.

18. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் $(2n+1)$ உறுப்புகள் இருப்பின் ஒற்றைப்படை உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனுக்கும், இரட்டைப்படை உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் $(n+1):n$ என நிறுவுக.

19. ஒரு கூட்டுத் தொடரில் முதல் m உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனுக்கும், முதல் n உறுப்புகளின் கூட்டற்பலனுக்கும் இடையேயுள்ள விகிதம் $m^2 : n^2$ எனில், m ஆவது உறுப்பு மற்றும் n ஆவது உறுப்பு ஆகியவைகள் $(2m-1):(2n-1)$ என்ற விகிதத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக.

20. ஒரு தோட்டக்காரர் சரிவக வடிவில் சுவர் ஒன்றினை அமைக்க திட்டமிடுகிறார். சரிவகத்தின் நீண்ட முதல் வரிசைக்கு 97 செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது. பின்பு ஒவ்வொரு வரிசையின் இருபுறமும் இரண்டிரண்டு செங்கற்கள் குறைவாக வைக்க வேண்டும். அவ்வடிவமைப்பில் 25 வரிசைகளிருப்பின், அவர் வாங்க வேண்டிய செங்கற்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை?

2.5.2 பெருக்குத் தொடர் (Geometric series)

ஒரு தொடரின் உறுப்புகள், பெருக்குத் தொடர் வரிசை ஒன்றை அமைக்குமானால், அத்தொடர் பெருக்குத் தொடர் எனப்படும். $r \neq 0$ என்ற பொது விகிதத்தைக் கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசை $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, ar^n, \cdots$ எனக் கொள்க. இத்தொடர் வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்போம்.

தற்போது, $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ (1)

$r = 1$ எனில், (1)-லிருந்து $S_n = na$ ஆகும்.

$r \neq 1$ எனில், (1) -லிருந்து,

$$rS_n = r(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \qquad (2)$$

(1)-ல் இருந்து (2)-ஐக் கழிக்க,

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$\implies \quad S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

எனவே, $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \; ; \quad r \neq 1.$$

ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}, & (r \neq 1 \text{ எனில்}) \\ na & (r = 1 \text{ எனில்}) \end{cases}$$

இங்கு a என்பது முதல் உறுப்பு, r என்பது பொது விகிதம்.

குறிப்புரை

$-1 < r < 1$ எனில்,

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1-r}.$$

முடிவிலி எண்ணிக்கையில் மிகை எண்களின் கூடுதல் ஒரு முடிவுறு மதிப்பைக் கொடுக்கலாம் என்பதை அறிக.

எடுத்துக்காட்டு 2.22

$16 - 48 + 144 - 432 + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் உள்ள முதல் 25 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்க.

தீர்வு இங்கு $a = 16, \; r = -\frac{48}{16} = -3 \neq 1.$

எனவே, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$S_{25} = \frac{16(1-(-3)^{25})}{1-(-3)} = \frac{16(1+3^{25})}{4} = 4(1+3^{25}).$$

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 2.23

பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு பெருக்குத் தொடருக்கும் S_n ஐக் காண்க.

(i) $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$ (ii) $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

தீர்வு

(i) இங்கு, $a = 2,\ t_6 = 486,\ n = 6$

தற்போது, $t_6 = 2(r)^5 = 486$

$\Longrightarrow \quad r^5 = 243 \quad \therefore \quad r = 3.$

மேலும், $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$; இங்கு $r \neq 1$

ஆகவே, $S_6 = \dfrac{2(3^6 - 1)}{3 - 1} = 3^6 - 1 = 728.$

(ii) இங்கு, $a = 2400,\ r = -3,\ n = 5$

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} \text{ ; இங்கு } r \neq 1.$$

$$= \frac{2400[(-3)^5 - 1]}{(-3) - 1}$$

எனவே, $S_5 = \dfrac{2400}{4}(1 + 3^5) = 600(1 + 243) = 146400.$

எடுத்துக்காட்டு 2.24

$2 + 4 + 8 + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில், முதல் உறுப்பிலிருந்து தொடர்ச்சியாக எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால், கூடுதல் 1022 கிடைக்கும்?

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெருக்குத் தொடர் $2 + 4 + 8 + \cdots$.

கூடுதல் 1022 பெறத்தேவையான உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை n என்க.

இங்கு $a = 2,\ r = 2,\ S_n = 1022.$

n ஐக் காண,

$$S_n = \frac{a[r^n - 1]}{r - 1} \text{; இங்கு } r \neq 1.$$

$$= (2)\left[\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right] = 2(2^n - 1).$$

ஆனால், $S_n = 1022.$ ஆகவே, $2(2^n - 1) = 1022$

$\Longrightarrow \quad 2^n - 1 = 511$

$\Longrightarrow \quad 2^n = 512 = 2^9. \quad \therefore \quad n = 9.$

எனவே, கூடுதல் 1022-ஐப் பெற முதல் 9 உறுப்புகளைக் கூட்ட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.25

ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு 375 மற்றும் அதன் 4 ஆவது உறுப்பு 192 எனில், அதன் பொது விகிதத்தையும், முதல் 14 உறுப்புகளின் கூடுதலையும் காண்க.

தீர்வு பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு a மற்றும் அதன் பொது விகிதம் r என்க.

$a = 375, \quad t_4 = 192.$

தற்போது, $t_n = ar^{n-1} \implies t_4 = 375r^3 \implies 375r^3 = 192$

$$r^3 = \frac{192}{375} \implies r^3 = \frac{64}{125}$$

$$r^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \implies r = \frac{4}{5}$$ இதுவே தேவையான பொது விகிதமாகும்.

மேலும், $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$; இங்கு $r \neq 1$.

$$S_{14} = \frac{375\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = (-1) \times 5 \times 375 \times \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{14} - 1\right]$$

$$= (375)(5)\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right] = 1875\left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\right].$$

குறிப்பு

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டில்,

$r \neq 1$ என்பதால், $S_n = a\left[\frac{1 - r^n}{1 - r}\right]$-ஐ $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$-க்கு பதிலாகவும் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2.26

பொது விகிதம் மிகை எண்ணாக இருக்கும் ஒரு பெருக்குத் தொடரில் 4 உறுப்புகள் உள்ளன. முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் 8 மற்றும் அதன் கடைசி இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் 72 எனில், அத்தொடரைக் காண்க.

தீர்வு 4 உறுப்புகளின் கூடுதல் $a + ar + ar^2 + ar^3$ என்க. $r > 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மேலும், $a + ar = 8$ மற்றும் $ar^2 + ar^3 = 72$

தற்போது, $ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar) = 72$

$$\implies r^2(8) = 72 \quad \therefore \quad r = \pm 3$$

$r > 0$ என்பதால், $r = 3$ ஆகும்.

எனவே, $a + ar = 8 \implies a = 2$

ஆகவே, அப்பெருக்குத் தொடர் $2 + 6 + 18 + 54$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.27

$6 + 66 + 666 + \cdots$ எனும் தொடரில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots$ n உறுப்புகள் வரை என்க.

$S_n = 6(1 + 11 + 111 + \cdots n$ உறுப்புகள் வரை$)$

$= \frac{6}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots$ n உறுப்புகள் வரை$)$ (9 ஆல் பெருக்கி, 9ஆல் வகுக்க)

$= \frac{2}{3}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \cdots$ n அடைப்புக்குறிகள்வரை$]$

$= \frac{2}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots$ n உறுப்புகள் வரை$) - n]$

ஆகவே, $S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right].$

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 2.28

ஒரு தொண்டு நிறுவனம் ஒரு நகரத்திலுள்ள 25 வீதிகளில் மரக்கன்றுகளை நடும்பொருட்டு, முதல் வீதியில் ஒரு மரக்கன்றும், இரண்டாம் வீதியில் இரு மரக்கன்றுகள், மூன்றாம் வீதியில் 4 மரக்கன்றுகள், நான்காவது வீதியில் 8 மரக்கன்றுகள் என்ற முறையில் நடுவதற்கு திட்டமிடுகிறது. அவ்வேலையை முடிக்கத் தேவையான மரக்கன்றுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு 25 வீதிகளில் ஒவ்வொன்றிலும் நடுவதற்குத் தேவையான மரங்களின் எண்ணிக்கை ஒரு பெருக்குத் தொடரை அமைக்கிறது. S_n என்பது தேவையான மரக்கன்றுகளின் எண்ணிக்கை என்க.

ஆகவே, $S_n = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$ 25 உறுப்புகள் வரையில்

இங்கு, $a = 1,\ r = 2,\ n = 25$

எனவே, $S_n = a\left[\frac{r^n - 1}{r - 1}\right]$

$$S_{25} = (1)\ \frac{[2^{25} - 1]}{2 - 1}$$

$$= 2^{25} - 1$$

எனவே, தேவையான மரக்கன்றுகளின் எண்ணிக்கை $2^{25} - 1$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.5

1. $\frac{5}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் முதல் 20 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்க.
2. $\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் முதல் 27 உறுப்புகளின் கூடுதலைக் காண்க.
3. பின்வரும் விவரங்களைக் கொண்ட பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் S_n காண்க.
   (i) $a = 3,\ t_8 = 384,\ n = 8.$ (ii) $a = 5,\ r = 3,\ n = 12.$
4. பின்வரும் முடிவுறு தொடர்களின் கூடுதல் காண்க.
   (i) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots + (0.1)^9$ (ii) $1 + 11 + 111 + \cdots$ 20 உறுப்புகள் வரை.
5. பின்வரும் தொடர்களில், எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால்
   (i) $3 + 9 + 27 + \cdots$ கூடுதல் 1092 கிடைக்கும்?
   (ii) $2 + 6 + 18 + \cdots$ கூடுதல் 728 கிடைக்கும் ?
6. ஒரு பெருக்குத் தொடரில் இரண்டாவது உறுப்பு 3 மற்றும் அதன் பொது விகிதம் $\frac{4}{5}$ எனில், கூட்டுத் தொடரிலுள்ள முதல் உறுப்பிலிருந்து தொடர்ச்சியாக 23 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
7. பொது விகிதம் மிகை எண்ணாக உள்ள ஒரு பெருக்குத் தொடரில் 4 உறுப்புகள் உள்ளன. அதன் முதல் இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் 9 மற்றும் கடைசி இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் 36 எனில், அத்தொடரைக் காண்க.
8. பின்வரும் தொடர்களின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.
   (i) $7 + 77 + 777 + \cdots.$ (ii) $0.4 + 0.94 + 0.994 + \cdots.$
9. தொற்றுநோய் பரவும் காலத்தில், முதல் வாரத்தில் 5 பேருக்கு உடல்நலக் குறைவு ஏற்பட்டது. உடல்நலக்குறைவுற்ற ஒவ்வொருவரும் இரண்டாவது வார இறுதியில் 4 பேருக்கு அத்தொற்று நோயைப் பரப்புவர். இவ்வகையில் தொற்றுநோய் பரவினால் 15 ஆவது வார இறுதியில் எத்தனை பேர், அத்தொற்றுநோயினால் பாதிக்கப்படுவர்?

www.tntextbooks.in

10. நற்பணி செய்த ஒரு சிறுவனுக்குப் பரிசளிக்க விரும்பிய தோட்டக்காரர் சில மாம்பழங்களை பரிசாக அளிக்க முன்வந்தார். அச்சிறுவன் உடனடியாக 1000 மாம்பழங்களைப் பெற்றுக் கொள்ளலாம் அல்லது முதல் நாளில் 1 மாம்பழம், இரண்டாம் நாளில் 2 மாம்பழங்கள், மூன்றாம் நாளில் 4 மாம்பழங்கள், நான்காம் நாளில் 8 மாம்பழங்கள் $\cdots$ எனுமாறு 10 நாட்களுக்குப் பெற்றுக் கொள்ளலாம் என இரு வாய்ப்புகள் அளித்தார். அச்சிறுவன் அதிக எண்ணிக்கையுள்ள மாம்பழங்களைப் பெற எந்த வாய்ப்பினை தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும்?

11. இரட்டைப்படை எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடரின் ஒற்றைப் படை எண்களால் குறிக்கப்படும் உறுப்புகளின் கூடுதலின் மூன்று மடங்கு, அப்பெருக்குத் தொடரிலுள்ள அனைத்து உறுப்புகளின் கூடுதலுக்குச் சமமெனில், அதன் பொது விகிதத்தைக் காண்க.

12. ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் n, $2n$ மற்றும் $3n$ ஆகிய உறுப்புகளின் கூடுதல்கள் முறையே S_1, S_2 மற்றும் S_3 எனில், $S_1(S_3 - S_2) = (S_2 - S_1)^2$ என நிறுவுக.

குறிப்புரை

$a = 1$ மற்றும் பொதுவிகிதம் $x \neq 1$ எனக்கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$ ஆகும்.

மேலேயுள்ள சமன்பாட்டின் இடப்புறம் உள்ள கோவையானது படி $(n-1)$-ஐக் கொண்ட x-ன் மீது அமைந்த ஒரு சிறப்பு பல்லுறுப்புக் கோவை என்பதை அறிக. சில முடிவுறு தொடர்களில் கூடுதலைக் காண இந்த சூத்திரம் உதவும்.

2.5.3 சிறப்புத் தொடர்கள் (Special Series) $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ மற்றும் $\sum_{k=1}^{n} k^3$

Σ என்ற குறியீட்டை கூடுதலுக்காக நாம் முன்பே பயன்படுத்தியுள்ளோம். இக்குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி சில முடிவுறு தொடர்களின் எடுத்துக்காட்டுகள் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளன.

வரிசை எண்	குறியீடு	விரிவாக்கம்
1.	$\sum_{k=1}^{n} k$ அல்லது $\sum_{j=1}^{n} j$	$1 + 2 + 3 + \cdots + n$
2.	$\sum_{n=2}^{6} (n-1)$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$
3.	$\sum_{d=0}^{5} (d+5)$	$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
4.	$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^2$
5.	$\sum_{k=1}^{10} 3 = 3\sum_{k=1}^{10} 1$	$3[1 + 1 + \cdots 10$ உறுப்புகள்$] = 30$

நாம் முன்பே, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ எனும் சூத்திரத்தை வருவித்தோம்.

www.tntextbooks.in

இதனையே $a = 1$, $d = 1$, $l = n$ என எடுத்துக் கொண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் கூடுதலைப் பயன்படுத்தி, $S_n = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{2}(1 + n)$ எனக் காணலாம்.

இதனை, சிக்மா குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ என எழுதலாம்.

பின்வருவனவற்றிற்கு சூத்திரங்களைத் தருவிப்போம்.

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$, (ii) $\sum_{k=1}^{n}k^2$ (iii) $\sum_{k=1}^{n}k^3$

நிரூபணம்:

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$ என்பதின் மதிப்பினைக் காண்போம்.

இது $a = 1$, $d = 2$, $l = (2n-1)$ என்றவாறு அமைந்த n உறுப்புகளுள்ள ஒரு கூட்டுத் தொடராகும்.

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2 \qquad (S_n = \frac{n}{2}(a + l))$

அதாவது, $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ (1)

குறிப்புரை

1. சூத்திரம் (1)-ஐ பின்வரும் மற்றொரு முறையிலும் காணலாம்.
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}2k - \sum_{k=1}^{n}1 = 2\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) - n = \frac{2(n)(n+1)}{2} - n = n^2.$$
2. (1)-லிருந்து $1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2$. ஏனெனில், $l = 2n-1 \Longrightarrow n = \frac{l+1}{2}$.

(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ என்று நாம் அறிவோம்.

$\therefore k^3 - (k-1)^3 = k^2 + k(k-1) + (k-1)^2$ (இங்கு $a = k$, $b = k-1$ எனக் கொள்க)

$\Longrightarrow \quad k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ (2)

$k = 1$ எனில், $1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$

$k = 2$ எனில், $2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$

$k = 3$ எனில், $3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$

$k = n$ எனில், $n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$. இம்முறை தொடர,

$k = 1, 2, \cdots, n$-களுக்குரிய சமன்பாடுகளை இருபுறமும் நிரல்கள்வழிக் கூட்ட

$$n^3 = 3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] - 3[1 + 2 + \cdots + n] + n$$

$$\Longrightarrow \quad 3[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] = n^3 + 3[1 + 2 + \cdots + n] - n$$

$$3\left[\sum_{k=1}^{n}k^2\right] = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

ஆகவே, $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (3)$$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots n^3$

பின்வரும் அமைப்பை கூர்ந்து நோக்குவோம்.

$$1^3 = 1 = (1)^2$$
$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = (1+2+3+4)^2.$$

இவ்வமைப்பை n உறுப்புகள் வரை தொடர்ந்தால்,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = [1+2+3+\cdots+n]^2$$
$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

எனவே, $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad (4)$$

(i) முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ii) முதல் n ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

(iii) கடைசிஉறுப்பு l தரப்பட்டால், முதல் n ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல்

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

(iv) முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(v) முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.29

பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதல் காண்க.

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60$ (ii) $1 + 3 + 5 + \cdots$ 25 உறுப்புகள் வரை

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$.

தீர்வு

(i) $26 + 27 + 28 + \cdots + 60 = (1+2+3+\cdots+60) - (1+2+3+\cdots+25)$

www.tntextbooks.in

$$= \sum_{1}^{60} n - \sum_{1}^{25} n$$

$$= \frac{60(60+1)}{2} - \frac{25(25+1)}{2}$$

$$= (30 \times 61) - (25 \times 13) = 1830 - 325 = 1505.$$

(ii) இங்கு $n = 25$

$\therefore\ 1 + 3 + 5 + \cdots$ (25 உறுப்புகள் வரை) $= 25^2 = 625.$ $\quad \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2\right)$

(iii) $31 + 33 + \cdots + 53$

$$= (1 + 3 + 5 + \cdots + 53) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 29)$$

$$= \left(\frac{53+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{29+1}{2}\right)^2 \qquad \left(1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2\right)$$

$$= 27^2 - 15^2 = 504.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.30

பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2$ (ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$.

தீர்வு

(i) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = \sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{25(25+1)(50+1)}{6} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{(25)(26)(51)}{6}$$

$$\therefore\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2 = 5525.$$

(ii) $12^2 + 13^2 + 14^2 + \cdots + 35^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 35^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2)$$

$$= \sum_{1}^{35} n^2 - \sum_{1}^{11} n^2$$

$$= \frac{35(35+1)(70+1)}{6} - \frac{11(12)(23)}{6}$$

$$= \frac{(35)(36)(71)}{6} - \frac{(11)(12)(23)}{6}$$

$$= 14910 - 506 = 14404.$$

(iii) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 51^2$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 51^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 50^2)$$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 2^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 25^2]$$

$$= \sum_{1}^{51} n^2 - 4\sum_{1}^{25} n^2$$

$$= \frac{51(51+1)(102+1)}{6} - 4 \times \frac{25(25+1)(50+1)}{6}$$

$$= \frac{(51)(52)(103)}{6} - 4 \times \frac{25(26)(51)}{6}$$

$$= 45526 - 22100 = 23426.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.31

பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 20^3$ (ii) $11^3 + 12^3 + 13^3 + \cdots + 28^3$

தீர்வு

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots 20^3 = \sum_{1}^{20} n^3$

$$= \left(\frac{20(20+1)}{2}\right)^2 \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

$$= \left(\frac{20 \times 21}{2}\right)^2 = (210)^2 = 44100.$$

(ii) $11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3$ என்பதை பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 28^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$$

ஆகவே, $11^3 + 12^3 + \cdots + 28^3 = \sum_{1}^{28} n^3 - \sum_{1}^{10} n^3$

$$= \left[\frac{28(28+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{10(10+1)}{2}\right]^2$$

$$= 406^2 - 55^2 = (406 + 55)(406 - 55)$$

$$= (461)(351) = 161811.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.32

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ எனில், k-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு k என்பது ஒரு மிகை முழு எண். மேலும்,

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 4356$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = 4356 = 6\times 6\times 11\times 11$

வர்க்கமூலம் எடுக்க, $\frac{k(k+1)}{2} = 66$

$\Longrightarrow \quad k^2 + k - 132 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (k+12)(k-11) = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 11$ அல்லது $k = -12$

k என்பது ஒரு மிகை எண் என்பதால், $k = 11$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2.33

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 120$ எனில், $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 36100$ எனில், $1 + 2 + 3 + \cdots + n$-ன் மதிப்பைக் காண்க

தீர்வு

(i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 120$ எனவே, $\frac{n(n+1)}{2} = 120$

$\therefore \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 120^2 = 14400$

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 36100$

$\Longrightarrow \quad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 36100 = 19\times 19\times 10\times 10$

$\Longrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 190$

ஆகவே, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 190$.

எடுத்துக்காட்டு 2.34

11 செ.மீ, 12 செ.மீ, 13 செ.மீ, $\cdots$, 24 செ.மீ ஆகியனவற்றை முறையே பக்க அளவுகளாகக் கொண்ட 14 சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பு காண்க.

தீர்வு 14 சதுரங்களின் பரப்புகளின் கூடுதல் $11^2 + 12^2 + \cdots + 24^2$ என்ற தொடரை அமைக்கிறது.

சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பு $= 11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 24^2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 24^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2)$

$= \sum_{1}^{24} n^2 - \sum_{1}^{10} n^2$

$= \frac{24(24+1)(48+1)}{6} - \frac{10(10+1)(20+1)}{6}$

$= \frac{(24)(25)(49)}{6} - \frac{(10)(11)(21)}{6}$

$= 4900 - 385$

$= 4515$ ச.செ.மீ.

பயிற்சி 2.6

1. பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.

   (i) $1 + 2 + 3 + \cdots + 45$ (ii) $16^2 + 17^2 + 18^2 + \cdots + 25^2$

   (iii) $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$ (iv) $7 + 14 + 21 \cdots + 490$

   (v) $5^2 + 7^2 + 9^2 + \cdots + 39^2$ (vi) $16^3 + 17^3 + \cdots + 35^3$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு k-ன் மதிப்புக் காண்க.

   (i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 6084$ (ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 2025$

3. $1 + 2 + 3 + \cdots + p = 171$ எனில், $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + p^3$-யின் மதிப்பைக் காண்க.

4. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = 8281$ எனில், $1 + 2 + 3 + \cdots + k$-யின் மதிப்பைக் காண்க.

5. 12 செ.மீ, 13 செ.மீ, $\cdots$, 23 செ.மீ ஆகியனவற்றை முறையே பக்க அளவுகளாகக் கொண்ட 12 சதுரங்களின் மொத்தப் பரப்பளவுக் காண்க.

6. 16 செ.மீ, 17 செ.மீ, 18 செ.மீ, $\cdots$, 30 செ.மீ ஆகியனவற்றை முறையே பக்க அளவுகளாகக் கொண்ட 15 கனச்சதுரங்களின் கனஅளவுகளின் கூடுதல் காண்க.

பயிற்சி 2.7

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்யானக் கூற்றல்ல?

   (A) இயல் எண்களின் கணம் $\mathbb{N}$-ல் வரையறை செய்யப்பட்ட மெய்யெண் மதிப்புடையச் சார்பு ஒரு தொடர்வரிசையாகும்.

   (B) ஒவ்வொரு சார்பும் ஒரு தொடர் வரிசையினைக் குறிக்கும்.

   (C) ஒரு தொடர்வரிசை, முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

   (D) ஒரு தொடர்வரிசை, முடிவுறு எண்ணிக்கையில் உறுப்புகளைக் கொண்டிருக்கலாம்.

2. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையின் 8 ஆவது உறுப்பு

   (A) 25 (B) 24 (C) 23 (D) 21

3. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையில், உறுப்பு $\frac{1}{20}$ -க்கு அடுத்த உறுப்பு

   (A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{22}$ (C) $\frac{1}{30}$ (D) $\frac{1}{18}$

4. a, b, c, l, m என்பன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இருப்பின் $a - 4b + 6c - 4l + m =$

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

5. a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், $\frac{a-b}{b-c} =$

   (A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{c}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) 1

6. $100n + 10$ என்பது ஒரு தொடர்வரிசையின் n ஆவது உறுப்பு எனில், அது

(A) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை (B) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(C) ஒரு மாறிலித் தொடர்வரிசை

(D) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

7. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையிலுள்ளன. மேலும் $\frac{a_4}{a_7} = \frac{3}{2}$ எனில், 13வது உறுப்பு

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 0 (C) $12a_1$ (D) $14a_1$

8. $a_1, a_2, a_3, \cdots$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை எனில், $a_5, a_{10}, a_{15}, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையானது

(A) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(B) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(C) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

(D) ஒரு மாறிலித் தொடர்வரிசை

9. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள் $k + 2, 4k - 6, 3k - 2$ எனில், k -ன் மதிப்பு

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

10. $a, b, c, l, m. n$ என்பன கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்துள்ளன எனில், $3a + 7, 3b + 7, 3c + 7, 3l + 7, 3m + 7, 3n + 7$ என்ற தொடர்வரிசை

(A) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(B) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(C) ஒரு மாறிலித் தொடர்வரிசை

(D) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

11. ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் 3 ஆவது உறுப்பு 2 எனில், அதன் முதல் 5 உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன்

(A) 5^2 (B) 2^5 (C) 10 (D) 15

12. a, b, c என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், $\frac{a - b}{b - c} =$

(A) $\frac{a}{b}$ (B) $\frac{b}{a}$ (C) $\frac{a}{c}$ (D) $\frac{c}{b}$

13. $x, 2x + 2, 3x + 3$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையிலிருப்பின் $5x, 10x + 10, 15x + 15$ என்ற தொடர்வரிசையானது

(A) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை

(B) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை

(C) ஒரு மாறிலித் தொடர்வரிசை

(D) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

14. $-3, -3, -3, \cdots$ என்ற தொடர்வரிசையானது

(A) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை மட்டும்

(B) ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை மட்டும்

(C) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையும் அல்ல பெருக்குத் தொடர்வரிசையும் அல்ல

(D) ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை மற்றும் பெருக்குத் தொடர்வரிசை

15. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் நான்கு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 256, அதன் பொது விகிதம் 4 மற்றும் அதன் முதல் உறுப்பு மிகை எண் எனில், அந்தப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 3 வது உறுப்பு

(A) 8 (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{32}$ (D) 16

16. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $t_2 = \frac{3}{5}$ மற்றும் $t_3 = \frac{1}{5}$ எனில், அதன் பொதுவிகிதம்

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) 5

17. $x \neq 0$ எனில், $1 + \sec x + \sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x + \sec^5 x =$

(A) $(1 + \sec x)(\sec^2 x + \sec^3 x + \sec^4 x)$ (B) $(1 + \sec x)(1 + \sec^2 x + \sec^4 x)$

(C) $(1 - \sec x)(\sec x + \sec^3 x + \sec^5 x)$ (D) $(1 + \sec x)(1 + \sec^3 x + \sec^4 x)$

18. $t_n = 3 - 5n$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n ஆவது உறுப்பு எனில், அக்கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புக்களின் கூடுதல்

(A) $\frac{n}{2}[1 - 5n]$ (B) $n(1 - 5n)$ (C) $\frac{n}{2}(1 + 5n)$ (D) $\frac{n}{2}(1 + n)$

19. a^{m-n}, a^m, a^{m+n} என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம்

(A) a^m (B) a^{-m} (C) a^n (D) a^{-n}

20. $1 + 2 + 3 + . . . + n = k$ எனில், $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ என்பது

(A) k^2 (B) k^3 (C) $\frac{k(k+1)}{2}$ (D) $(k+1)^3$

நினைவில் கொள்க

- மெய்யெண்களின் ஒரு தொடர்வரிசை என்பது ஒரு ஒழுங்கான அமைப்பு அல்லது குறிப்பிட்ட வரிசையில் பட்டியலிடப்பட்ட மெய்யெண்களின் அமைப்பு ஆகும்.
- $F_1 = F_2 = 1$ மற்றும் $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n = 3, 4, \cdots$ என்ற தொடர்பிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும் தொடர்வரிசை பிபோனாகி தொடர்வரிசை எனப்படும். இதனை 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, $\cdots$ என எழுதலாம்
- $n \in \mathbb{N}$ மற்றும் d ஒரு மாறிலி எனக்கொண்டு $a_{n+1} = a_n + d$ எனுமாறு அமைந்த தொடர்வரிசை $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையாகும். இங்கு a_1 என்பது முதல் உறுப்பு மற்றும் d என்பது பொது வித்தியாசம். $t_n = a + (n-1)d \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பாகும் (n ஆவது உறுப்பு).

www.tntextbooks.in

- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ எனும் தொடர்வரிசையில் $a_{n+1} = a_n r$, இங்கு $r \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, என இருப்பின் அது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை எனப்படும். இங்கு a_1 என்பது முதலுறுப்பு மற்றும் மாறிலி r என்பது பொது விகிதம் ஆகும். மேலும், $t_n = ar^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொதுவான உறுப்பாகும் (n ஆவது உறுப்பு).
- ஒரு தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளை + எனும் கூட்டல் குறியால் இணைத்து கூடுதல்களாக அமைப்பதே தொடர் எனப்படும். அக்கூடுதல் குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளின் கூடுதல் எனில், அது முடிவுறு தொடர் எனப்படும். தொடரில் முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உறுப்புகள் இருந்தால், அது ஒரு முடிவுறாத் தொடர் ஆகும்.
- ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் a-யினை முதலுறுப்பாகவும், d என்பதை பொது வித்தியாசமாகவும் கொண்ட முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

  $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + l)$, இங்கு l என்பது கடைசி உறுப்பாகும்.
- ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1 \text{ எனும்போது} \\ na, & r = 1 \text{ எனும்போது} \end{cases}$$

- முதல் n இயல் எண்களின் கூடுதல் $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- முதல் n ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
- முதல் n ஒற்றைப்படை இயல் எண்களின் கூடுதல் (கடைசி உறுப்பு l கொடுக்கப்பட்டால்)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + l = \left(\frac{l+1}{2}\right)^2.$$

- முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- முதல் n இயல் எண்களின் கனங்களின் கூடுதல், $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

மெரின் மெர்சின் (Marin Mersenne) என்பவரின் பெயரால் அழைக்கப்படும் எண்ணான மெர்சின் எண் (Mersenne number) என்பது $M = 2^p - 1$ என்ற வடிவத்தில் அமைந்த ஒரு மிகை முழு எண் ஆகும். இங்கு p ஆனது ஒரு மிகை முழு எண். M ஒரு பகா எண் எனில், அது மெர்சின் பகா எண் என அழைக்கப்படும். மேலும், $2^p - 1$ ஆனது ஒரு பகா எண்ணாக இருந்தால், p-யும் ஒரு பகா எண்ணாக இருக்கும். இது வரையில் தெரிந்த மிகப்பெரிய பகா எண் $2^{43,112,609} - 1$ என்பதும் ஒரு மெர்சின் பகா எண் ஆகும்.

www.tntextbooks.in

3 இயற்கணிதம்

The human mind has never invented a labour-saving machine equal to algebra - Author unknown

- அறிமுகம்
- பல்லுறுப்புக்கோவைகள்
- தொகுமுறை வகுத்தல்
- மீ. பொ. வ. மற்றும் மீ. பொ. ம
- விகிதமுறு கோவைகள்
- வர்க்க மூலம்
- இருபடிச் சமன்பாடுகள்

அல்க்வாரிஸ்மி
(Al-Khwarizmi)
(780-850)
அரபுநாடு

கணிதத்திற்கும், புவியியலுக்கும் அல்க்வாரிஸ்மி அவர்களின் சீரிய பங்களிப்பானது, இயற்கணிதம் மற்றும் முக்கோணவியல் ஆகியனவற்றின் வளர்ச்சிக்கு அடிப்படையாக அமைந்தது. ஒருபடி மற்றும் இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு முதன் முதலில் இவர் முறையானத் தீர்வுகளை அளித்தார்.

அல்க்வாரிஸ்மி இயற்கணிதத்தினை உருவாக்கியவர் எனக் கருதப்படுகின்றார். கணிதத்தின் அடிப்படைச் செயல்களில் இவர் ஆற்றிய அரிய பணியானது, இந்திய-அரேபிய எண்ணுருக்களை அடிப்படையாகக் கொண்ட அரேபிய எண்ணுருக்களை மேற்கத்திய நாடுகளுக்கு அறிமுகப்படுத்தியமைக்கு ஏதுவாய் அமைந்தது.

3.1 அறிமுகம்

இயற்கணிதமானது கணிதத்தின் மிகத்தொன்மையானதும் முக்கியமானதுமான ஒரு பிரிவாகும். இது இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணுதலை உள்ளடக்கியது. மூன்றாம் நூற்றாண்டில் கிரேக்க கணிதவல்லுநர் டயோபாண்டஸ் (Diophantus) என்பவர் தன்னுடைய "அரித்மெடிக்" (Arithmetic) என்ற புத்தகத்தில் பல நடைமுறைக் கணக்குகளை குறிப்பிட்டுள்ளார். ஆறாம் மற்றும் ஏழாம் நூற்றாண்டுகளில் இந்திய கணிதவல்லுநர்களான ஆர்யபட்டா (Aryabhatta) மற்றும் பிரம்மகுப்தா (Brahmagupta) ஆகியோர் ஒருபடி மற்றும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் கையாண்டு, அவற்றிற்குத் தீர்வு காணும் பொது முறைகளை உருவாக்கினார்கள்.

இயற்கணிதத்தில் அடுத்த பெரும் வளர்ச்சி ஒன்பதாம் நூற்றாண்டில் அரேபிய கணித வல்லுநர்களால் ஏற்பட்டது. குறிப்பாக "Compendium on Calculation by Completion and Balancing" என்ற தலைப்புடைய அல்க்வாரிஸ்மி (Al-Khwarizmi) யின் புத்தகம் இயற்கணித வரலாற்றில் ஒரு முக்கியமான மைல்கல் ஆகும். அவர் பயன்படுத்திய "அல்ஜாப்ரா" என்ற வார்த்தை அல்ஜிப்ரா என்று இலத்தீன் மொழியில் மாற்றப்பட்டு, போட்டி அல்லது புணரமைப்பு என மொழி பெயர்க்கப்பட்டது. 13 ஆம் நூற்றாண்டில் லியோனார்டோ பிபோனாகியால் (Leonardo Fibonacci) எழுதப்பட்ட இயற்கணிதப் புத்தகங்கள் முக்கியமானவை. மேலும், அப்புத்தகங்கள் அனைவர் மீதும் தாக்கம் ஏற்படுத்தின.

மிகவும் ஈர்க்கப்பட்ட பிற இயற்கணித படைப்புகள் இத்தாலியரான லுகா பாசியோலி (Luca Pacioli) (1445 - 1517) மற்றும் ஆங்கில கணிதவியல் அறிஞர் இராபர்ட் ரெகார்ட் (Robert Recorde) (1510 - 1558) ஆகியோரால் படைக்கப்பட்டன. அடுத்த நூற்றாண்டுகளில் இயற்கணிதம் நுண்கணிதமாக மலர்ந்தது. 19ஆம் நூற்றாண்டில் ஆங்கில கணித வல்லுநர்களில்

முன்னோடியான பீகாக் (Peacock) (1791 - 1858) என்பவர் கணிதத்தின் அடிப்படைச் செயல்கள் மற்றும் இயற்கணிதத்தில் அடிகோள்களுக்கான சிந்தனையை உருவாக்கியவர். இதற்காகவே அவர் "இயற்கணிதத்தின் யூக்ளிட்'' என அழைக்கப்பட்டார். மற்றொரு ஆங்கில கணித அறிஞர் டி மார்கன் (De Morgan) (1806 - 1871) என்பவர் பீகாக்கின் பணியை விரிவாக்கி வரையறுக்கப்பட்ட நுண் குறியீடுகளைக் கொண்டு கணிதத்திற்கு தன் பங்களிப்பைச் செய்தார்.

இப்பாடப்பகுதியில் நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுதி மற்றும் இருபடிச் சமன்பாடுகள் ஆகியவற்றிற்கு தீர்வுகளைக் காணும் முறைகளில் கவனம் செலுத்துவோம்.

3.2 இரு மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமை நேரியல் சமன்பாடுகள் (System of linear equations in two unknowns)

$ax + b = 0,\ a \neq 0$, என்ற x-ல் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாட்டை 9ஆம் வகுப்பில் கற்றோம்.

a,b ஆகியவற்றில் குறைந்தபட்சம் ஒன்றாவது பூச்சியம் இல்லையெனில், $ax + by = c$ என்ற $x,\ y$ ஆகியவற்றில் அமைந்த நேரியல் சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். $x = x_0,\ y = y_0$ ஆகிய மதிப்புகள் நேரியல் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யுமானல், வரிசைச் சோடி (x_0, y_0) என்பது அச்சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு எனப்படும். வடிவியலில் $ax + by = c$ என்பது ஒரு தளத்தில் அமைந்த ஒரு நேர்க்கோடாகும். இந்நேர்க்கோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி (x, y)-ம் $ax + by = c$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாக அமையும். மறுதலையாக, சமன்பாட்டின் எந்த ஒரு தீர்வு (x, y)-ம் நேர்க்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். ஆதலால், $ax + by = c$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு முடிவிலி எண்ணிக்கையில் தீர்வுகள் உண்டு.

x, y-ல் அமைந்த முடிவுறு எண்ணிக்கையிலான நேரியல் சமன்பாடுகளை ஒருங்கே கருத்தில் கொண்டால், அவை x, y-ல் அமைந்த நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு (system of linear equations) அல்லது ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் (simultaneous equations) எனப்படும்.

வரையறை

$x = x_0$ மற்றும் $y = y_0$ என்பன தொகுப்பின் அனைத்து நேரியல் சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்கிறது எனில், வரிசைச் சோடி (x_0, y_0) ஆனது இரு மாறிலிகளில் அமைந்த நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வு எனப்படும்.

பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் ஒரு தொகுப்பினைக் கருதுவோம்.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

(i) இதிலுள்ள இரு சமன்பாடுகளையும் நிறைவு செய்யுமாறு குறைந்தபட்சம் ஒரு தீர்வாவது இருப்பின், இத்தொகுப்பு ஒவ்வுமை (consistent) தொகுப்பு எனப்படும்.

(ii) மேலேயுள்ள இரு சமன்பாடுகளையும் ஒருங்கே நிறைவு செய்யுமாறு எந்த ஒரு தீர்வும் இல்லையெனில், இத்தொகுப்பினை ஒவ்வாத (inconsistent) தொகுப்பு எனப்படும்.

www.tntextbooks.in

குறிப்புரை

(i) சமன்பாடு $ax + by = c$ என்பது ஒரு நேரியல் சமன்பாடு எனப்படுகிறது. ஏனெனில் மாறிகள் ஒரு படியை மட்டுமே கொண்டுள்ளன மற்றும் சமன்பாட்டில் மாறிகளின் பெருக்கற்பலன்கள் இல்லை.

(ii) இரண்டிற்கு மேற்பட்ட மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளையும் எடுத்துக் கொண்டு தீர்வுகளைப் பற்றி ஆராயலாம். இத்தகைய சமன்பாடுகளைப் பற்றி மேல் வகுப்புகளில் கற்க இருக்கிறோம்.

இரு மாறிகள் x மற்றும் y-களில் அமைந்த பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பினைக் கருதுவோம்.

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

இங்கு கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு சமன்பாட்டிலும் குறைந்த பட்சம் ஒரு மாறியாவது இருக்கும்படியாக, கெழுக்கள் a_1, b_1, a_2, b_2 ஆகியனவற்றில் சில கெழுக்கள் பூச்சியமாக இருக்கலாம், அல்லது சுருக்கமாக $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ என இருக்க வேண்டும்.

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றால் குறிக்கப்படும் நேர்க்கோடுகள், வடிவியல் முறையில் கீழ்க்கண்ட வகைகளில் அமையலாம்.

(i) இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றையொன்று ஒரே ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளலாம்.

(ii) இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டிக் கொள்ளாமலிருக்கலாம்.

(iii) இரண்டு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தி ஒரே நேர்க்கோடாகலாம்.

வகை (i)-ல் உள்ளவாறு வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியானது ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் தனித்த தீர்வு அல்லது ஒரே ஒரு தீர்வு (unique solution) ஆகும்.

வகை (ii)-ல் கூறியவாறு வெட்டிக்கொள்ளாவிட்டால் தொகுப்பிற்கு தீர்வு இல்லை (No solution). வகை (iii)-ன் படி பொருந்தும் நேர்க்கோடுகள் எனில், நேர்க்கோட்டின் மீது இருக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியும் தொகுப்பின் ஒரு தீர்வுக்கு இயைந்ததாக அமையும். எனவே, சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு முடிவிலி எண்ணிக்கையில் (infinitely many solutions) தீர்வுகள் இருக்கும்.

இப்போது இயற்கணித முறைகளைப் பயன்படுத்தி இரண்டு மாறிலிகளைக் கொண்ட நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு பின்வரும் முறைகளில் தீர்வு காண்போம்.

(i) நீக்கல் முறை (ii) குறுக்குப் பெருக்கல் முறை.

3.2.1 நீக்கல் முறை (Elimination method)

இம்முறையில் தொகுப்பிலுள்ள சமன்பாடுகளை பொருத்தமான வகையில் ஒன்று சேர்த்து இரண்டு மாறிகளில் ஒன்றினை நீக்குவோம். ஏதேனும் ஒரு மாறியை நீக்க பின்வரும் வழிகளில் நாம் முயற்சி செய்வோம்.

(i) நீக்கவிருக்கும் மாறியின் கெழுக்களை எண்ணளவில் சமப்படுத்தும் பொருட்டு சமன்பாடுகளின் உறுப்புகளை உரிய எண்களால் பெருக்க அல்லது வகுக்க வேண்டும்.

(ii) பெறப்பட்ட கெழுக்கள் மாறிய குறிகளைக் கொண்டிருப்பின், இரு சமன்பாடுகளையும் கூட்டி அம்மாறியை நீக்குக. ஒரே குறிகளைக் கொண்டிருப்பின் ஒன்றிலிருந்து மற்றொன்றை கழித்து அந்த மாறியை நீக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.1

தீர்: $3x - 5y = -16$, $2x + 5y = 31$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$$3x - 5y = -16 \quad (1)$$

$$2x + 5y = 31 \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளிலும் y-ன் கெழுக்கள் எண் மதிப்பில் சமமாகவும், எதிர்க்குறியுடனும் இருப்பதால், நாம் y-ஐ எளிதாக நீக்கலாம்.

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றைக் கூட்ட,

$$5x = 15 \implies x = 3. \quad (3)$$

$x = 3$ என்பதை (1) அல்லது (2)-ல் பிரதியிட y-க்குத் தீர்வு காண முடியும்.

$x = 3$ என்பதை (1)-ல் பிரதியிட, $3(3) - 5y = -16 \implies y = 5.$

$x = 3$ மற்றும் $y = 5$ என இரு சமன்பாடுகளிலும் பிரதியிட,

$3(3) - 5(5) = -16$ மற்றும் $2(3) + 5(5) = 31$ எனக் கிடைப்பதால்,

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பின் தீர்வு (3, 5) ஆகும்.

> **குறிப்பு**
> மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டில், தீர்வு காண்பதில் ஒரு மாறியில் அமைந்த சமன்பாடு (3)-ஐப் பெறுவதே முக்கியமான படியாகும். இங்கு மாறி y-ஐ நீக்கிவிட்டு x-ல் அமைந்த சமன்பாடு (3)-ஐப் பெற்றுள்ளோம். ஆகவே, மாறிகளில் ஒன்றை நீக்கி விட்டுப் பின்பு தொகுப்பிற்கு தீர்வு காணும் இம்முறை நீக்கல் முறை (Elimination method) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.2

11 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹ 50. மேலும், 8 பென்சில்கள் மற்றும் 3 அழிப்பான்களின் மொத்த விலை ₹ 38 எனில், ஒரு பென்சில் மற்றும் ஒரு அழிப்பான் விலையைக் காண்க.

தீர்வு ஒரு பென்சிலின் விலை ₹x என்க. ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹y என்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் படி, பின்வரும் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

$$11x + 3y = 50 \quad (1)$$

$$8x + 3y = 38 \quad (2)$$

(1)-ல் இருந்து (2)-ஐக் கழிக்க $3x = 12$, $x = 4$.

$x = 4$-ஐ (1)-ல் பிரதியிட, $11(4) + 3y = 50$ அதாவது, $y = 2$.

எனவே, $x = 4, y = 2$.

ஆகவே, ஒரு பென்சிலின் விலை ₹ 4 மற்றும் ஒரு அழிப்பானின் விலை ₹ 2 ஆகும்.

> **குறிப்பு**
> தீர்வாகப் பெறப்பட்ட x மற்றும் y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு சமன்பாடுகளிலும் பிரதியிட்டு, அவற்றை நிறைவு செய்கிறதா எனச் சரிபார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.3

நீக்கல் முறையில் தீர் : $3x + 4y = -25$, $2x - 3y = 6$

www.tntextbooks.in

தீர்வு
$$3x + 4y = -25 \quad (1)$$
$$2x - 3y = 6 \quad (2)$$

மாறி x-ஐ நீக்க, சமன்பாடு (1)-ஐ 2 ஆலும், சமன்பாடு (2)-ஐ -3 ஆலும் பெருக்குக.

$$(1) \times 2 \implies 6x + 8y = -50 \quad (3)$$
$$(2) \times -3 \implies -6x + 9y = -18 \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3) மற்றும் (4)- ஆகியவற்றைக் கூட்ட, $17y = -68 \implies y = -4$

$y = -4$ என சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட, $3x + 4(-4) = -25 \implies x = -3$

எனவே, தீர்வு $(-3, -4)$ ஆகும்.

குறிப்புரை

எடுத்துக்காட்டு 3.1-ல் செய்தபடி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளைக் கூட்டவோ அல்லது கழிக்கவோ செய்து, மாறிகளில் ஒன்றை நீக்குவது மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டு 3.3-ல் இயலாது. ஆகவே, குறியீடுகளை தவிர்த்து x அல்லது y-ன் கெழுக்களை எண்ணளவில் சமப்படுத்த நாம் சில உரிய மாற்றங்களைச் சமன்பாடுகளில் செய்யவேண்டும். பிறகு அச்சமன்பாடுகளுக்கு நீக்கல் முறையில் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.4

நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க: $101x + 99y = 499, \quad 99x + 101y = 501$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு

$$101x + 99y = 499 \quad (1)$$
$$99x + 101y = 501 \quad (2)$$

இங்கு சமன்பாடுகளை உரிய எண்களால் பெருக்கி, மாறிகளில் ஒன்றை நீக்க முடியும்.

இருப்பினும், ஒரு சமன்பாட்டிலுள்ள x-ன் கெழு, அடுத்த சமன்பாட்டின் y-ன் கெழுவிற்குச் சமமாக உள்ளது. இவ்வாறிருக்கும் போது இரு சமன்பாடுகளைக் கூட்டியும் கழித்தும் அதே தீர்வு கொண்ட புதிய சமன்பாட்டுத் தொகுப்பினைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

(1)-உடன் (2)-ஐக் கூட்ட $200x + 200y = 1000.$

இதை 200 ஆல் வகுக்க, $x + y = 5 \quad (3)$

(1)-லிருந்து (2)-ஐக் கழிக்க, $2x - 2y = -2$

இதை 2 ஆல் வகுக்க, $x - y = -1 \quad (4)$

சமன்பாடுகள் (3) மற்றும் (4) ஆகியனவற்றைத் தீர்க்க, $x = 2, \; y = 3$ எனப் பெறலாம்.

தேவையான தீர்வு $(2, 3)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.5

நீக்கல் முறையில் தீர்: $3(2x + y) = 7xy; \quad 3(x + 3y) = 11xy$

தீர்வு தொகுப்பில் xy உறுப்புகள் உள்ளதால் இத்தொகுப்பானது இரு நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பல்ல.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகள்

$$3(2x + y) = 7xy \quad (1)$$
$$3(x + 3y) = 11xy \quad (2)$$

$x = 0$ எனில், $y = 0$ மற்றும் $y = 0$ எனில், $x = 0$ ஆகும்.

எனவே, (0, 0) என்பது தொகுப்பின் ஒரு தீர்வு.

ஆகவே, மற்றொரு தீர்வு இருப்பின் அது $x \neq 0,\ y \neq 0$ என இருக்க வேண்டும்.

நாம் $x \neq 0,\ y \neq 0$ எனக் கொள்வோம்.

ஒவ்வொரு சமன்பாட்டின் இருபுறங்களையும் xy-ஆல் வகுக்க,

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 7 \quad \text{அதாவது,} \quad \frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 7 \qquad (3)$$

மற்றும் $$\frac{9}{x} + \frac{3}{y} = 11 \qquad (4)$$

இங்கு, $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ என்க.

தற்போது, (3) மற்றும் (4) ஆகியன பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளாக அமையும்.

$$3a + 6b = 7 \qquad (5)$$

$$9a + 3b = 11 \qquad (6)$$

b-ஐ நீக்குவதற்கு ஏற்ப, (6) $\times 2 \implies 18a + 6b = 22$ (7)

(5) -லிருந்து (7) ஐக் கழிக்க, $-15a = -15$. அதாவது, $a = 1$.

$a = 1$ என்பதை (5)-ல் பிரதியிட $b = \frac{2}{3}$. ஆகவே, $a = 1$ மற்றும் $b = \frac{2}{3}$

$a = 1$ எனில், $\frac{1}{x} = 1$. ஆகவே, $x = 1$

$b = \frac{2}{3}$ எனில், $\frac{1}{y} = \frac{2}{3}$. ஆகவே, $y = \frac{3}{2}$.

ஆகவே, தொகுப்பின் இரண்டு தீர்வுகள் $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ மற்றும் $(0, 0)$.

மாற்றுமுறை

$$3(2x + y) = 7xy \qquad (1)$$

$$3(x + 3y) = 11xy \qquad (2)$$

இப்பொழுது, (2) × 2 – (1) $\implies 15y = 15xy \implies 15y(1-x) = 0$. எனவே, $x = 1, y = 0$

$x = 1$ எனில், $y = \frac{3}{2}$ மேலும் $y = 0$ எனில், $x = 0$

ஆகவே, இரண்டு தீர்வுகள் $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ மற்றும் $(0, 0)$ ஆகும்.

குறிப்பு : $15y = 15xy$ என்பதை $15x = 15$ என எழுதினால், $y = 0$ என்பதை இழக்க நேரிடும்.

பயிற்சி 3.1

நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளைத் தீர்.

1. $x + 2y = 7,\ x - 2y = 1$
2. $3x + y = 8,\ 5x + y = 10$
3. $x + \frac{y}{2} = 4,\ \frac{x}{3} + 2y = 5$
4. $11x - 7y = xy,\ 9x - 4y = 6xy$
5. $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{20}{xy},\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{15}{xy},\ x \neq 0, y \neq 0$
6. $8x - 3y = 5xy,\ 6x - 5y = -2xy$
7. $13x + 11y = 70,\ 11x + 13y = 74$
8. $65x - 33y = 97,\ 33x - 65y = 1$
9. $\frac{15}{x} + \frac{2}{y} = 17,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{36}{5},\ x \neq 0, y \neq 0$
10. $\frac{2}{x} + \frac{2}{3y} = \frac{1}{6},\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 0,\ x \neq 0, y \neq 0$

நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பின் தீர்வுகளின் கணத்தின் எண் அளவை
(Cardinality of the set of solutions of the system of linear equations)

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad (1)$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ஆகிய இரு சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு கெழுக்கள் அனைத்தும் மெய்யெண்கள் மற்றும் $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

y-ன் கெழுக்களைச் சமப்படுத்த, நீக்கல் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

b_2 ஆல் சமன்பாடு (1)-ஐ மற்றும் b_1 ஆல் சமன்பாடு (2)-ஐ பெருக்க நாம் பெறுவது,

$$b_2 a_1 x + b_2 b_1 y + b_2 c_1 = 0 \quad (3)$$
$$b_1 a_2 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2 = 0 \quad (4)$$

சமன்பாடு (3)-லிருந்து சமன்பாடு (4) ஐக் கழிக்க,

$$(b_2 a_1 - b_1 a_2)x = b_1 c_2 - b_2 c_1 \implies x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (\text{இங்கு } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0)$$

x-ன் மதிப்பை (1) அல்லது (2)-ல் பிரதியிட,

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \text{ எனக் கிடைக்கும்.} \qquad (\text{இங்கு } a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0)$$

ஆகவே, $x = \dfrac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ மற்றும் $y = \dfrac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. (5)

இங்கு இரு நிலைகளை நாம் கருத்தில் கொள்ளுதல் வேண்டும்.

நிலை (i) $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ அதாவது $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ என இருப்பின்,

நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு இருக்கும்.

நிலை (ii) $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ அதாவது $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$, $a_2 \neq 0$ மற்றும் $b_2 \neq 0$ என்க.

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$ என்க. ஆகவே $a_1 = \lambda a_2$ மற்றும் $b_1 = \lambda b_2$

a_1 மற்றும் b_1 ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளை சமன்பாடு (1)-ல் பிரதியிட,

$$\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1 = 0 \quad (6)$$

$c_1 = \lambda c_2$ அதாவது, $\dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ என இருந்தால் மட்டுமே (6) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிற்குத் தீர்வு உண்டு. ஆகவே, $c_1 = \lambda c_2$ எனில், (1)-ன் எந்தவொரு தீர்வும் (2)-ன் தீர்வாக இருக்கும் மற்றும் (2)-ன் எந்தவொரு தீர்வும் (1)-ன் தீர்வாக இருக்கும்.

ஆகவே, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \lambda$ எனில், (1) மற்றும் (2) ஆகிய நேரியல் சமன்பாடுகளுக்கு முடிவிலி எண்ணிக்கையிலான தீர்வுகள் (infinitely many solutions) உண்டு.

மாறாக, $c_1 \neq \lambda c_2$ எனில், சமன்பாடு (1)-ன் எந்த ஒரு தீர்வும் சமன்பாடு (2)-ஐ நிறைவு செய்யாது. இதே போல சமன்பாடு (2)-ன் எந்த ஒரு தீர்வும் சமன்பாடு (1)-ஐ நிறைவு செய்யாது.

ஆகவே, $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில், சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்குத் தீர்வு ஏதுமில்லை.

www.tntextbooks.in

குறிப்பு மேலே விவரித்தவற்றை சுருக்கமாக பின்வருமாறு குறிப்பிடுவோம்.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \text{ இங்கு } a_1^2 + b_1^2 \neq 0 \ , \ a_2^2 + b_2^2 \neq 0,$$

ஆகிய சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு

(i) $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ அதாவது $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ எனில், ஒரேயொரு தீர்வு (unique solution) உண்டு.

(ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில், முடிவிலி எண்ணிக்கையில் தீர்வுகள் (infinitely many solutions) உண்டு.

(iii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ எனில், தீர்வு ஏதுமில்லை (no solution).

3.2.2 குறுக்குப் பெருக்கல் முறை (Method of cross multiplication)

x மற்றும் y ஆகிய இரு மாறிகளில் உள்ள ஒரு நேரியல் சமன்பாடுகளின் சோடிக்கு நீக்கல் முறையில் தீர்வு காணும்போது, கெழுக்கள் முறையாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு தீர்வுகள் பெறப்பட்டன. தீர்வு காணும் இம்முறையை மேலும் எளிமையாக்க குறுக்கு பெருக்கல் முறை என்ற மற்றொரு முறை உள்ளது. இம்முறையில் சமன்பாடுகளுக்கு எவ்வாறு தீர்வு காண்பது என்பதை இனி விவரிப்போம்.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad \text{இங்கு } a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0 \qquad (2)$$

என்ற தொகுப்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இச்சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு

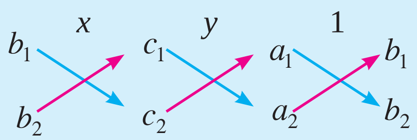
$x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ஆகியன தீர்வு என நிறுவியுள்ளோம்.

அதாவது, $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $\dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

மேலேயுள்ளவற்றை பின்வரும் அமைப்பில் எழுதலாம்.

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

மேலேயுள்ள தொடர்பை எளிதில் நினைவில் கொள்ள, பின்வரும் அம்புக்குறிப் படம் மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும்.



இரண்டு எண்களுக்கிடையேயுள்ள அம்புக்குறி, அவை பெருக்கப்படுகின்றன என்பதைக் காட்டுகிறது. கீழ்நோக்கிய அம்புகுறி காட்டும் எண்களின் பெருக்கல் பலனிலிருந்து மேல் நோக்கிய அம்புக்குறி காட்டும் எண்களின் பெருக்கல் பலனைக் கழிக்க வேண்டும்.

மேலேயுள்ளவாறு சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு தீர்வு காணும் முறையினை குறுக்குப் பெருக்கல் முறை (cross multiplication method) என்போம்.

மேலும், $\dfrac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \dfrac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \dfrac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ என எழுதும் போது

$b_1c_2 - b_2c_1$ அல்லது $c_1a_2 - c_2a_1$ ஆனது பூச்சியத்திற்குச் சமமாக இருக்கலாம். ஆனால் $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ என இருக்க வேண்டும்.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு

(i) $b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ மற்றும் $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ எனில், $x = 0$ ஆகும்.

(ii) $c_1a_2 - c_2a_1 = 0$ மற்றும் $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ எனில், $y = 0$ ஆகும்.

இனி, ஒரேயொரு (unique solution) தீர்வைக் கொண்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பை எடுத்துக் கொண்டு, அவற்றின் தீர்வினை குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.6

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி தீர்க்க.

$2x + 7y - 5 = 0$

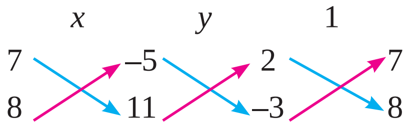
$-3x + 8y = -11$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு

$2x + 7y - 5 = 0$

$-3x + 8y + 11 = 0$

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்த, கெழுக்களை அம்புக்குறிப் படத்தில் காட்டியவாறு அமைக்கிறோம்.



$\Longrightarrow \dfrac{x}{(7)(11)-(8)(-5)} = \dfrac{y}{(-5)(-3)-(2)(11)} = \dfrac{1}{(2)(8)-(-3)(7)}$.

$\Longrightarrow \dfrac{x}{117} = \dfrac{y}{-7} = \dfrac{1}{37}$. எனவே, $x = \dfrac{117}{37}$, $y = -\dfrac{7}{37}$.

ஆகவே, தீர்வு $\left(\dfrac{117}{37}, -\dfrac{7}{37}\right)$ ஆகும்.

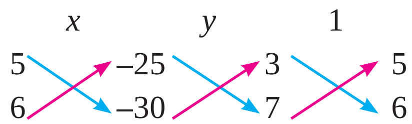
எடுத்துக்காட்டு 3.7

குறுக்கு பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் தொகுப்பினை தீர்க்க:

$3x + 5y = 25$, $\quad 7x + 6y = 30$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டின் தொகுப்பு $3x + 5y - 25 = 0$, $7x + 6y - 30 = 0$

இங்கு, குறுக்குப் பெருக்கலுக்குக் கெழுக்களை பின் வருமாறு எழுத,



எனவே, $\frac{x}{-150+150} = \frac{y}{-175+90} = \frac{1}{18-35} \implies \frac{x}{0} = \frac{y}{-85} = \frac{1}{-17}$.

ஆகவே, தீர்வு (0, 5) ஆகும்.

குறிப்பு

இங்கு $\frac{x}{0} = -\frac{1}{17}$ இன் பொருள் $x = \frac{0}{-17} = 0$. எனவே, $\frac{x}{0}$ என்பது ஒரு குறியீடு மட்டுமே பூச்சியத்தால் வகுப்பதாக கருதக்கூடாது. ஓர் எண்ணை பூச்சியத்தால் வகுப்பது என்பது கணிதவியலில் வரையறுக்கப்படுவதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 3.8

ஓர் ஈரிலக்க எண்ணில், ஒன்றாம் இட இலக்க எண், பத்தாம் இட இலக்க எண்ணைப் போல் இரு மடங்காக உள்ளது. இலக்கங்கள் இடம் மாறினால் கிடைக்கும் புதிய எண், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணைவிட 27 அதிகம் எனில், கொடுக்கப்பட்ட ஈரிலக்க எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு எண்ணின் பத்தாம் இட இலக்கம் மற்றும் ஒன்றாம் இட இலக்கங்கள் முறையே x மற்றும் y என்க. ஆகவே, எண்ணை விரிவாக்க முறையில் $10x + y$ என எழுதலாம் (எடுத்துக்காட்டாக, $35 = 10(3)+5$ என எழுதலாம்). இலக்கங்கள் இடம் மாறும் போது x-ஆனது ஒன்றாம் இட இலக்கமாகவும், y-ஆனது பத்தாம் இட இலக்கமாகவும் மாறுகின்றன. விரிவாக்க முறையில் புதிய எண் $10y + x$ என எழுதலாம். கொடுக்கப்பட்ட முதல் நிபந்தனையின்படி,

$$y = 2x \implies 2x - y = 0 \quad (1)$$

மேலும், கொடுக்கப்பட்ட இரண்டாவது நிபந்தனையின் படி,

$$(10y + x) - (10x + y) = 27$$

$$\implies \quad -9x + 9y = 27 \implies -x + y = 3 \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1) மற்றும் (2) ஆகியனவற்றைக் கூட்ட, $x = 3$.

சமன்பாடு (2)-ல் $x = 3$ எனப் பிரதியிட, $y = 6$.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட எண் $= (10\times3) + 6 = 36$.

எடுத்துக்காட்டு 3.9

ஒரு பின்னத்தின் தொகுதியை 3 ஆல் பெருக்கியும் பகுதியிலிருந்து 3 ஐக் குறைத்தால் கிடைக்கப்பெறும் பின்னம் $\frac{18}{11}$. ஆனால், அதே பின்னத்தின் தொகுதியுடன் 8 ஐக் கூட்டி, பகுதியை இருமடங்காக்கினால் கிடைக்கப் பெறும் பின்னம் $\frac{2}{5}$ எனில், அப்பின்னத்தைக் கண்டுபிடி.

தீர்வு பின்னத்தை $\frac{x}{y}$ எனக்கொள்க. கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளின் படி, நாம் பெறும் சமன்பாடுகள் முறையே

$$\frac{3x}{y-3} = \frac{18}{11} \text{ மற்றும் } \frac{x+8}{2y} = \frac{2}{5} \implies 11x = 6y - 18 \text{ மற்றும் } 5x + 40 = 4y$$

எனவே,
$$11x - 6y + 18 = 0 \quad (1)$$
$$5x - 4y + 40 = 0 \quad (2)$$

www.tntextbooks.in

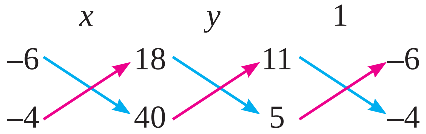
(1) மற்றும் (2)-களின் கெழுக்களை $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாடுகளின் கெழுக்களுடன் ஒப்பிட

$$a_1 = 11,\ b_1 = -6,\ c_1 = 18\ ;\quad a_2 = 5,\ b_2 = -4,\quad c_2 = 40.$$

எனவே, $a_1b_2 - a_2b_1 = (11)(-4) - (5)(-6) = -14 \neq 0.$

ஆகவே, இத்தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு உள்ளது.

கெழுக்களை குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் எழுதும் போது,



$$\Longrightarrow \frac{x}{-240+72} = \frac{y}{90-440} = \frac{1}{-44+30} \quad \Longrightarrow \frac{x}{-168} = \frac{y}{-350} = \frac{1}{-14}$$

$\Longrightarrow$ $x = \frac{168}{14} = 12$; $y = \frac{350}{14} = 25$. ஆகவே, தேவையான பின்னம் $= \frac{12}{25}$.

எடுத்துக்காட்டு 3.10

8 ஆண்கள் மற்றும் 12 சிறுவர்கள் சேர்ந்து ஒரு வேலையை 10 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். அதே வேலையை 6 ஆண்கள் மற்றும் 8 சிறுவர்கள் சேர்ந்து 14 நாட்களில் செய்து முடிப்பர். ஒரு ஆண் தனியாக அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பார்? ஒரு சிறுவன் தனியாக அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் செய்து முடிப்பான்?

தீர்வு ஒரு ஆண் ஒரு வேலையை தனியாக செய்து முடிக்க ஆகும் நாட்கள் x என்க.

எனவே, ஒரு ஆண் ஒரு நாளில் செய்யும் வேலையின் அளவு $\frac{1}{x}$ பங்கு.

ஒரு சிறுவன் அவ்வேலையை தனியாக செய்து முடிக்க ஆகும் நாட்கள் y என்க.

எனவே, ஒரு சிறுவன் ஒரு நாளில் செய்யும் வேலையின் அளவு $\frac{1}{y}$ பங்கு. இங்கு, $x \neq 0$ மற்றும் $y \neq 0$ என்பது தெளிவு.

8 ஆண்கள் மற்றும் 12 சிறுவர்கள் சேர்ந்து ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை = $\frac{1}{10}$

ஆகவே, $\frac{8}{x} + \frac{12}{y} = \frac{1}{10}$ (1)

6 ஆண்கள், 8 சிறுவர்கள் சேர்ந்து ஒரு நாளில் செய்யும் வேலை = $\frac{1}{14}$ ஆகும்.

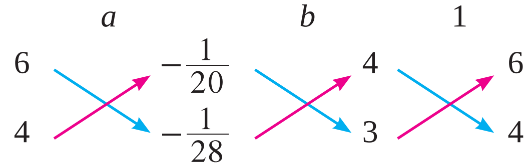
ஆகவே, $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{1}{14}$ (2)

$a = \frac{1}{x}$ எனவும் $b = \frac{1}{y}$ எனவும் கொள்க.

(1) $\Longrightarrow$ $8a + 12b = \frac{1}{10}$ $\Longrightarrow$ $4a + 6b - \frac{1}{20} = 0.$ (3)

(2) $\Longrightarrow$ $6a + 8b = \frac{1}{14}$ $\Longrightarrow$ $3a + 4b - \frac{1}{28} = 0.$ (4)

சமன்பாடுகள் (3) மற்றும் (4) ஆகியவற்றின் கெழுக்களை குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் எழுத,



$$\Longrightarrow \frac{a}{-\frac{3}{14}+\frac{1}{5}} = \frac{b}{-\frac{3}{20}+\frac{1}{7}} = \frac{1}{16-18}. \Longrightarrow \frac{a}{-\frac{1}{70}} = \frac{b}{-\frac{1}{140}} = \frac{1}{-2}.$$

எனவே, $a = \frac{1}{140}$, $b = \frac{1}{280}$. ஆகவே, $x = \frac{1}{a} = 140$, $y = \frac{1}{b} = 280$.

ஆகவே, ஒரு ஆண் தனியாக அவ்வேலையை முடிக்க 140 நாட்களும், ஒரு சிறுவன் தனியாக அதே வேலையை முடிக்க 280 நாட்களும் ஆகும்.

பயிற்சி 3.2

1. குறுக்குப் பெருக்கல் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்புகளைத் தீர்க்க.

   (i) $3x + 4y = 24$, $20x - 11y = 47$ (ii) $0.5x + 0.8y = 0.44$, $0.8x + 0.6y = 0.5$

   (iii) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ (iv) $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$, $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$

2. பின்வரும் கணக்குகளுக்கானச் சமன்பாடுகளை அமைத்து, அவற்றின் தீர்வுகளைக் காண்க.

   (i) ஒரு எண் மற்றொரு எண்ணின் மூன்று மடங்கைவிட 2 அதிகம். சிறிய எண்ணின் 4 மடங்கானது பெரிய எண்ணைவிட 5 அதிகம் எனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

   (ii) இரு நபர்களின் வருமானங்களின் விகிதம் 9 : 7. அவர்களின் செலவுகளின் விகிதம் 4 : 3. ஒவ்வொருவரும் மாதமொன்றுக்கு ₹ 2000 சேமிக்க முடிந்தால், அவர்களுடைய மாதாந்திர வருமானத்தைக் காண்க.

   (iii) ஒரு ஈரிலக்க எண்ணின் மதிப்பு அதன் இலக்கங்களின் கூடுதல் போல் 7 மடங்கு உள்ளது. இலக்கங்களை இடமாறுதல் செய்ய கிடைக்கும் எண் கொடுக்கப்பட்ட எண்ணைவிட 18 குறைவு எனில், அவ்வெண்ணைக் காண்க.

   (iv) 3 நாற்காலிகள் மற்றும் 2 மேசைகளின் மொத்த விலை ₹ 700. மேலும் 5 நாற்காலிகள் மற்றும் 3 மேசைகளின் மொத்தவிலை ₹ 1100 எனில், 2 நாற்காலிகள் மற்றும் 3 மேசைகளின் மொத்தவிலையைக் காண்க.

   (v) ஒரு செவ்வகத்தின் நீளத்தை 2 செ. மீ அதிகரித்து அகலத்தை 2 செ.மீ குறைத்தால், அதன் பரப்பு 28 ச. செ.மீ குறைகிறது. நீளத்தை 1 செ.மீ குறைத்து அகலத்தை 2 செ.மீ அதிகரித்தால், செவ்வகத்தின் பரப்பு 33 ச. செ. மீ அதிகரிக்கும் எனில், செவ்வகத்தின் பரப்பைக் காண்க.

   (vi) சீரான வேகத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தை ஒரு தொடர் வண்டி குறிப்பிட்ட நேரத்தில் கடந்தது. தொடர் வண்டியின் வேகம் மணிக்கு 6 கி.மீ என அதிகரிக்கப்பட்டிருந்தால் அத்தூரத்தைக் கடக்க, குறிப்பிடப்பட்டிருந்த நேரத்தை விட 4 மணி நேரம் குறைவாக அத்தொடர் வண்டி எடுத்துக் கொண்டிருக்கும். தொடர் வண்டியின் வேகம் மணிக்கு 6 கி.மீ என குறைக்கப்பட்டிருந்தால், அதே தூரத்தைக் கடக்க குறிப்பிடப்பட்டிருந்த நேரத்தைவிட 6 மணிநேரம் அதிகரித்திருக்கும் எனில், பயண தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

3.3 இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகள் (Quadratic Polynomials)

$a_0 \neq 0$ மற்றும் $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ என்பன மெய்யெண்கள் எனில்,
$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ என்பது x-ல் அமைந்த படி n ஐக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாகும்.

மாறி x-ல் படி 2 உள்ள பல்லுறுப்புக்கோவை, இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை (Quadratic Polynomial) எனப்படும். மேலும், மெய் மாறிலிகளை பூச்சியத்தைப் படியாகக் கொண்ட கோவைகளாகக் கருதலாம். பொதுவாக இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையை $p(x) = ax^2 + bx + c$ என எழுதுவோம். இங்கு $a \neq 0$, b மற்றும் c என்பன மெய்யெண் மாறிலிகள்.

எடுத்துக்காட்டாக, $x^2 + x + 1$, $3x^2 - 1$, $-\frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{7}{3}$ ஆகியன இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளாகும்.

$x = k$-ல், $p(x) = ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் மதிப்பினை x-க்குப் பதிலாக k ஐப் பிரதியிட்டுப் பெறலாம். ஆகவே, $x = k$-ல் $p(x)$-ன் மதிப்பு $p(k) = ak^2 + bk + c$ ஆகும்.

3.3.1 பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் (Zeros of Polynomials)

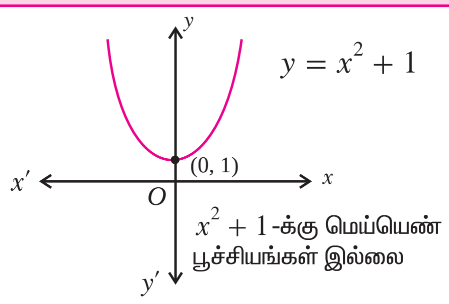
$p(x)$ என்ற ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையை எடுத்துக்கொள்க. $p(k) = 0$ எனுமாறு அமையும் மெய்யெண் k-ஐ பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-ன் பூச்சியம் (zero) என்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

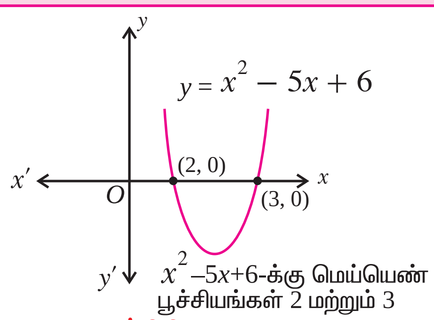
$q(x) = x^2 - 5x + 6$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் 2 மற்றும் 3 ஆகும். ஏனெனில் $q(2) = 0$ மற்றும் $q(3) = 0$.

குறிப்புரை

சில பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு மெய்யெண்களாலான பூச்சியங்கள் இல்லாமல் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $p(x) = x^2 + 1$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மெய்யெண்களில் பூச்சியங்கள் இல்லை. அதாவது $p(k) = 0$ என்றவாறு k என்ற எந்தவொரு மெய்யெண்ணும் இல்லை. வடிவியலின்படி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியம் என்பது பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடமும் x-அச்சும் வெட்டிக் கொண்டால், வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியின் x ஆயத்தொலைவு ஆகும். படங்கள் 3.1 மற்றும் 3.2 ஆகியவற்றைப் பார்க்கவும்



படம் 3.1



படம் 3.2

www.tntextbooks.in

3.3.2 இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் உள்ள தொடர்பு (Relationship between zeros and Coefficients of a Quadratic Polynomial)

பொதுவாக, $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் α மற்றும் β எனில், காரணித் தேற்றத்தின்படி $x - \alpha$ மற்றும் $x - \beta$ என்பன $p(x)$-ன் காரணிகளாகும்.

எனவே, $ax^2 + bx + c = k(x-\alpha)(x-\beta)$ இங்கு k ஒரு பூச்சியமற்ற மாறிலி ஆகும்.

$$= k[x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta]$$

இருபுறமும் x^2, x-ன் கெழுக்களையும் மற்றும் மாறிலிகளையும் ஒப்பிடும் போது,

$a = k,\ b = -k(\alpha+\beta)$ மற்றும் $c = k\alpha\beta$ என கிடைக்கிறது.

> $p(x) = ax^2 + bx + c$-ன் கெழுக்களுக்கும், பூச்சியங்களுக்கும் இடையேயான அடிப்படைத் தொடர்பு
>
> பூச்சியங்களின் கூடுதல், $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$
>
> பூச்சியங்களின் பெருக்கற்பலன் $\alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

எடுத்துக்காட்டு 3.11

$x^2 + 9x + 20$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களைக் காண்க. பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள அடிப்படைத் தொடர்புகளைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு $p(x) = x^2 + 9x + 20 = (x+4)(x+5)$ என்க.

$p(x) = 0 \implies (x+4)(x+5) = 0$

$\therefore\quad x = -4$ அல்லது $x = -5$

தற்போது, $p(-4) = (-4+4)(-4+5) = 0$ மற்றும்

$p(-5) = (-5+4)(-5+5) = 0$

ஆகவே $p(x) = x^2 + 9x + 20$ -ன் பூச்சியங்கள் –4 மற்றும் –5.

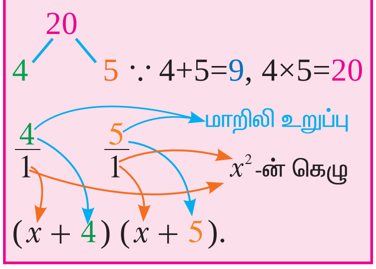
பூச்சியங்களின் கூடுதல் = –9, பெருக்கற்பலன் = 20 (1)

அடிப்படைத் தொடர்புகளிலிருந்து,

பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}} = -\dfrac{9}{1} = -9$ (2)

பூச்சியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}} = \dfrac{20}{1} = 20$ (3)

இவ்வாறு, அடிப்படைத் தொடர்புகள் சரிபார்க்கப்பட்டன.

> **குறிப்புரை**
>
> $x^2 + 9x + 20$-ன் காரணிகளைப் பின்வரும் முறையிலும் காணலாம்.
>
> 
>

குறிப்பு

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x) = ax^2 + bx + c$-க்கு அதிகபட்சமாக இரு பூச்சியங்கள் இருக்கலாம். ஏதேனும் $a \neq 0$ என்பதற்கு $a(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta)$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு α மற்றும் β என்ற பூச்சியங்கள் உள்ளன. a ஆனது பூச்சியமற்ற எந்த ஒரு மெய்யெண்ணாகவும் இருக்கலாம் என்பதால் α மற்றும் β-களை பூச்சியங்களாகக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 3.12

ஒரு இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களின் கூடுதல் -4 மற்றும் அதன் பெருக்கற்பலன் 3 எனில், அக்கோவையைக் காண்க.

தீர்வு இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்கள் α மற்றும் β என்க

$\alpha + \beta = -4$ மற்றும் $\alpha\beta = 3$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தேவையான பல்லுறுப்புக் கோவைகளில் ஒன்று,

$$p(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$
$$= x^2 - (-4)x + 3 = x^2 + 4x + 3 \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 3.13

$x = \frac{1}{4}$ மற்றும் $x = -1$ என்ற பூச்சியங்களைக் கொண்ட இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையைக் காண்க.

தீர்வு

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-ன் பூச்சியங்கள் α மற்றும் β என்க. பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பின் வாயிலாக,

$$p(x) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$
$$= x^2 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)x + \left(\frac{1}{4}\right)(-1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

மாற்று முறை

தேவையான பல்லுறுப்புக்கோவையினை நேரடியாக பின்வருமாறு காணலாம் :

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(x+1)$$
$$= x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}.$$

பூச்சியமற்ற மெய்யெண்ணால் $p(x)$-ஐப் பெருக்கி $\frac{1}{4}$ மற்றும் -1-களை பூச்சியமாகக் கொண்ட பல பல்லுறுப்புக்கோவைகளைப் பெறலாம்.

குறிப்பு

$4x^2 + 3x - 1$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களும் $\frac{1}{4}$ மற்றும் -1 ஆகும்.

$20x^2 + 15x - 5$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களும் $\frac{1}{4}$ மற்றும் -1 ஆகும்.

$4kx^2 + 3kx - k$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் பூச்சியங்களும் $\frac{1}{4}$ மற்றும் -1 ஆகும், $k \in \mathbb{R}$.

பயிற்சி 3.3

1. பின்வரும் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பூச்சியங்களைக் காண்க. பூச்சியங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்புகளைச் சரிபார்க்க.

(i) $x^2 - 2x - 8$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$ (iii) $6x^2 - 3 - 7x$ (iv) $4x^2 + 8x$

(v) $x^2 - 15$ (vi) $3x^2 - 5x + 2$ (vii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$ (viii) $x^2 + 2x - 143$

2. பின்வரும் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சோடி எண்களை முறையே பூச்சியங்களின் கூடுதலாகவும் மற்றும் அவைகளின் பெருக்கற்பலனாகவும் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவையைக் காண்க.

(i) 3, 1 (ii) 2, 4 (iii) 0, 4 (iv) $\sqrt{2}, \frac{1}{5}$

(v) $\frac{1}{3}, 1$ (vi) $\frac{1}{2}, -4$ (vii) $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ (viii) $\sqrt{3}, 2$

3.4 தொகுமுறை வகுத்தல் (Synthetic Division)

29 ஐ 7ஆல் வகுக்கும் போது ஈவு 4 மற்றும் மீதி 1 என நமக்குத் தெரியும். ஆகவே 29 = 4(7)+1. இதைப்போலவே பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-ஐ மற்றொரு பல்லுறுப்புக்கோவை $q(x)$ ஆல் வகுத்தால் நமக்கு ஈவும், மீதியும் கிடைக்கும். இவ்வாறு $p(x)$ = (ஈவு) $q(x)$+ மீதி

அதாவது $p(x)=s(x)q(x)+r(x)$. இங்கு $s(x)$ஆனது மீதி மற்றும் $r(x)$-ன் படி $<q(x)$-ன் படி, இது வகுத்தல் படிமுறை (Division Algorithm) எனப்படும்.

$q(x)= x+a$ எனில், $r(x)$-ன் படி = 0 ஆகும். அதாவது, $r(x)$ ஒரு மாறிலியாக இருக்கும்.

ஆகவே, $p(x)= s(x)(x+a)+r$ இங்கு r ஒரு மாறிலியாகும்.

இப்பல்லுறுப்புக்கோவையில் $x=-a$ எனப்பிரதியிட,

$p(-a) = s(-a)(-a+a)+r \implies r = p(-a)$.

ஆகவே, $p(x)$-ஐ $x+a$ ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதியை, $x=-a$ என $p(x)$-ல் பிரதியிட்டுக் காணலாம். அதாவது, மீதி $p(-a)$ ஆகும்.

வகுத்தல் படிமுறை :

$p(x)$ என்பது வகுபடும் கோவையாகவும், $q(x)$ என்பது வகுத்தியாகவும் இருந்தால், வகுத்தல் படிமுறையின்படி,

$p(x) = s(x)q(x)+r(x)$ என எழுதலாம்.

இதிலிருந்து பின்வரும் முடிவுகளைப் பெறுகிறோம்.

(i) $q(x)$ என்பது ஒருபடிக் கோவை எனில், மீதி $r(x)= r$ ஒரு மாறிலியாகும்.

(ii) $q(x)$-ன் படி 1 எனில், $p(x)$-ன் படி = ($s(x)$-ன் படி) + 1

(iii) $p(x)$-ஐ $x+a$ ஆல் வகுக்கும் போது, மீதியானது $p(-a)$ ஆகும்.

(iv) $r=0$ எனில், $p(x)$-ஐ $q(x)$ வகுக்கிறது அல்லது $p(x)$-ன் ஒரு காரணி $q(x)$ ஆகும்.

குறிப்புரை

பல்லுறுப்புக்கோவையை நேரியல் பல்லுறுப்புக்கோவையால் வகுக்கும் சிறப்பான ஒரு முறையினை பாலோ ரஃபின் (Paolo Ruffin) என்பவர் 1809 ஆம் ஆண்டில் அறிமுகப்படுத்தினார். அம்முறை தொகுமுறை வகுத்தல் **(synthetic division)** எனப்படும். ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையை ஒருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையினால் வகுக்க, அப்பல்லுறுப்புக்கோவையில் உள்ள கெழுக்களை மட்டுமே பயன்படுத்துவது, தொகு முறை வகுத்தலின் சிறப்பாகும்.

Paolo Ruffin
(1765-1822, Italy)

www.tntextbooks.in

தொகுமுறை வகுத்தலை ஒரு எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குவோம்.

வகுக்கப்படும் பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4$ மற்றும் வகுத்தி $q(x) = x + 2$ என்க. ஈவு $s(x)$ மற்றும் மீதி r ஆகியவற்றை பின்வருமாறு கண்டுபிடிக்கலாம்.

படி 1 கொடுக்கப்பட்ட வகுக்கப்படும் மற்றும் வகுக்கும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளை x-ன் அடுக்குகளைப் பொறுத்து இறங்கு வரிசையில் எழுதுக. படத்தில் காட்டியவாறு வகுக்கப்படும் கோவையின் கெழுக்களை முதலில் வரிசையில் எழுதுக. விடுபட்ட உறுப்புகளுக்கு 0 என எழுதுக.

$x^3 + 2x^2 - x - 4$ → 1, 2, –1, –4

படி 2 வகுக்கும் கோவையின் வகுத்தியின் பூச்சியத்தைக் காண்க.

படி 3 இரண்டாவது வரிசையில் முதலில் 0 எழுதுக. படத்தில் காட்டியவாறு 2-ஆம் மற்றும் 3-ஆம் வரிசைகளை தக்க எண்களால் நிரப்புக.

–2	1	2	–1	–4
	0	$1\times(-2)$ → –2	$0\times(-2)$ → 0	$-1\times(-2)$ → 2
	1+0 = 1	2+(–2) = 0	–1+0 = –1	–4+2 = –2 ⟶ மீதி

படி 4 மூன்றாவது வரிசையில் கடைசி எண் மீதியாகவும் மற்றவை ஈவின் கெழுக்களாகவும் அமையும். ஆகவே ஈவு $x^2 - 1$ மற்றும் மீதி -2.

எடுத்துக்காட்டு 3.14

$x^3 + x^2 - 7x - 3$ என்பதை $x - 3$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.

தீர்வு $p(x) = x^3 + x^2 - 7x - 3$ என்க. வகுக்கும் கோவையின் பூச்சியம் + 3 ஆகும்.

3	1	1	–7	–3
	0	3	12	15
	1	4	5	12 ⟶ மீதி

$\therefore$ $p(x)$ ஐ $x - 3$ ஆல் வகுக்கப்படும் போது ஈவு $x^2 + 4x + 5$ மற்றும் மீதி 12.

எடுத்துக்காட்டு 3.15

$2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ -ஐ $2x + 1$ ஆல் வகுக்கும் போது, $x^3 + ax^2 - bx - 6$ என்பது ஈவானால், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் மற்றும் மீதியையும் காண்க.

தீர்வு $p(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6$ என்க.

வகுக்கும் கோவை $2x + 1$. எனவே, வகுக்கும் கோவையின் பூச்சியம் $x = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$	2	1	–14	–19	6
	0	–1	0	7	6
	2	0	–14	–12	12 ⟶ மீதி

ஆகவே, $2x^4 + x^3 - 14x^2 - 19x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^3 - 14x - 12) + 12$

$= (2x + 1)\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12) + 12$

எனவே, ஈவு = $\frac{1}{2}(2x^3 - 14x - 12)$ மற்றும் மீதி = 12

அதாவது, ஈவு = $x^3 - 7x - 6$ மற்றும் மீதி = 12

இப்போது, கொடுக்கப்பட்ட ஈவு $x^3 + ax^2 - bx - 6$ உடன் $x^3 - 7x - 6$-ஐ ஒப்பிடுகையில் $a = 0, b = 7$ ஆகவே, $a = 0, b = 7$ மற்றும் மீதி = 12 ஆகும்.

பயிற்சி 3.4

1. தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றிற்கு ஈவு மற்றும் மீதி காண்க.
   (i) $(x^3 + x^2 - 3x + 5) \div (x - 1)$ (ii) $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 5) \div (x + 3)$
   (iii) $(3x^3 + 4x^2 - 10x + 6) \div (3x - 2)$ (iv) $(3x^3 - 4x^2 - 5) \div (3x + 1)$
   (v) $(8x^4 - 2x^2 + 6x - 5) \div (4x + 1)$ (vi) $(2x^4 - 7x^3 - 13x^2 + 63x - 48) \div (2x - 1)$
2. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 29$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையை $x + 4$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $x^3 - ax^2 + bx + 6$ எனில் a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும் மற்றும் மீதியையும் காண்க
3. $8x^4 - 2x^2 + 6x - 7$ என்பதை $2x + 1$ ஆல் வகுக்கக் கிடைக்கும் ஈவு $4x^3 + px^2 - qx + 3$ எனில், p, q ஆகியவற்றின் மதிப்புகளையும், மீதியையும் காண்க.

3.4.1 தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி காரணிப்படுத்தல் (Factorization using synthetic division)

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளை எவ்வாறு காரணிப்படுத்துவதென ஒன்பதாம் வகுப்பில் கற்றோம். இப்பாடப்பகுதியில் தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி மூன்றாம்படி பல்லுறுப்புக்கோவையை எவ்வாறு காரணிப்படுத்துவது எனக் கற்போம்.

படி 3-ல் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-க்கு ஒருபடிக் காரணி ஒன்றை தெரிந்துக் கொண்ட பிறகு தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி $p(x)$-ன் இருபடிக் காரணியைக் காணலாம். மேலும், அந்த இருபடிக் காரணியை பிரிக்க இயலுமெனில், அதனை ஒருபடிக் காரணிகளின் பெருக்கல்பலனாக எழுதலாம். ஆகவே, படி 3-ல் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவையை காரணிப்படுத்த முடியும் எனில், தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி அக்கோவையைக் காரணிப்படுத்தலாம்.

குறிப்பு

(i) ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-க்கு $p(a) = 0$ எனில், எனில் மட்டுமே $x = a$ என்பது அதன் பூச்சியமாகும்.

(ii) $x - a$ ஆனது $p(x)$-க்கு ஒரு காரணி எனில், எனில் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும். (காரணித் தேற்றம்)

(iii) $p(x)$-ன் மாறிலியையும் சேர்த்து எல்லா உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியம் எனில், எனில் மட்டுமே $p(x)$-க்கு $x-1$ ஒரு காரணி ஆகும்.

(iv) $p(x)$-ன் மாறிலியையும் சேர்த்து இரட்டைப்படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலானது ஒற்றைப்படை அடுக்குகளில் உள்ள உறுப்புகளின் கெழுக்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், எனில் மட்டுமே $x+1$ ஆனது $p(x)$-க்கு ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.16

(i) $x^3-6x^2+11x-6$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு $x-1$ ஒரு காரணி என நிறுவுக.

(ii) $x^3+6x^2+11x+6$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு $x+1$ ஒரு காரணி என நிறுவுக.

தீர்வு

(i) $p(x) = x^3-6x^2+11x-6$ என்க.

$p(1) = 1-6+11-6 = 0$ (இங்கு கெழுக்களின் கூடுதலும் 0 என்பதை அறிக)

ஆகவே, $p(x)$-க்கு $(x-1)$ ஒரு காரணி ஆகும்.

(ii) $q(x) = x^3+6x^2+11x+6$ என்க.

$q(-1) = -1+6-11+6 = 0$. ஆகவே $x+1$ ஒரு காரணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.17

$2x^3-3x^2-3x+2$ எனும் பல்லுறுப்புக்கோவையை ஒருபடிக் காரணிகளாக காரணிப்படுத்துக.

தீர்வு $p(x) = 2x^3-3x^2-3x+2$ என்க.

$p(1) = -2 \neq 0$ (கெழுக்களின் கூடுதல் பூச்சியமல்ல)

ஆகவே, $p(x)$-க்கு $(x-1)$ ஒரு காரணி அல்ல. இருப்பினும்,

$p(-1) = 2(-1)^3-3(-1)^2-3(-1)+2 = 0$.

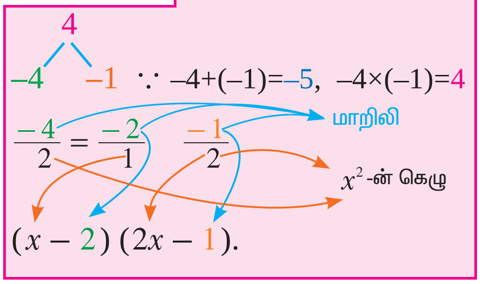
எனவே, $p(x)$-க்கு $x+1$ ஒரு காரணி ஆகும்.

தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி மற்ற காரணிகளைக் காணலாம்.

–1	2	–3	–3	2
	0	–2	5	–2
	2	–5	2	0 ⟶ மீதி

குறிப்புரை

$2x^2-5x+2$-ஐ பின்வரும் முறையிலும் காரணிப்படுத்தலாம்.



இவ்வாறு, $p(x) = (x+1)(2x^2-5x+2)$

மேலும், $2x^2-5x+2 = 2x^2-4x-x+2 = (x-2)(2x-1)$.

ஆகவே, $2x^3-3x^2-3x+2 = (x+1)(x-2)(2x-1)$.

எடுத்துக்காட்டு 3.18

காரணிப்படுத்துக: $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

தீர்வு $p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ என்க.

$p(1) \neq 0$ மற்றும் $p(-1) \neq 0$. ஆகவே, $x+1$ மற்றும் $x-1$ ஆகியன $p(x)$-க்கு காரணிகளல்ல. ஆகவே, x-க்கு வேறு மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு $p(x)$-ன் பூச்சியங்களைக் காணலாம்.

$x = 2$ ஆக இருக்கும்பொழுது $p(2) = 0$. ஆகவே, $p(x)$-க்கு $x-2$ ஒரு காரணி ஆகும். தொகுமுறை வகுத்தலைப் பயன்படுத்தி,

2	1	–3	–10	24
	0	2	–2	–24
	1	–1	–12	0 → மீதி.

$\therefore$ மற்றொரு காரணி $x^2 - x - 12$.

மேலும், $x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 = (x-4)(x+3)$

ஆகவே, $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)(x+3)(x-4)$

பயிற்சி 3.5

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளை காரணிப்படுத்துக.

(i) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (ii) $4x^3 - 7x + 3$ (iii) $x^3 - 23x^2 + 142x - 120$

(iv) $4x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ (v) $x^3 - 7x + 6$ (vi) $x^3 + 13x^2 + 32x + 20$

(vii) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$ (viii) $x^3 - 5x + 4$ (ix) $x^3 - 10x^2 - x + 10$

(x) $2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$ (xi) $x^3 + x^2 + x - 14$ (xii) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

3.5 மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) மற்றும் மீச்சிறு பொது மடங்கு (மீ.பொ.ம)

3.5.1 மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ. பொ. வ) (Greatest Common Divisor - GCD)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகள் ஒவ்வொன்றையும் மீதியின்றி வகுக்கும் மிகப்பெரிய படியைக் (Degree) கொண்ட கோவையினை, அப்பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் உயர் பொதுக் காரணி (Highest Common Factor) அல்லது மீப்பெரு பொது வகுத்தி (மீ.பொ.வ) என்போம்.

பின்வரும் எளிய கோவைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

(i) a^4, a^3, a^5, a^6 (ii) a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c

(i)-ல் a, a^2, a^3 ஆகியன கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளின் வகுத்திகளாகும். அவற்றில் a^3 என்பது உயர்ந்த படியைக் கொண்ட வகுத்தியாகும். ஆகவே கோவைகள் a^4, a^3, a^5, a^6 ஆகியனவற்றின் மீ. பொ.வ a^3 ஆகும்.

(ii) இதேபோல ab^4 ஆனது a^3b^4, ab^5c^2, a^2b^7c என்பனவற்றுக்கு மீ.பொ.வ ஆகும்.

கோவைகளில் எண் கெழுக்கள் இருப்பின், அவற்றின் மீ.பொ.வ கண்டுபிடித்து அதைக் கொண்டு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ-வைப் பெருக்க வேண்டும்.

இன்னும் சில எடுத்துக்காட்டுகளின் வாயிலாக மீ. பொ.வ- வை நன்கு அறிந்து கொள்வோம்.

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 3.19

பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க:

(i) 90, 150, 225 (ii) $15x^4y^3z^5, 12x^2y^7z^2$

(iii) $6(2x^2 - 3x - 2), 8(4x^2 + 4x + 1), 12(2x^2 + 7x + 3)$

தீர்வு

(i) 90, 150, 225 ஆகிய எண்களை அவற்றின் பகாக்காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுவோம். எனவே $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$, $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$ மற்றும் $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களுக்கு 3 மற்றும் 5 ஆகியன பொதுப் பகாக் காரணிகள் ஆகும். ஆகவே, மீ.பொ.வ $= 3 \times 5 = 15$ ஆகும்.

(ii) இதே முறையைப் பயன்படுத்தி இயற்கணிதக் கோவைகள் $15x^4y^3z^5$ மற்றும் $12x^2y^7z^2$ ஆகியவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்போம்.

பொதுக்காரணிகள் $3, x^2, y^3\ z^2$. ஆகவே, மீ.பொ.வ $= 3 \times x^2 \times y^3 \times z^2 = 3x^2y^3z^2$.

(iii) $6(2x^2 - 3x - 2), 8(4x^2 + 4x + 1), 12(2x^2 + 7x + 3)$ ஆகியவற்றின் எண் கெழுக்களான 6, 8, 12 ஆகியனவற்றின் மீ.பொ.வ 2 ஆகும்.

தற்போது, இருபடிக் கோவைகளுக்கு காரணிகள் காண்போம்.

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)(2x + 1)$$

$$2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3).$$

மேலேயுள்ள இருபடிக் கோவைகளின் பொதுக்காரணி $(2x + 1)$.

ஆகவே, தேவையான மீ.பொ.வ $= 2(2x + 1)$.

3.5.2 வகுத்தல் படிமுறையில் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி காணுதல் (Greatest Common Divisor of polynomials using division algorithm)

முதலில் 924, 105 ஆகிய எண்களுக்கு மீ.பொ.வ காணும் எளிய கணக்கிற்குத் தீர்வுக் காணலாம்.

$924 = 8 \times 105 + 84$

$105 = 1 \times 84 + 21$,

$84 = 4 \times 21 + 0$,

(அல்லது)

	8		1		4
105	924	84	105	21	84
	840		84		84
	84		21		0

எனவே, 924, 105-களின் மீ.பொ.வ 21 ஆகும்.

மேலே குறிப்பிட்ட முறையினை பயன்படுத்தி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கும் மீ.பொ.வ காணலாம்.

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ என்பன, $f(x)$-ன் படி $\geq$ $g(x)$-ன் படி என்றமைந்த இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகள் என்க. நாம் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றிற்கு மீ.பொ.வ காண்போம்.

www.tntextbooks.in

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியனவற்றை ஒருபடி மற்றும் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளாகக் காரணிப்படுத்தினால், முன்பு கற்ற முறையினைப் பயன்படுத்தி எளிதில் மீ.பொ.வ காண முடியும். $f(x)$ மற்றும் $g(x)$-ஐ எளிதில் காரணிப்படுத்த இயலாவிடில், பின்வரும் முறையில் மீ.பொ.வ காணலாம்.

படி 1 முதலில் $f(x)$-ஐ $g(x)$ ஆல் வகுத்து, $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ எனப் பெறுக.
இங்கு $q(x)$ என்பது ஈவு மற்றும் $r(x)$ என்பது மீதி.
ஆகவே, $g(x)$-ன் படி $>$ $r(x)$-ன் படி.
மீதி $r(x) = 0$ எனில் $f(x)$, $g(x)$ ஆகியனவற்றின் மீ.பொ.வ $g(x)$ ஆகும்.

படி 2 மீதி $r(x)$ ஆனது பூச்சியம் இல்லை எனில், $g(x)$-ஐ $r(x)$ ஆல் வகுக்க, $g(x) = r(x)q(x) + r_1(x)$. இங்கு $r(x)$-ன் படி $>$ $r_1(x)$-ன் படி.
இங்கு மீதி $r_1(x) = 0$ எனில், தேவையான மீ. பொ. வ $r(x)$ ஆகும்.

படி 3 மீதி $r_1(x)$ பூச்சியமல்ல எனில், மீதி பூச்சியமாக கிடைக்கும் வரை மேற்கண்ட படிகளை தொடர்ந்து செய்க. இறுதிப்படிக்கு முந்தைய படியில் கிடைக்கும் மீதி தான் $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. வ ஆகும்.

மேலும், $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ-வை, மீ.பொ.வ $(f(x), g(x))$ எனக் குறிக்கிறோம்.

குறிப்புரை

பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழித்தால் இரு எண்களின் மீ.பொ.வ ஆனது மாறாது என்ற அடிப்படையில் தான் யூக்ளிடின் வகுத்தல் முறையில் மீ.பொ.வ. காண்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, மீ.பொ.வ (252, 105) = மீ.பொ.வ. (147, 105) = மீ.பொ.வ. (42, 105) = மீ. பொ.வ. (63, 42) = மீ.பொ.வ. (21, 42) = 21 என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.20

$x^4 + 3x^3 - x - 3$ மற்றும் $x^3 + x^2 - 5x + 3$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்க.

தீர்வு $f(x) = x^4 + 3x^3 - x - 3$, $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ என்க.
இங்கு $f(x)$-ன் படி $>$ $g(x)$-ன் படி.
$\therefore$ வகுத்தி $x^3 + x^2 - 5x + 3$ ஆகும்.

$$\begin{array}{r|l} & x + 2 \\ \hline x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 3 \\ & x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x \\ \hline & 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 \\ & 2x^3 + 2x^2 - 10x + 6 \\ \hline & 3x^2 + 6x - 9 \\ & \Longrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 \longrightarrow \text{மீதி } (\neq 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & x - 1 \\ \hline x^2 + 2x - 3 & x^3 + x^2 - 5x + 3 \\ & x^3 + 2x^2 - 3x \\ \hline & -x^2 - 2x + 3 \\ & -x^2 - 2x + 3 \\ \hline & 0 \longrightarrow \text{மீதி} \end{array}$$

ஆகவே, மீ.பொ.வ $(f(x), g(x)) = x^2 + 2x - 3$.

www.tntextbooks.in

குறிப்புரை

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளுக்கு எண் காரணிகள் (மாறிலிகள்) இல்லை. ஆகவே அவைகளின் மீ. பொ. வ. விலும் எண் காரணிகள் இருக்காது. எனவே $3x^2+6x-9$-லிருந்து காரணி 3-ஐ நீக்கி, x^2+2x-3-ஐ புதிய வகுத்தியாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 3.21

$3x^4+6x^3-12x^2-24x$ மற்றும் $4x^4+14x^3+8x^2-8x$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ. பொ. வ காண்க.

தீர்வு $f(x)=3x^4+6x^3-12x^2-24x=3x(x^3+2x^2-4x-8)$ என்க.

$g(x)=4x^4+14x^3+8x^2-8x=2x(2x^3+7x^2+4x-4)$ என்க.

தற்பொழுது x^3+2x^2-4x-8 மற்றும் $2x^3+7x^2+4x-4$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ காண்போம்.

x^3+2x^2-4x-8-ஐ வகுத்தியாகக் கொள்வோம்.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \hline x^3+2x^2-4x-8 & 2x^3+7x^2+4x-4 \\ & 2x^3+4x^2-8x-16 \\ \hline & \quad 3x^2+12x+12 \\ & \Longrightarrow \; x^2+4x+4 \\ & \qquad \text{மீதி} (\neq 0) \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \quad x-2 \\ \hline x^2+4x+4 & x^3+2x^2-4x-8 \\ & x^3+4x^2+4x \\ \hline & -2x^2-8x-8 \\ & -2x^2-8x-8 \\ \hline & \quad 0 \longrightarrow \text{மீதி} \end{array}$$

x^3+2x^2-4x-8 மற்றும் $2x^3+7x^2+4x-4$ இன் பொது வகுத்தி x^2+4x+4 ஆகும்.

மேலும், $3x$ மற்றும் $2x$ ஆகியனவற்றின் பொது வகுத்தி $= x$.

ஆகவே, மீ.பொ.வ $(f(x), g(x)) = x(x^2+4x+4)$.

பயிற்சி 3.6

1. பின்வருவனவற்றின் மீ. பொ. வ காண்க.
   (i) $7x^2yz^4,\ 21x^2y^5z^3$ (ii) $x^2y,\ x^3y,\ x^2y^2$
   (iii) $25bc^4d^3,\ 35b^2c^5,\ 45c^3d$ (iv) $35x^5y^3z^4,\ 49x^2yz^3,\ 14xy^2z^2$
2. பின்வருவனவற்றின் மீ. பொ. வ காண்க.
   (i) $c^2-d^2,\ c(c-d)$ (ii) $x^4-27a^3x,\ (x-3a)^2$
   (iii) $m^2-3m-18,\ m^2+5m+6$ (iv) $x^2+14x+33,\ x^3+10x^2-11x$
   (v) $x^2+3xy+2y^2,\ x^2+5xy+6y^2$ (vi) $2x^2-x-1,\ 4x^2+8x+3$
   (vii) $x^2-x-2,\ x^2+x-6,\ 3x^2-13x+14$ (viii) $x^3-x^2+x-1,\ x^4-1$
   (ix) $24(6x^4-x^3-2x^2),\ 20(2x^6+3x^5+x^4)$
   (x) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் சோடிகளுக்கு வகுத்தல் படி முறையில் மீ. பொ. வ காண்க.

(i) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15,\ 4x^2 - 16x + 12$

(ii) $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18,\ 3x^2 + 13x + 10$

(iii) $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2,\ 6x^3 + 12x^2 + 6x + 12$

(iv) $x^3 - 3x^2 + 4x - 12,\ x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x$

3.5.3 மீச்சிறு பொது மடங்கு (மீ. பொ. ம) (Least Common Multiple)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீச்சிறு பொது மடங்கு என்பது அந்த பல்லுறுப்புக்கோவைகள் ஒவ்வொன்றாலும் மீதியில்லாமல் வகுபடக் கூடிய மிகக் குறைந்த படியைக் கொண்ட பல்லுறுப்புக்கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, a^4, a^3, a^6 ஆகிய எளிய கோவைகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

a^4, a^3, a^6 ஆகியவற்றின் பொது மடங்குகள் $a^6, a^7, a^8, \cdots$.

அனைத்துப் பொது மடங்குகளிலும் a^6 என்பது மிகச்சிறிய பொது மடங்கு ஆகும்.

ஆகவே, a^4, a^3, a^6 ஆகியவற்றின் மீ. பொ. ம a^6 ஆகும்.

இவ்வாறே $a^3b^4,\ ab^5,\ a^2b^7$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. ம a^3b^7 ஆகும்.

மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் மீ. பொ. ம காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.22

பின்வருவனவற்றின் மீ. பொ. ம காண்க

(i) 90, 150, 225 (ii) $35a^2c^3b,\ 42a^3cb^2,\ 30ac^2b^3$

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$

(iv) $x^3 + y^3,\ x^3 - y^3,\ x^4 + x^2y^2 + y^4$

தீர்வு

(i)
$$90 = 2\times3\times3\times5 = 2^1\times3^2\times5^1$$
$$150 = 2\times3\times5\times5 = 2^1\times3^1\times5^2$$
$$225 = 3\times3\times5\times5 = 3^2\times5^2$$

90, 150, 225 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம $= 2^1\times3^2\times5^2 = 450$

(ii) 35, 42, 30 -ன் மீ. பொ. ம $5\times7\times6 = 210$

எனவே, $35a^2c^3b,\ 42a^3cb^2,\ 30ac^2b^3$ -ன் மீ. பொ. ம $= 210a^3c^3b^3$.

(iii) $(a-1)^5(a+3)^2,\ (a-2)^2(a-1)^3(a+3)^4$ -ன் மீ. பொ. ம $= (a-1)^5(a+3)^4(a-2)^2$.

(iv) முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோவைகளின் காரணிகளைக் காணலாம்.

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$
$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

எனவே, மீ.பொ.ம $= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$= (x^3+y^3)(x^3-y^3) = x^6 - y^6.$$

பயிற்சி 3.7

பின்வருவனவற்றிற்கு மீ.பொ.ம காண்க.

1. $x^3y^2,\ xyz$
2. $3x^2yz,\ 4x^3y^3$
3. $a^2bc,\ b^2ca,\ c^2ab$
4. $66a^4b^2c^3,\ 44a^3b^4c^2,\ 24a^2b^3c^4$
5. $a^{m+1},\ a^{m+2},\ a^{m+3}$
6. $x^2y+xy^2,\ x^2+xy$
7. $3(a-1),\ 2(a-1)^2,\ (a^2-1)$
8. $2x^2-18y^2,\ 5x^2y+15xy^2,\ x^3+27y^3$
9. $(x+4)^2(x-3)^3,\ (x-1)(x+4)(x-3)^2$
10. $10(9x^2+6xy+y^2),\ 12(3x^2-5xy-2y^2),\ 14(6x^4+2x^3)$.

3.5.4 மீ. பொ. வ. மற்றும் மீ. பொ. ம. ஆகியவற்றுக்கு இடையேயுள்ளத் தொடர்பு (Relation between LCM and GCD)

இரு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் அவற்றின் மீ. பொ. வ மற்றும் மீ. பொ. ம-வின் பெருக்கற் பலனுக்கு சமம் என அறிந்துள்ளோம். எடுத்துக்காட்டாக, $21\times35=105\times7$.

இங்கு 21 மற்றும் 35-ன் மீ. பொ. ம =105 மற்றும் அவற்றின் மீ. பொ. வ = 7.

இதேபோல், ஏதேனும் இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலன் அவற்றின் மீ. பொ. ம மற்றும் மீ.பொ.வ ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமமாகும்.

அதாவது, $f(x)\times g(x)$ = {மீ. பொ. ம $(f(x), g(x))$} $\times$ {மீ. பொ. வ $(f(x), g(x))$}.

இந்த முடிவை ஓர் எடுத்துக்காட்டுடன் சரிபார்க்கலாம்.

$f(x)=12(x^4-x^3)$, $g(x)=8(x^4-3x^3+2x^2)$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் கருதுக.

$$f(x)=12(x^4-x^3)=2^2\times3\times x^3\times(x-1) \quad (1)$$
$$g(x)=8(x^4-3x^3+2x^2)=2^3\times x^2\times(x-1)\times(x-2) \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து,

மீ. பொ. ம $(f(x), g(x)) = 2^3\times3^1\times x^3\times(x-1)\times(x-2)=24x^3(x-1)(x-2)$

மீ. பொ. வ $(f(x), g(x)) = 4x^2(x-1)$

$\therefore$ மீ. பொ. வ $\times$ மீ. பொ. ம $= 24x^3(x-1)(x-2)\times4x^2(x-1)$

$= 96x^5(x-1)^2(x-2)$ (3)

மேலும், $f(x)\times g(x) = 12x^3(x-1)\times8x^2(x-1)(x-2)$

$= 96x^5(x-1)^2(x-2)$ (4)

(3) மற்றும் (4) ஆகியவற்றிலிருந்து,

மீ. பொ. ம $\times$ மீ. பொ. வ = $f(x)\times g(x)$

ஆகவே, இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ. பொ. ம மற்றும் மீ. பொ. வ ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் ஆனது அவ்விரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம். எனவே, $f(x)$, $g(x)$ மற்றும் மீ. பொ. ம அல்லது மீ. பொ. வ ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று கொடுக்கப்பட்டால், மற்றொன்றை எளிதாகக் காணமுடியும். ஏனெனில், மீ. பொ. ம மற்றும் மீ. பொ. வ. ஆகியன -1 என்ற காரணியைத் தவிர்த்து தனித்துவமுள்ளவை.

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 3.23

$x^4+3x^3+5x^2+26x+56$ மற்றும் $x^4+2x^3-4x^2-x+28$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ x^2+5x+7 எனில், அவற்றின் மீ. பொ.ம-வைக் காண்க.

தீர்வு $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+26x+56;\ g(x)=x^4+2x^3-4x^2-x+28$ என்க.

மீ. பொ. வ $= x^2+5x+7$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

மீ. பொ. வ $\times$ மீ. பொ. ம $= f(x)\times g(x)$ என அறிவோம்.

எனவே, மீ. பொ. ம $= \dfrac{f(x)\times g(x)}{\text{மீ.பொ.வ}}$ (1)

$f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகிய இரண்டையும் மீ.பொ.வ -ஆல் வகுக்க இயலும்.

எனவே $f(x)$-ஐ மீ. பொ. வ-ஆல் வகுக்க,

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 8 & & \\
\hline
1\ 5\ 7 & 1 & 3 & 5 & 26 & 56 \\
 & 1 & 5 & 7 & & \\
\hline
 & & -2 & -2 & 26 & \\
 & & -2 & -10 & -14 & \\
\hline
 & & & 8 & 40 & 56 \\
 & & & 8 & 40 & 56 \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

$f(x)$-ஐ மீ. பொ. வ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவு x^2-2x+8.

$\therefore\ (1)\implies$ மீ.பொ.ம $=(x^2-2x+8)\times g(x)$

எனவே, மீ.பொ.ம $=(x^2-2x+8)(x^4+2x^3-4x^2-x+28)$.

குறிப்பு

மேற்கண்ட கணக்கில், $g(x)$-யையும் மீ. பொ. வ ஆல் வகுக்கலாம். கிடைக்கும் ஈவினை $f(x)$ ஆல் பெருக்கப்படும்போது தேவையான மீ. பொ. ம கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.24

இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ. பொ. வ மற்றும் மீ. பொ. ம முறையே $x+1$ மற்றும் x^6-1. மேலும், ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை x^3+1 எனில், மற்றொன்றைக் காண்க.

தீர்வு மீ. பொ. வ $= x+1$, மீ. பொ. ம $= x^6-1$

$f(x)=x^3+1$ என்க. தேவையான மற்றொரு பல்லுறுப்புக்கோவை $g(x)$ என்க.

மீ. பொ. ம $\times$ மீ. பொ. வ $= f(x)\times g(x)$

$$\implies \quad g(x) = \frac{\text{மீ.பொ.ம}\times\text{மீ.பொ.வ}}{f(x)} = \frac{(x^6-1)(x+1)}{x^3+1}$$

$$\implies \quad = \frac{(x^3+1)(x^3-1)(x+1)}{x^3+1} = (x^3-1)(x+1)$$

ஆகவே, $g(x)=(x^3-1)(x+1)$.

பயிற்சி 3.8

1. பின்வரும் ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ. பொ. ம காண்க.
   (i) $x^2 - 5x + 6,\ x^2 + 4x - 12$, இவற்றின் மீ. பொ. வ $x - 2$.
   (ii) $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3,\ x^4 + 2x^2 + x + 2$, இவற்றின் மீ. பொ. வ $x^2 + x + 1$.
   (iii) $2x^3 + 15x^2 + 2x - 35,\ x^3 + 8x^2 + 4x - 21$, இவற்றின் மீ. பொ. வ $x + 7$.
   (iv) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5,\ 2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$, இவற்றின் மீ. பொ. வ $2x - 1$.
2. பின்வருவனவற்றில் முறையே $p(x)$ மற்றும் $q(x)$ ஆகியவற்றின் மீ. பொ. ம, மற்றும் மீ. பொ. வ மேலும் $p(x)$ ஆகியன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $q(x)$ என்ற மற்றொரு பல்லுறுப்புக்கோவையைக் காண்க.
   (i) $(x + 1)^2(x + 2)^2,\ (x + 1)(x + 2),\ (x + 1)^2(x + 2)$.
   (ii) $(4x + 5)^3(3x - 7)^3,\ (4x + 5)(3x - 7)^2,\ (4x + 5)^3(3x - 7)^2$.
   (iii) $(x^4 - y^4)(x^4 + x^2y^2 + y^4),\ x^2 - y^2,\ x^4 - y^4$.
   (iv) $(x^3 - 4x)(5x + 1),\ (5x^2 + x),\ (5x^3 - 9x^2 - 2x)$.
   (v) $(x - 1)(x - 2)(x^2 - 3x + 3),\ (x - 1),\ (x^3 - 4x^2 + 6x - 3)$.
   (vi) $2(x + 1)(x^2 - 4),\ (x + 1),\ (x + 1)(x - 2)$.

3.6 விகிதமுறு கோவைகள் (Rational expressions)

m மற்றும் $n \neq 0$ என்பன இரு முழுக்கள் எனில் $\frac{m}{n}$ என்ற விகிதம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக வரையறுக்கப்படுகிறது. இதேபோல் $p(x),\ q(x)$ ஆகிய இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளில் $q(x) \neq 0$ எனில், விகிதம் $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு கோவை ஆகும்.

$p(x)$ ஐ $\frac{p(x)}{1}$ என எழுத இயலும் என்பதால் எந்த ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-ம் ஒரு விகிதமுறு பல்லுறுப்புக்கோவையாகும்.

இருப்பினும், ஒரு விகிதமுறு கோவையானது ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எடுத்துக்காட்டாக $\frac{x}{x^2 + 1}$ ஒரு விகிதமுறு கோவை. ஆனால், அது ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையல்ல.

விகிதமுறு பல்லுறுப்புக்கோவைகளை பின்வரும் சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் அறியலாம்.

$$2x + 7,\ \frac{3x + 2}{x^2 + x + 1},\ \frac{x^3 + \sqrt{2}x + 5}{x^2 + x - \sqrt{3}}$$

3.6.1 விகிதமுறுக் கோவையின் சுருங்கிய (அ) எளிய வடிவம் (Rational expressions in lowest form)

$p(x)$ மற்றும் $q(x)$ ஆகிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் கெழுக்கள் முழு எண்கள் ஆகவும், அவற்றின் மீ.பொ.வ 1 என்றவாறும் இருந்தால், $\frac{p(x)}{q(x)}$ என்பது சுருக்கிய அல்லது எளிய வடிவிலுள்ள ஒரு விகிதமுறு கோவையாகும். ஒரு விகிதமுறுகோவை சுருங்கிய வடிவில் இல்லாமலிருப்பின் அதன் தொகுதி $p(x)$ மற்றும் பகுதி $q(x)$ ஆகிய இரண்டையும் $p(x),\ q(x)$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ-ஆல் வகுத்து எளிய வடிவில் சுருக்கலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருத்தில் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.25

பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவிற்குச் சுருக்குக.

(i) $\frac{5x+20}{7x+28}$ (ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4}$ (iii) $\frac{6x^2-5x+1}{9x^2+12x-5}$ (iv) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-1)(x^2-2x-3)}$

தீர்வு

(i) $\frac{5x+20}{7x+28} = \frac{5(x+4)}{7(x+4)} = \frac{5}{7}$

(ii) $\frac{x^3-5x^2}{3x^3+2x^4} = \frac{x^2(x-5)}{x^3(2x+3)} = \frac{x-5}{x(2x+3)}$

(iii) $p(x) = 6x^2-5x+1 = (2x-1)(3x-1)$ என்க.

$q(x) = 9x^2+12x-5 = (3x+5)(3x-1)$ என்க.

எனவே, $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(2x-1)(3x-1)}{(3x+5)(3x-1)} = \frac{2x-1}{3x+5}$

(iv) $f(x) = (x-3)(x^2-5x+4) = (x-3)(x-1)(x-4)$ என்க.

$g(x) = (x-1)(x^2-2x-3) = (x-1)(x-3)(x+1)$ என்க.

எனவே, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-3)(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-3)(x+1)} = \frac{x-4}{x+1}$

பயிற்சி 3.9

பின்வருவனவற்றை எளிய வடிவிற்குச் சுருக்குக.

(i) $\frac{6x^2+9x}{3x^2-12x}$ (ii) $\frac{x^2+1}{x^4-1}$ (iii) $\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

(iv) $\frac{x^3-27}{x^2-9}$ (v) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1}$ (குறிப்பு: $x^4+x^2+1 = (x^2+1)^2-x^2$ எனக்கொள்க)

(vi) $\frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}$ (vii) $\frac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$ (viii) $\frac{2x^4-162}{(x^2+9)(2x-6)}$

(ix) $\frac{(x-3)(x^2-5x+4)}{(x-4)(x^2-2x-3)}$ (x) $\frac{(x-8)(x^2+5x-50)}{(x+10)(x^2-13x+40)}$ (xi) $\frac{4x^2+9x+5}{8x^2+6x-5}$

(xii) $\frac{(x-1)(x-2)(x^2-9x+14)}{(x-7)(x^2-3x+2)}$

3.6.2 விகிதமுறு கோவைகளின் பெருக்கல் மற்றும் வகுத்தல் (Multiplication and division of rational expressions)

$q(x) \neq 0$, $h(x) \neq 0$ என்றவாறு $\frac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $\frac{g(x)}{h(x)}$ ஆகியன இரு விகிதமுறு கோவைகள் எனில்,

(i) அவைகளின் பெருக்கற்பலன் $\frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{p(x)\times g(x)}{q(x)\times h(x)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(ii) அவைகளின் வகுத்தல் $\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{p(x)}{q(x)} \times \frac{h(x)}{g(x)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $\frac{p(x)}{q(x)} \div \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{p(x)\times h(x)}{q(x)\times g(x)}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 3.26

(i) $\frac{x^3y^2}{9z^4}$ என்பதை $\frac{27z^5}{x^4y^2}$ ஆல் பெருக்குக.

(ii) $\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2}$ என்பதை $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ ஆல் பெருக்குக.

(iii) $\frac{x^3-8}{x^2-4}$ என்பதை $\frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4}$ ஆல் பெருக்குக.

தீர்வு

(i) $\frac{x^3y^2}{9z^4} \times \frac{27z^5}{x^4y^2} = \frac{(x^3y^2)(27z^5)}{(9z^4)(x^4y^2)} = \frac{3z}{x}$.

(ii) $\frac{a^3+b^3}{a^2+2ab+b^2} \times \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a+b)} \times \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} = a^2-ab+b^2$.

(iii) $\frac{x^3-8}{x^2-4} \times \frac{x^2+6x+8}{x^2+2x+4} = \frac{x^3-2^3}{x^2-2^2} \times \frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4}$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+4)(x+2)}{x^2+2x+4} = x+4.$$

எடுத்துக்காட்டு 3.27

(i) $\frac{4x-4}{x^2-1}$ என்பதை $\frac{x-1}{x+1}$ ஆல் வகுக்க. (ii) $\frac{x^3-1}{x+3}$ என்பதை $\frac{x^2+x+1}{3x+9}$ ஆல் வகுக்க.

(iii) $\frac{x^2-1}{x^2-25}$ என்பதை $\frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5}$ ஆல் வகுக்க.

தீர்வு:

(i) $\frac{4x-4}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x+1} = \frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{4}{x-1}$.

(ii) $\frac{x^3-1}{x+3} \div \frac{x^2+x+1}{3x+9} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+3} \times \frac{3(x+3)}{x^2+x+1} = 3(x-1)$.

(iii) $\frac{x^2-1}{x^2-25} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x-5} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+5)(x-5)} \times \frac{(x+5)(x-1)}{(x-5)(x+1)}$

$$= \frac{(x-1)(x-1)}{(x-5)(x-5)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}.$$

பயிற்சி 3.10

1. பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளைப் பெருக்கி, விடையைச் சுருக்கிய வடிவில் எழுதுக.

(i) $\frac{x^2-2x}{x+2} \times \frac{3x+6}{x-2}$ (ii) $\frac{x^2-81}{x^2-4} \times \frac{x^2+6x+8}{x^2-5x-36}$

(iii) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-x-20} \times \frac{x^2-2x+4}{x^3+8}$ (iv) $\frac{x^2-16}{x^2-3x+2} \times \frac{x^2-4}{x^3+64} \times \frac{x^2-4x+16}{x^2-2x-8}$

(v) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2-x-2} \times \frac{2x^2-3x-2}{3x^2+5x-2}$ (vi) $\frac{2x-1}{x^2+2x+4} \times \frac{x^4-8x}{2x^2+5x-3} \times \frac{x+3}{x^2-2x}$

2. பின்வருவனற்றை எளிய வடிவில் சுருக்குக:

(i) $\frac{x}{x+1} \div \frac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\frac{x^2-36}{x^2-49} \div \frac{x+6}{x+7}$

(iii) $\frac{x^2-4x-5}{x^2-25} \div \frac{x^2-3x-10}{x^2+7x+10}$ (iv) $\frac{x^2+11x+28}{x^2-4x-77} \div \frac{x^2+7x+12}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2+13x+15}{x^2+3x-10} \div \frac{2x^2-x-6}{x^2-4x+4}$ (vi) $\frac{3x^2-x-4}{9x^2-16} \div \frac{4x^2-4}{3x^2-2x-1}$

(vii) $\frac{2x^2+5x-3}{2x^2+9x+9} \div \frac{2x^2+x-1}{2x^2+x-3}$

3.6.3 விகிதமுறு கோவைகளின் கூட்டலும் கழித்தலும் (Addition and subtraction of rational expressions)

$q(x) \neq 0$ மற்றும் $s(x) \neq 0$ என்றவாறு $\frac{p(x)}{q(x)}$ மற்றும் $\frac{r(x)}{s(x)}$ ஆகியன இரண்டு விகிதமுறு கோவைகள் எனில், அவற்றின் கூடுதல் மற்றும் கழித்தலை

$\frac{p(x)}{q(x)} \pm \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x).s(x) \pm q(x)r(x)}{q(x).s(x)}$ என வரையறுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.28

சுருக்குக: (i) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2}$ (ii) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$ (iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$

தீர்வு

(i) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{2x^2+2x-7}{x^2+x-6}$

(ii) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{2x^2+2}{(x-1)^2(x+1)}$

$= \frac{2x^2+2}{x^3-x^2-x+1}$

(iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+3)(x-3)} + \frac{(x+6)(x-4)}{(x+3)(x-4)}$

$= \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+6}{x+3} = \frac{x+2+x+6}{x+3} = \frac{2x+8}{x+3}$

எடுத்துக்காட்டு 3.29

$\frac{x^3-1}{x^2+2}$ உடன் எந்த விகிதமுறு கோவையைக் கூட்டினால் $\frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ கிடைக்கும் ?

தீர்வு $p(x)$ என்பது தேவையான விகிதமுறு கோவை என்க.

$\frac{x^3-1}{x^2+2} + p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore p(x) = \frac{2x^3-x^2+3}{x^2+2} - \frac{x^3-1}{x^2+2} = \frac{2x^3-x^2+3-x^3+1}{x^2+2} = \frac{x^3-x^2+4}{x^2+2}$

எடுத்துக்காட்டு 3.30

$\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\frac{x+2}{x+1}$ என்பதை இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் ஒரு பின்னமாக (விகிதமுறு கோவையாக) எளிய வடிவில் சுருக்குக.

தீர்வு $\left(\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+1}{2x+1}\right)+\frac{x+2}{x+1}$

$$=\left[\frac{(2x-1)(2x+1)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(2x+1)}\right]+\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{3x^2}{(x-1)(2x+1)}+\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\frac{3x^2(x+1)+(x+2)(x-1)(2x+1)}{(x^2-1)(2x+1)}=\frac{5x^3+6x^2-3x-2}{2x^3+x^2-2x-1}$$

பயிற்சி 3.11

1. பின்வருவனவற்றை இரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் ஒரு பின்னமாக (விகிதமுறு கோவையாக) எளிய வடிவில் சுருக்குக.

(i) $\frac{x^3}{x-2}+\frac{8}{2-x}$ (ii) $\frac{x+2}{x^2+3x+2}+\frac{x-3}{x^2-2x-3}$

(iii) $\frac{x^2-x-6}{x^2-9}+\frac{x^2+2x-24}{x^2-x-12}$ (iv) $\frac{x-2}{x^2-7x+10}+\frac{x+3}{x^2-2x-15}$

(v) $\frac{2x^2-5x+3}{x^2-3x+2}-\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-3x-2}$ (vi) $\frac{x^2-4}{x^2+6x+8}-\frac{x^2-11x+30}{x^2-x-20}$

(vii) $\left[\frac{2x+5}{x+1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}\right]-\left(\frac{3x-2}{x-1}\right)$

(viii) $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6}-\frac{2}{x^2+4x+3}$.

2. $\frac{x^3-1}{x^2+2}$ உடன் எந்த விகிதமுறுக் கோவையைக் கூட்ட $\frac{3x^3+2x^2+4}{x^2+2}$ கிடைக்கும்?

3. எந்த விகிதமுறு கோவையை $\frac{4x^3-7x^2+5}{2x-1}$ -லிருந்து கழிக்க $2x^2-5x+1$ கிடைக்கும்?

4. $P=\frac{x}{x+y}$, $Q=\frac{y}{x+y}$ எனில், $\frac{1}{P-Q}-\frac{2Q}{P^2-Q^2}$ ஐக் காண்க.

3.7 வர்க்கமூலம் (Square root)

$a\in\mathbb{R}$ என்பது ஒரு குறையற்ற மெய்யெண் (Non negative real number) என்க. a-ன் வர்க்கமூலமானது $b^2=a$ என்றவாறு அமையும் ஒரு மெய்யெண் b ஆகும். a-ன் மிகை வர்க்கமூலத்தினை $\sqrt[2]{a}$ அல்லது $\sqrt{a}$ எனக் குறிப்போம். $(-3)^2=9$ மற்றும் $(+3)^2=9$ ஆகியன மெய்யாக இருப்பினும் $\sqrt{}$ என்பது மிகை வர்க்கமூலத்தைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆகவே $\sqrt{9}=3$. இதேபோல் $\sqrt{121}=11$, $\sqrt{10000}=100$.

எந்த ஒரு கோவையின் வர்க்கம் கொடுக்கப்பட்ட கோவைக்கு சமமாக உள்ளதோ, அக்கோவை கொடுக்கப்பட்ட கோவையின் வர்க்கமூலம் (square root) எனப்படும். பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு வர்க்கமூலம் காண பின்வருமாறு எழுதுவோம்.

$$\sqrt{(p(x))^2} = |p(x)|, \text{ இங்கு } |p(x)| = \begin{cases} p(x) & , \ p(x) \geq 0 \text{ எனும்போது} \\ -p(x) & , \ p(x) < 0 \text{ எனும்போது} \end{cases}$$

எனவே, $\sqrt{(x-a)^2} = |(x-a)|$, $\sqrt{(a-b)^2} = |(a-b)|$.

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு பின்வரும் நன்கு அறிமுகமான இரு முறைகளில் வர்க்கமூலம் காண்போம்.

(i) காரணிப்படுத்தல் முறை (Factorization method)

(ii) வகுத்தல் முறை (Division method)

இப்பகுதியில், காரணிப்படுத்த இயலக் கூடிய பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் காரணிப்படுத்தி வர்க்கமூலம் காணும் முறையை சில எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் கற்போம்.

3.7.1 காரணிப்படுத்துதல் முறையில் வர்க்கமூலம் காணல் (Square root by factorization method)

எடுத்துக்காட்டு 3.31

வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}$

(ii) $\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}$ (iii) $(2x+3y)^2 - 24xy$

தீர்வு

(i) $\sqrt{121(x-a)^4(x-b)^6(x-c)^{12}} = 11|(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^6|$

(ii) $\sqrt{\dfrac{81x^4y^6z^8}{64w^{12}s^{14}}} = \dfrac{9}{8}\left|\dfrac{x^2y^3z^4}{w^6s^7}\right|$

(iii) $\sqrt{(2x+3y)^2 - 24xy} = \sqrt{4x^2 + 12xy + 9y^2 - 24xy} = \sqrt{(2x-3y)^2}$
$= |(2x-3y)|$

எடுத்துக்காட்டு 3.32

வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $4x^2 + 20xy + 25y^2$ (ii) $x^6 + \dfrac{1}{x^6} - 2$

(iii) $(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)$

தீர்வு

(i) $\sqrt{4x^2 + 20xy + 25y^2} = \sqrt{(2x+5y)^2} = |(2x+5y)|$

(ii) $\sqrt{x^6 + \dfrac{1}{x^6} - 2} = \sqrt{\left(x^3 - \dfrac{1}{x^3}\right)^2} = \left|\left(x^3 - \dfrac{1}{x^3}\right)\right|$

www.tntextbooks.in

(iii) வர்க்கமூலம் காணும் முன்பு, பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் காரணிப்படுத்துவோம்.

$$6x^2 - x - 2 = (2x + 1)(3x - 2)$$

$$3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1) \text{ மற்றும்}$$

$$2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1)$$

எனவே, $\sqrt{(6x^2 - x - 2)(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 - x - 1)}$

$$= \sqrt{(2x + 1)(3x - 2)\times(3x - 2)(x - 1)\times(x - 1)(2x + 1)}$$

$$= \sqrt{(2x + 1)^2(3x - 2)^2(x - 1)^2}$$

$$= |(2x + 1)(3x - 2)(x - 1)|$$

பயிற்சி 3.12

1. பின்வருவனவற்றிற்கு வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $196a^6b^8c^{10}$ (ii) $289(a - b)^4(b - c)^6$ (iii) $(x + 11)^2 - 44x$

(iv) $(x - y)^2 + 4xy$ (v) $121x^8y^6 \div 81x^4y^8$ (vi) $\dfrac{64(a + b)^4(x - y)^8(b - c)^6}{25(x + y)^4(a - b)^6(b + c)^{10}}$

2. பின்வருவனவற்றிற்கு வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $16x^2 - 24x + 9$

(ii) $(x^2 - 25)(x^2 + 8x + 15)(x^2 - 2x - 15)$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 12xy + 30yz - 20zx$

(iv) $x^4 + \dfrac{1}{x^4} + 2$

(v) $(6x^2 + 5x - 6)(6x^2 - x - 2)(4x^2 + 8x + 3)$

(vi) $(2x^2 - 5x + 2)(3x^2 - 5x - 2)(6x^2 - x - 1)$

3.7.2 வகுத்தல் முறையில் ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் வர்க்கமூலம் காணல் (Finding the square root of a polynomial by division method)

ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையினை, காரணிகளின் பெருக்கற்பலனாக எளிதில் மாற்ற முடியாத போது அதன் வர்க்கமூலத்தை வகுத்தல் முறை மூலம் காணலாம். பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் படி அதிகமாக இருந்தாலும் வர்க்கமூலங்களை வகுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி எளிதில் காணலாம்.

மிகை முழுக்களின் வர்க்கமூலத்தைக் காணும் வகுத்தல் முறையைப் போலவே, ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையின் வர்க்கமூலத்தையும் காணலாம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் கொண்டு இம்முறையை விளக்குவோம்.

(i) $\sqrt{66564}$ ஐக் காண்க.

$$\begin{array}{r|l} & 2\ \ 5\ \ 8 \\ \hline 2 & 6\ 65\ 64 \\ & 4 \\ \hline 45 & 2\ 65 \\ & 2\ 25 \\ \hline 508 & 40\ 64 \\ & 40\ 64 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ஆகவே, $\sqrt{66564} = 258$

(ii) $\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1}$ ஐக் காண்க.

$p(x) = 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$ என்க.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2x + 1 \\ \hline 3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 \\ & 9x^4 \\ \hline 6x^2 + 2x & 12x^3 + 10x^2 \\ & 12x^3 + 4x^2 \\ \hline 6x^2 + 4x + 1 & 6x^2 + 4x + 1 \\ & 6x^2 + 4x + 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$

குறிப்புரை

(i) பல்லுறுப்புக்கோவையை x-ன் அடுக்குகளைப் பொருத்து ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் எழுதும்போது, விடுப்பட்ட உறுப்புகளுக்குப் பதிலாக பூச்சியத்தை எழுதவும்.

(ii) மேலே உள்ள வர்க்கமூலம் காணும் முறையை பின்வரும் வழிமுறையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்து, அதற்குரிய காரணங்களைப் புரிந்துக் கொள்ளலாம்.

$$\sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(a+b+c)^2}$$

ஆகவே, வர்க்கமூலம் காண்பது என்பது பொருத்தமான a, b மற்றும் c-களைக் காண்பதாகும்.

எனவே, $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + (2a + b)b + (2a + 2b + c)c$

$= (3x^2)^2 + (6x^2 + 2x)(2x) + (6x^2 + 4x + 1)(1)$

$\therefore \sqrt{9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1} = |3x^2 + 2x + 1|$, ஆகவே, $a = 3x^2$, $b = 2x$ மற்றும் $c = 1$

மாற்றுமுறை : வர்க்கமூலம் காண, முதலில் பின்வருமாறு எழுதுக.

$9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1 = (mx^2 + nx + l)^2 = m^2x^4 + 2mnx^3 + (n^2 + 2lm)x^2 + 2nlx + l^2$

இரு புறமும் கெழுக்களை ஒப்பிட்டு, m, n, l ஆகியவற்றுக்கு மதிப்புக்களைக் காண்க.

(iii) பின்வருவம் எடுத்துக்காட்டையும் புரிந்துகொண்டு, வர்க்கமூலத்தை நன்கு அறிந்து கொள்ளலாம்.

$25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4 = 25x^4 - 30x^3 + 9x^2 + 20x^2 - 12x + 4$

$= (5x^2)^2 + [10x^2 + (-3x)](-3x) + (10x^2 - 6x + 2)2$

$= (5x^2)^2 + [2(5x^2) + (-3x)](-3x) + [2(5x^2) + 2(-3x) + 2]2$

$= a^2 + [2a + (-b)](-b) + [2a + 2(-b) + c]c$

$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ac$

$= (a - b + c)^2$, இங்கு $a = 5x^2$, $b = 3x$, $c = 2$

$\therefore \sqrt{25x^4 - 30x^3 + 29x^2 - 12x + 4} = |5x^2 - 3x + 2|$.

எடுத்துக்காட்டு 3.33

$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$-ன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை x-ன் அடுக்குகளில் இறங்கு வரிசையில் உள்ளது.

	$x^2 - 5x + 6$
x^2	$x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$
	x^4
$2x^2 - 5x$	$-10x^3 + 37x^2$
	$-10x^3 + 25x^2$
$2x^2 - 10x + 6$	$12x^2 - 60x + 36$
	$12x^2 - 60x + 36$
	0

எனவே,கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவையின் வர்க்கமூலம்,

$\sqrt{x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36} = |(x^2 - 5x + 6)|$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.34

$x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 30x + 25$-ன் வர்க்கமூலத்தைக் காண்க.

தீர்வு வர்க்கமூலம் காண பல்லுறுப்புக்கோவையை x-ன் அடுக்குகளில் ஏறு வரிசையில் கருதுக.

	$5 - 3x + x^2$
5	$25 - 30x + 19x^2 - 6x^3 + x^4$
	25
$10-3x$	$-30x + 19x^2$
	$-30x + 9x^2$
$10 - 6x + x^2$	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	$10x^2 - 6x^3 + x^4$
	0

எனவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவையின் வர்க்கமூலம் $|x^2 - 3x + 5|$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.35

$m - nx + 28x^2 + 12x^3 + 9x^4$ ஆனது ஒரு முழு வர்க்கம் எனில், m, n ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு பல்லுறுப்புக்கோவையை x-ன் அடுக்குகளில் இறங்கு வரிசையில் கருதுக.

$$9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m.$$

www.tntextbooks.in

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 \ + 2x \ + 4 \\ \hline
3x^2 & 9x^4 + 12x^3 + 28x^2 - nx + m \\
 & 9x^4 \\ \hline
6x^2 + 2x & \qquad 12x^3 + 28x^2 \\
 & \qquad 12x^3 + 4x^2 \\ \hline
6x^2 + 4x + 4 & \qquad\qquad 24x^2 - nx + m \\
 & \qquad\qquad 24x^2 + 16x + 16 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை ஒரு முழு வர்க்கமாதலால், $n = -16$ மற்றும் $m = 16$.

பயிற்சி 3.13

1. பின்வரும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வர்க்கமூலத்தை வகுத்தல் முறைமூலம் காண்க.
   (i) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$ (ii) $4x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 4x + 1$
   (iii) $9x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x + 1$ (iv) $4 + 25x^2 - 12x - 24x^3 + 16x^4$
2. பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முழுவர்க்கங்கள் எனில், a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.
   (i) $4x^4 - 12x^3 + 37x^2 + ax + b$ (ii) $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - ax + b$
   (iii) $ax^4 + bx^3 + 109x^2 - 60x + 36$ (iv) $ax^4 - bx^3 + 40x^2 + 24x + 36$

3.8 இருபடிச் சமன்பாடுகள் (Quadratic equations)

கிரேக்க கணித மேதை யூக்ளிட் (Euclid) வடிவியல் முறையில் கண்டறிந்த நீளங்களே, தற்போது பயன்படுத்தப்படும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களாகும். இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை பொதுவான வடிவில் அளித்த பெருமை இந்திய கணிதவியல் அறிஞர்களைச் சேரும். குறிப்பாக, $ax^2 + bx = c$ என அமைந்த இருபடிச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு காணத் தெளிவான சூத்திரமொன்றை பிரம்மகுப்தா (Brahma Gupta) (கி.பி. 598 - 665) கண்டுபிடித்தார். பிற்காலத்தில் இந்தியக் கணிதமேதை ஸ்ரீதர் ஆச்சார்யா (Sridhar Acharya) (கி.பி 1025) வர்க்கப்படுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்தி இருபடிச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்கும் முறையைக் கண்டறிந்தார். கணித அறிஞர் பாஸ்கரா II (Bhaskara II) இச்சூத்திரத்தை இருபடிச் சூத்திரம் (quadratic formula) எனக் குறிப்பிட்டார்.

இப்பகுதியில் பல்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்தி இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணுதலைக் கற்போம். இருபடிச் சமன்பாடுகளின் பயன்பாடுகளையும் காண்போம்.

வரையறை

a, b, c ஆகியன மெய்யெண்கள் மற்றும் $a \neq 0$ எனில், $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற வடிவில் அமைந்த சமன்பாட்டினை மாறி x-ல் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடு (quadratic equation) என்போம்.

குறிப்பாக $p(x)$ என்பது படி 2-ல் அமைந்த பல்லுறுப்புக்கோவை எனில், $p(x) = 0$ என்பது இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும். அதன் பொது வடிவம் $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக, $2x^2 - 3x + 4 = 0, 1 - x + x^2 = 0$ ஆகியவை இருபடிச் சமன்பாடுகளாகும்.

3.8.1 காரணிப்படுத்தல் மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல் (Solution of a quadratic equation by factorization method)

இருபடிச் சமன்பாட்டினை நேரியல் காரணிகளாகக் காரணிப்படுத்த முடியுமெனில் இம்முறையைப் பயன்படுத்த இயலும். எந்தப் பெருக்கற்பலனிலும் ஒரு காரணி பூச்சியம் எனில், முழு பெருக்கற்பலனும் பூச்சியம் ஆகும். மாறாக, பெருக்கற்பலன் பூச்சியத்திற்குச் சமம் எனில், அந்தப் பெருக்கற்பலனில் உள்ள சில காரணிகள் பூச்சியம் ஆகும். மேலும், தெரியாத மாறியைக் கொண்டுள்ள காரணி பூச்சியமாக இருக்கலாம். எனவே ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க ஒவ்வொரு காரணியையும் பூச்சியமாக்கும் வகையில் x-ன் மதிப்புகளைக் காண வேண்டும். அதாவது, பெருக்கலிலுள்ள ஒவ்வொரு காரணியையும் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்தி, மாறிக்குத் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.36

தீர்க்க : $6x^2 - 5x - 25 = 0$

தீர்வு $6x^2 - 5x - 25 = 0$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

x-ன் கெழு -5. ஆகவே, $\alpha + \beta = -5$ மற்றும் $\alpha\beta = 6 \times (-25) = -150$ என அமையும் α, β ஆகியவற்றைக் காணலாம்.

எனவே, $\alpha = -15$ மற்றும் $\beta = 10$ எனக் கிடைக்கும்.

ஆகவே, $6x^2 - 5x - 25 = 6x^2 - 15x + 10x - 25 = 3x(2x-5) + 5(2x-5)$

$$= (2x-5)(3x+5).$$

இப்போது, $2x - 5 = 0$ மற்றும் $3x + 5 = 0$-லிருந்து தீர்வுக் கணம் பெறலாம்.

எனவே, $x = \frac{5}{2}$, $x = -\frac{5}{3}$.

ஆகவே, தீர்வுக் கணம் $= \left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right\}$.

எடுத்துக்காட்டு 3.37

தீர்க்க : $\frac{6}{7x-21} - \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} = 0$

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு இருபடிச் சமன்பாடல்ல எனத் தோன்றுகிறது. ஆனால், சமன்பாட்டைச் சுருக்கும்போது, அது இருபடிச் சமன்பாடாக மாறும்.

$$\frac{6}{7(x-3)} - \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x+3)(x-3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{6(x^2-9) - 7(x+3) + 7(x-3)}{7(x-3)^2(x+3)} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 6x^2 - 54 - 42 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 16 = 0$$

$x^2 = 16$ என்பது இருபடிச் சமன்பாடு என்பதால், $x = 4$ மற்றும் $x = -4$ ஆகும்.

ஆகவே, தீர்வுக் கணம் $= \{-4, 4\}$

எடுத்துக்காட்டு 3.38

தீர்க்க : $\sqrt{24 - 10x} = 3 - 4x$, $3 - 4x > 0$

தீர்வு $\sqrt{24-10x} = 3-4x$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $24-10x = (3-4x)^2$

$\Longrightarrow \quad 16x^2 - 14x - 15 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 16x^2 - 24x + 10x - 15 = 0$

$\Longrightarrow (8x+5)(2x-3) = 0$-லிருந்து $x = \frac{3}{2}$ அல்லது $-\frac{5}{8}$ எனக் கிடைக்கிறது.

$x = \frac{3}{2}$ எனில், $3-4x = 3-4\left(\frac{3}{2}\right) < 0$. எனவே, $x = \frac{3}{2}$ என்பது சமன்பாட்டின் தீர்வல்ல.

$x = -\frac{5}{8}$ எனில், $3-4x > 0$

ஆகவே, தீர்வுக் கணம் $= \left\{-\frac{5}{8}\right\}$.

குறிப்புரை

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டில் இருப்பதைப் போன்ற சமன்பாடுகளுக்கு தீர்வுக் காண பின்வரும் வர்க்கப்படுத்துதல் பண்பினை பயன்படுத்த வேண்டும். $a = b \Longrightarrow a^2 = b^2$. ஆனால், வர்க்கப்படுத்துவதால் பெறப்படும் புதிய சமன்பாட்டின் அனைத்து தீர்வுகளும், அசல் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாக இருக்கும் என வர்க்கப்படுத்தும் பண்பிலிருந்து பெற இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக, $x = 5$ என்ற சமன்பாட்டை வர்க்கப்படுத்தினால், $x^2 = 25$ ஆகும். இங்கு $x = -5$ மற்றும் $x = 5$ ஆகியன தீர்வாக அமைகின்றன. ஆனால் $x = -5$ என்பது அசல் சமன்பாட்டின் தீர்வல்ல. இவ்வாறான தீர்வு மிகைப்படுத்தப்பட்ட தீர்வு (extraneous solution) எனப்படும்.

ஆகவே, ஒரு சமன்பாட்டின் இரு புறங்களையும் வர்க்கப்டுத்தும்போது, பெறும் இறுதிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் அசல் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகுமா என சரிப்பார்க்க வேண்டும். இதனையே மேலே கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டு விளக்குகிறது. அதே நேரத்தில், வர்க்கப்படுத்துவதால் அசல் சமன்பாட்டின் எந்தத் தீர்வும் விடுபடாது. மாறாக, சில கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் இல்லாமல் வேறு மதிப்புகள் புதியச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாக பெறப்படுகின்றன.

பயிற்சி 3.14

காரணிப்படுத்தும் முறையில் கீழே கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $(2x+3)^2 - 81 = 0$ (ii) $3x^2 - 5x - 12 = 0$ (iii) $\sqrt{5}\,x^2 + 2x - 3\sqrt{5} = 0$

(iv) $3(x^2 - 6) = x(x+7) - 3$ (v) $3x - \frac{8}{x} = 2$ (vi) $x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$

(vii) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{34}{15}$ (viii) $a^2b^2x^2 - (a^2+b^2)x + 1 = 0$

(ix) $2(x+1)^2 - 5(x+1) = 12$ (x) $3(x-4)^2 - 5(x-4) = 12$

3.8.2 வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல் (Solution of a quadratic equation by completing square)

$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$-ல் உள்ள கடைசி உறுப்பு $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ என்பது x-ன் கெழுவின் பாதியின் வர்க்கம் ஆகும். ஆகவே, $x^2 + bx$ ஆனது $x + \frac{b}{2}$-ன் வர்க்கமாக இருப்பதற்கு $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ என்ற உறுப்பு மட்டுமே தேவைப்படுகிறது. ஆகையால், $x^2 + bx$ என்ற கோவையுடன் x-ன் கெழுவின்

பாதியின் வர்க்கத்தைச் சேர்த்தால் கிடைப்பது ஓர் இருபடிக் கோவையின் (binomial) வர்க்கமாக அமைகிறது. இவ்வாறு, இரு படிக் கோவையில் ஒரு உறுப்பினைச் சேர்த்து அதனை முழு வர்க்கமாக மாற்றுவதையே வர்க்கப் பூர்த்தி (completing square) முறை என்கிறோம். இப்பகுதியில் ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வை வர்க்கப்பூர்த்தி முறையில் காணுதலை பின்வரும் நிலைகளில் அடையலாம்.

படி 1 x^2-ன் கெழு 1 எனில், படி 2-க்குச் செல்லவும். இல்லையெனில் சமன்பாட்டின் இரு புறங்களையும் x^2-ன் கெழுவால் வகுக்கவும். மாறிகள் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் சமன்பாட்டின் ஒரே புறத்தில் வைத்துக்கொள்க.

படி 2 x-ன் கெழுவின் பாதியை வர்க்கப்படுத்தி, இதை சமன்பாட்டின் இருபுறங்களிலும் கூட்டுக. $x^2 = t \Longrightarrow x = \sqrt{t}$ அல்லது $x = -\sqrt{t}$, $t \geq 0$, எனும் வர்க்கமூலம் பண்பினைப் பயன்படுத்தி, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.39

வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் $5x^2 - 6x - 2 = 0$-ஐத் தீர்க்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடு $5x^2 - 6x - 2 = 0$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{2}{5} = 0 \qquad \text{(இருபுறமும் 5 ஆல் வகுக்க)}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x = \frac{2}{5} \qquad \text{(x-ன் கெழுவின் பாதி } \tfrac{3}{5}\text{)}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3}{5}\right)x + \frac{9}{25} = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} \qquad \text{(இருபுறமும் } \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = \tfrac{9}{25} \text{ -ஐக் கூட்ட)}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{19}{25}} \qquad \text{(இரு புறமும் வர்க்கமூலம் எடுக்க)}$$

$$x = \frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{19}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}.$$

ஆகவே, தீர்வு கணம் $= \left\{\frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5}\right\}$.

எடுத்துக்காட்டு 3.40

வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க: $a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$

தீர்வு $a = 0$ எனில் நிருவுவதற்கு ஏதுமில்லை, $a \neq 0$ எனில்

$$a^2x^2 - 3abx + 2b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{3b}{a}x + \frac{2b^2}{a^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x = \frac{-2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2\left(\frac{3b}{2a}\right)x + \frac{9b^2}{4a^2} = \frac{9b^2}{4a^2} - \frac{2b^2}{a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{9b^2 - 8b^2}{4a^2} \qquad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Longrightarrow \quad x - \frac{3b}{2a} = \pm\frac{b}{2a} \qquad \Longrightarrow \quad x = \frac{3b \pm b}{2a}$$

ஆகவே, தீர்வு கணம் $= \left\{\frac{b}{a}, \frac{2b}{a}\right\}$.

3.8.3 சூத்திர முறை மூலம் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வு காணுதல் (Solution of quadratic equation by formula method)

இப்பகுதியில் ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காணப் பயனுள்ள இருபடிச் சூத்திரத்தை வருவிப்போம்.

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$, என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம். சமன்பாட்டினை பின்வருமாறு எழுத,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\implies \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \implies \quad x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = -\frac{c}{a}$$

இருபுறமும் $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ ஐக் கூட்ட, $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ எனப் பெறலாம்.

அதாவது, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \implies x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

எனவே, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (1)

தீர்வுக் கணம் = $\left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$.

சமன்பாடு (1)-ல் கொடுக்கப்பட்ட சூத்திரம் இருபடிச் சூத்திரம் (quadratic formula) எனப்படும். இப்போது இருபடிச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி சில இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.41

இருபடிச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாட்டைத் தீர்.

$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$ இங்கு $x + 1 \neq 0,\ x + 2 \neq 0$ மற்றும் $x + 4 \neq 0$.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு இருபடிச் சமன்பாடு வடிவமைப்பில் இல்லை என்பதை அறிக.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{4}{x+4}$$

$$\implies \quad \frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+2}\right] = 2\left[\frac{2x+4-x-4}{(x+4)(x+2)}\right]$$

$$\implies \quad \frac{1}{x+1} = 2\left[\frac{x}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$\implies \quad x^2 + 6x + 8 = 2x^2 + 2x \implies x^2 - 4x - 8 = 0$ என்ற ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டினைப் பெறுகிறோம். (மீ.பொ.ம-வைப் பயன்படுத்தியும் மேலேயுள்ள சமன்பாட்டைப் பெறலாம்)

இருபடிச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த,

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

ஆகவே, $x = 2 + 2\sqrt{3}$ மற்றும் $2 - 2\sqrt{3}$

எனவே, தீர்வுக் கணம் $= \{2 + 2\sqrt{3},\ 2 - 2\sqrt{3}\}$.

www.tntextbooks.in

பயிற்சி 3.15

1 வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க .

(i) $x^2 + 6x - 7 = 0$ (ii) $x^2 + 3x + 1 = 0$

(iii) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ (iv) $4x^2 + 4bx - (a^2 - b^2) = 0$

(v) $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$ (vi) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x + 2$

2. இருபடிச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $15x^2 - 11x + 2 = 0$

(iii) $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ (iv) $3a^2x^2 - abx - 2b^2 = 0$

(v) $a(x^2 + 1) = x(a^2 + 1)$ (vi) $36x^2 - 12ax + (a^2 - b^2) = 0$

(vii) $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{10}{3}$ (viii) $a^2x^2 + (a^2 - b^2)x - b^2 = 0$

3.8.4 இருபடிச் சமன்பாடுகளை உள்ளடக்கிய கணக்குகளின் தீர்வு காணுதல் (Solution of problems involving quadratic equations)

இப்பகுதியில், சொற்றொடர்களால் அமைந்த இருபடிச் சமன்பாடுகளை உள்ளடக்கிய சில எளிய கணக்குகளுக்கும் மற்றும் நம் அன்றாட வாழ்நிலைகளை விவரிக்கும் சில கணக்குகளுக்கும் தீர்வுகள் காண்போம். கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களில் இருந்து சமன்பாட்டை அமைத்து, பின்னர் அதன் தீர்வுகளைக் காண்போம். இறுதியில் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கிற்குப் பொருத்தமான தீர்வைத் தேர்வு செய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 3.42

ஒரு எண் மற்றும் அதன் தலைகீழி ஆகியவற்றின் கூடுதல் $5\frac{1}{5}$ எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு தேவையான எண் x எனக் கொள்க. இங்கு $x \neq 0$. x-ன் தலைகீழி $\frac{1}{x}$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையின்படி,

$$x + \frac{1}{x} = 5\frac{1}{5} \implies \frac{x^2+1}{x} = \frac{26}{5}$$

$$5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$\implies 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$$

அதாவது, $(5x - 1)(x - 5) = 0 \implies x = 5$ அல்லது $\frac{1}{5}$.

எனவே, தேவையான எண் 5 அல்லது $\frac{1}{5}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.43

ஒரு முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் அதன் குத்துயரத்தைவிட 4 செ.மீ அதிகம். முக்கோணத்தின் பரப்பு 48 ச.செ.மீ எனில், அம்முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கத்தையும் உயரத்தையும் காண்க.

www.tntextbooks.in

தீர்வு முக்கோணத்தின் குத்துயரம் x செ. மீ என்க.

ஆகவே, முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் $(x+4)$ செ.மீ.

$$\text{முக்கோணத்தின் பரப்பு} = \frac{1}{2} \times \text{அடிப்பக்கம்} \times \text{உயரம்}$$

நிபந்தனையின்படி, $\frac{1}{2}(x+4)(x) = 48$

$\Longrightarrow \quad x^2 + 4x - 96 = 0 \quad \Longrightarrow (x+12)(x-8) = 0$

$\Longrightarrow x = -12$ அல்லது 8

ஆனால், $x = -12$ என இருக்க முடியாது.

(ஏனெனில், முக்கோணத்தின் பக்க நீளம் மிகை எண்ணாக இருக்கவேண்டும்)

எனவே, $x = 8$, $x + 4 = 12$

ஆகவே, முக்கோணத்தின் அடிப்பக்கம் = 12 செ.மீ மற்றும் உயரம் = 8 செ. மீ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.44

ஒரு மகிழுந்து புறப்பட வேண்டிய நேரத்திலிருந்து 30 நிமிடம் தாமதமாகப் புறப்பட்டது. 150 கி.மீ தூரத்தில் உள்ள சேருமிடத்தை சரியான நேரத்தில் சென்றடைய அதனுடைய வழக்கமான வேகத்தை மணிக்கு 25 கி.மீ அதிகப்படுத்த வேண்டியிருந்தது எனில், மகிழுந்தின் வழக்கமான வேகத்தைக் காண்க.

தீர்வு மகிழுந்தின் வழக்கமான வேகம் = x கி.மீ/மணி.

அதிகரிக்கப்பட்ட பின் வேகம் = $(x+25)$ கி.மீ/மணி.

மொத்த தூரம் = 150 கி.மீ. ; எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் = $\frac{\text{தூரம்}}{\text{வேகம்}}$

கொடுக்கப்பட்ட தூரத்தை மகிழுந்து கடக்க எடுத்துக் கொள்ளும் வழக்கமான நேரம் T_1 எனவும், வேகத்தை அதிகப்படுத்தியதால் எடுத்துக்கொண்ட நேரம் T_2 எனவும் கொள்க.

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, $T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ மணி (30 நிமிடங்கள் = $\frac{1}{2}$ மணி)

$$\Longrightarrow \quad \frac{150}{x} - \frac{150}{x+25} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow 150\left[\frac{x+25-x}{x(x+25)}\right] = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 25x - 7500 = 0 \quad \Longrightarrow (x+100)(x-75) = 0$$

இவ்வாறு $x = 75$ அல்லது -100. ஆனால் $x = -100$ ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கதல்ல.

ஆகவே மகிழுந்தின் வழக்கமான வேகம் = 75கி.மீ / மணி.

பயிற்சி 3.16

1. ஒரு எண் மற்றும் அதன் தலைகீழி ஆகியவற்றின் கூடுதல் $\frac{65}{8}$ எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

2. இரண்டு மிகை எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் 45. சிறிய எண்ணின் வர்க்கம் ஆனது, பெரிய எண்ணின் நான்கு மடங்கிற்குச் சமம் எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

www.tntextbooks.in

3. ஒரு விவசாயி 100ச.மீ பரப்பளவில் ஒரு செவ்வக வடிவக் காய்கறித் தோட்டத்தை அமைக்க விரும்பினார். அவரிடம் 30 மீ நீளமேயுள்ள முள்கம்பி இருந்ததால் வீட்டின் மதில்சுவரைத் தோட்டத்தின் நான்காவது பக்க வேலியாக வைத்துக் கொண்டு அக்கம்பியால் மூன்று பக்கமும் வேலியை அமைத்தார். தோட்டத்தின் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

4. ஒரு செவ்வக வடிவ நிலம் 20 மீ நீளம் மற்றும் 14 மீ அகலம் கொண்டது. அதைச் சுற்றி வெளிப்புறத்தில் அமைந்துள்ள சீரான அகலமுள்ள பாதையின் பரப்பு 111 ச.மீ எனில், பாதையின் அகலம் என்ன?

5. சீரான வேகத்தில் ஒரு தொடர் வண்டியானது (train) 90 கி.மீ தூரத்தைக் கடந்தது. அதனுடைய வேகம் மணிக்கு 15 கி.மீ அதிகரிக்கப்பட்டிருந்தால், பயணம் செய்யும் நேரம் 30 நிமிடங்கள் குறைந்திருக்கும் எனில், தொடர் வண்டியின் சீரான வேகம் காண்க.

6. அசைவற்ற நீரில் ஒரு இயந்திரப்படகின் வேகம் மணிக்கு 15 கி.மீ. என்க. அப்படகு நீரோட்டத்தின் திசையில் 30 கி.மீ தூரம் சென்று, பிறகு எதிர்த் திசையில் திரும்பி 4 மணி 30 நிமிடங்களில் மீண்டும் புறப்பட்ட இடத்திற்கு திரும்பி வந்தால் நீரின் வேகத்தைக் காண்க.

7. ஒரு வருடத்திற்கு முன்பு, ஒருவரின் வயது அவருடைய மகனின் வயதைப்போல் 8 மடங்கு. தற்போது அவருடைய வயது, மகனின் வயதின் வர்க்கத்திற்குச் சமம் எனில், அவர்களுடைய தற்போதைய வயதைக் காண்க.

8. ஒரு சதுரங்கப் பலகையில் 64 சம சதுரங்கள் உள்ளன. ஒவ்வொரு சதுரத்தின் பரப்பு 6.25 ச.செமீ. என்க. சதுரங்கப் பலகையில் நான்குப் பக்கங்களிலும் வெளிப்புற சதுரங்களை ஒட்டி 2 செ.மீ அகலத்தில் பட்டையான ஓரம் உள்ளது எனில், சதுரங்கப் பலகையின் பக்கத்தின் நீளத்தினைக் காண்க.

9. ஒரு வேலையைச் செய்ய A-க்கு B-யை விட 6 நாட்கள் குறைவாகத் தேவைப்படுகிறது. இருவரும் சேர்ந்து அவ்வேலையைச் செய்தால் அதை 4 நாட்களில் முடிக்க இயலும் எனில், B தனியே அவ்வேலையை எத்தனை நாட்களில் முடிக்க இயலும்?

10. ஒரு இரயில் நிலையத்திலிருந்து இரண்டு தொடர் வண்டிகள் ஒரே நேரத்தில் புறப்படுகின்றன. முதல் வண்டி மேற்கு திசையை நோக்கியும், இரண்டாம் வண்டி வடக்கு திசையை நோக்கியும் பயணம் செய்கின்றன. முதல் வண்டியானது இரண்டாவது வண்டியை விட மணிக்கு 5 கி. மீ அதிக வேகத்தில் செல்கிறது. இரண்டு மணி நேரத்திற்குப் பிறகு அவற்றிற்கு இடையேயுள்ளள தொலைவு 50 கி.மீ. எனில், ஒவ்வொரு வண்டியின் சராசரி வேகத்தினைக் காண்க.

3.8.5 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மை (Nature of roots of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ என அறிவோம்.

(i) $b^2 - 4ac > 0$ எனில், இரு வெவ்வேறான மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளன.

அவைகள், $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ மற்றும் $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

(ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனில், சமன்பாட்டிற்கு இரு சமமான மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளன.

சம மூலம் $x = \dfrac{-b}{2a}$ ஆகும்.

(iii) $b^2 - 4ac < 0$ எனில், $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ஒரு மெய்யெண் அல்ல. ஆகையால், இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லை.

www.tntextbooks.in

மூலங்களின் தன்மை $b^2 - 4ac$-ன் மதிப்புகளைச் சார்ந்துள்ளது. மேலும் $b^2 - 4ac$-ன் மதிப்பு $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையைக் காட்டுகிறது. ஆகவே, $b^2 - 4ac$ ஆனது இருபடிச் சமன்பாட்டின் தன்மைக்காட்டி (discriminant) என அழைக்கப்படுகிறது. இது $\triangle$ என்ற குறியால் குறிக்கப்படுகிறது.

தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$	மூலங்களின் தன்மை
$\triangle > 0$	மெய்யெண்கள், சமமில்லை
$\triangle = 0$	மெய்யெண்கள், சமம்
$\triangle < 0$	மூலங்கள் மெய்யெண்கள் அல்ல, அதாவது மூலங்கள் கற்பனையானவை

எடுத்துக்காட்டு 3.45

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையை ஆராய்க.

(i) $x^2 - 11x - 10 = 0$ (ii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$ (iii) $2x^2 + 5x + 5 = 0$

தீர்வு $ax^2 + bx + c = 0$-ன் தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$.

(i) இங்கு $a = 1$; $b = -11$ மற்றும் $c = -10$.

எனவே, தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$

$$= (-11)^2 - 4(1)(-10) = 121 + 40 = 161$$

இங்கு, $\triangle > 0$. ஆகவே மூலங்கள் மெய்யெண்கள் மற்றும் சமமற்றவை.

(ii) இங்கு, $a = 4$, $b = -28$ மற்றும் $c = 49$.

எனவே, தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$

$$= (-28)^2 - 4(4)(49) = 0$$

$\triangle = 0$ என்பதால் மூலங்கள் மெய்யெண்களாகவும் சமமாகவும் இருக்கும்.

(iii) இங்கு, $a = 2$, $b = 5$ மற்றும் $c = 5$.

எனவே, தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac$

$$= (5)^2 - 4(2)(5)$$

$$= 25 - 40 = -15$$

இங்கு $\triangle < 0$ என்பதால், சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண்களாலான மூலங்கள் கிடையாது.

எடுத்துக்காட்டு 3.46

a மற்றும் b ஆகியன மெய்யெண்கள். மேலும் c ஒரு விகிதமுறு எண் என அமைந்த சமன்பாடு $(a-b+c)x^2 + 2(a-b)x + (a-b-c) = 0$ ன் மூலங்கள் ஆனது விகிதமுறு எண்கள் என நிறுவுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $Ax^2 + Bx + C = 0$ என்ற வடிவில் எழுதுக.

இங்கு $A = a - b + c,\ B = 2(a - b)$ மற்றும் $C = a - b - c$

$Ax^2 + Bx + C = 0$-ன் தன்மைக்காட்டி $\triangle = B^2 - 4AC$

அதாவது, $B^2 - 4AC = [2(a-b)]^2 - 4(a-b+c)(a-b-c)$

$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)+c][(a-b)-c]$

$= 4(a-b)^2 - 4[(a-b)^2 - c^2]$

ஆகவே, $\triangle = 4(a-b)^2 - 4(a-b)^2 + 4c^2 = 4c^2$, ஒரு முழுவர்க்கம்.

எனவே, $\triangle > 0$ மற்றும் ஒரு முழு வர்க்கமாதலால், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3.47

$x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் மற்றும் சமம் எனில் k-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $x^2 - 2x(1 + 3k) + 7(3 + 2k) = 0$. (1)

சமன்பாடு (1)-ஐ $ax^2 + bx + c = 0$ என்பதுடன் ஒப்பிட,

$$a = 1,\ b = -2(3k+1),\ c = 7(3+2k).$$

ஆகவே, தன்மைக்காட்டி $\triangle = b^2 - 4ac = b^2 - 4ac$

$= (-2(3k+1))^2 - 4(1)(7)(3+2k)$

$= 4(9k^2 + 6k + 1) - 28(3 + 2k) = 4(9k^2 - 8k - 20)$

சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்,

$\triangle = 0$

$\Longrightarrow\quad 9k^2 - 8k - 20 = 0$

$\Longrightarrow\quad (k-2)(9k+10) = 0$

ஆகவே, $k = 2,\ -\dfrac{10}{9}$.

பயிற்சி 3.17

1. சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையை ஆராய்க.

(i) $x^2 - 8x + 12 = 0$ (ii) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

(iii) $9x^2 + 12x + 4 = 0$ (iv) $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$

(v) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$ (vi) $(x - 2a)(x - 2b) = 4ab$

2. பின்வரும் சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் மற்றும் சமமானவை எனில், k இன் மதிப்புகளைக்கண்டுபிடி.

(i) $2x^2 - 10x + k = 0$ (ii) $12x^2 + 4kx + 3 = 0$

(iii) $x^2 + 2k(x-2) + 5 = 0$ (iv) $(k+1)x^2 - 2(k-1)x + 1 = 0$

3. $x^2 + 2(a+b)x + 2(a^2+b^2) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் அல்ல எனக் காட்டுக.

4. $3p^2x^2 - 2pqx + q^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் அல்ல எனக் காட்டுக.

5. a , b , c மற்றும் $d \neq 0$ என அமைந்த $(a^2+b^2)x^2 - 2(ac+bd)x + c^2 + d^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமமெனில், $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ என நிறுவுக.

6. $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$-ன் மூலங்கள் எப்பொழுதும் மெய்யெண்கள் என்றும், $a = b = c$ என இல்லாவிடில் மட்டுமே அம்மூலங்கள் சமமற்றவை என்றும் நிறுவுக.

7. சமன்பாடு $(1+m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$-ன் மூலங்கள் சமம் எனில், $c^2 = a^2(1+m^2)$ என நிறுவுக.

3.8.6 இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கும் கெழுக்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புகள் (Relations between roots and coefficients of a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டில் a , b , c ஆகியன மெய்யெண்கள் மற்றும் $a \neq 0$ என்க. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β என்க.

ஆகவே, $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ மற்றும் $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

எனவே, மூலங்களின் கூடுதல் $\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\implies$ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன், $\alpha\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\implies$ $= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$

$\implies$ $\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

$ax^2 + bx + c = 0$-ன் மூலங்கள் α, β எனில்,

(i) மூலங்களின் கூடுதல், $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

(ii) மூலங்களின் பெருக்கற்பலன், $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

மூலங்கள் கொடுக்கப்படும்போது இருபடிச் சமன்பாட்டை அமைத்தல் (Formation of quadratic equation when roots are given)

α மற்றும் β என்பன ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனக் கொள்க.

ஆகவே, $(x-\alpha)$ மற்றும் $(x-\beta)$ என்பன அதன் காரணிகள் ஆகும்.

$\therefore \quad (x-\alpha)(x-\beta) = 0$

$\Longrightarrow \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$

அதாவது, x^2 – (மூலங்களின் கூடுதல்) x + மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் = 0

குறிப்பு

கொடுக்கப்பட்ட இரு மூலங்களைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகள் முடிவிலி எண்ணிக்கையில் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 3.48

$3x^2-10x+k=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் $\frac{1}{3}$ எனில், மற்றொரு மூலத்தைக் காண்க. மேலும் k-ன் மதிப்பையும் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $3x^2-10x+k=0$.

இரு மூலங்கள் α மற்றும் β என்க.

$$\therefore \quad \alpha+\beta = \frac{-(-10)}{3} = \frac{10}{3} \qquad (1)$$

$\alpha = \frac{1}{3}$ என்பதை (1)-ல் பிரதியிட, $\beta = 3$ எனக் கிடைக்கிறது.

மேலும், $\alpha\beta = \frac{k}{3}, \quad \Longrightarrow \quad k=3$

ஆகவே, மற்றொரு மூலம் $\beta=3$ மற்றும் k-ன் மதிப்பு = 3.

எடுத்துக்காட்டு 3.49

$ax^2-5x+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதல் 10 மற்றும் பெருக்கற்பலன் 10 எனில், a மற்றும் c ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $ax^2-5x+c=0$.

மூலங்களின் கூடுதல், $\frac{5}{a} = 10, \quad \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$

மூலங்களின் பெருக்குத் தொகை, $\frac{c}{a} = 10$

$$\Longrightarrow \qquad c = 10a = 10\times\frac{1}{2} = 5$$

எனவே, $a=\frac{1}{2}$ மற்றும் $c=5$

குறிப்பு

$ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், α மற்றும் β-க்களைக் கொண்ட $\alpha^2+\beta^2$, $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2-\beta^2$ போன்ற கோவைகளை $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha\beta$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் கொண்டு மதிப்பீடு செய்ய முடியும்.

முடிவுகள்

α மற்றும் β ஆகியவற்றைக் கொண்ட சில முடிவுகள் பின்வருமாறு தரப்பட்டுள்ளன.

(i) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]$

(iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)[\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}]$. இங்கு $\alpha \geq \beta$

(iv) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(v) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - 2(\alpha\beta)^2$

(vii) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

எடுத்துக்காட்டு 3.50

$2x^2 - 3x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\alpha^2 + \beta^2$ (ii) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

(iii) $\alpha - \beta$, இங்கு $\alpha > \beta$ (iv) $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)$

(v) $\left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha} + \beta\right)$ (vi) $\alpha^4 + \beta^4$ (vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta} + \dfrac{\beta^3}{\alpha}$

தீர்வு: கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு $2x^2 - 3x - 1 = 0$. (1)

α மற்றும் β என்பன கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் மூலங்கள் என்க.

சமன்பாடு (1) ஐ $ax^2 + bx + c = 0$ என்பதுடன் ஒப்பிட, $a = 2,\ b = -3,\ c = -1$.

$\therefore \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-3)}{2} = \dfrac{3}{2}$ மற்றும் $\alpha\beta = -\dfrac{1}{2}$

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{9}{4} + 1 = \dfrac{13}{4}$

(ii) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = \dfrac{13}{4} \times (-2) = -\dfrac{13}{2}$

(iii) $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$, இங்கு $\alpha > \beta$

$= \left[\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{4} + 2\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$

(iv) $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha} = \dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \dfrac{\frac{27}{8} + \frac{9}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{45}{4}$

(v) $\left(\alpha + \dfrac{1}{\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\alpha} + \beta\right) = \dfrac{(\alpha\beta+1)(1+\alpha\beta)}{\alpha\beta}$

$= \dfrac{(1+\alpha\beta)^2}{\alpha\beta} = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}$

www.tntextbooks.in

(vi) $\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2$

$$= \left(\frac{13}{4}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{169}{16} - \frac{1}{2}\right) = \frac{161}{16}.$$

(vii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta} + \dfrac{\beta^3}{\alpha} = \dfrac{\alpha^4 + \beta^4}{\alpha\beta} = \left(\dfrac{161}{16}\right)\left(-\dfrac{2}{1}\right) = -\dfrac{161}{8}.$

எடுத்துக்காட்டு 3.51

$7+\sqrt{3}$ மற்றும் $7-\sqrt{3}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட மூலங்கள் $7+\sqrt{3}$ மற்றும் $7-\sqrt{3}$.

மூலங்களின் கூடுதல் $= 7+\sqrt{3}+7-\sqrt{3} = 14.$

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= (7+\sqrt{3})(7-\sqrt{3}) = (7)^2 - (\sqrt{3})^2 = 49 - 3 = 46.$

தேவையான சமன்பாடு, $x^2 -$ (மூலங்களின் கூடுதல்) $x +$ (மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்) $= 0$

ஆகவே, தேவையான சமன்பாடு $x^2 - 14x + 46 = 0$ ஆகும்.

எடுத்தக்காட்டு 3.52

α மற்றும் β என்பன $3x^2 - 4x + 1 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$ மற்றும் $\dfrac{\beta^2}{\alpha}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டினை அமைக்க.

தீர்வு $3x^2 - 4x + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β எனில், $\alpha + \beta = \dfrac{4}{3}$, $\alpha\beta = \dfrac{1}{3}$.

தேவையான சமன்பாட்டிற்கான மூலங்களின் கூடுதல்

$$= \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 3\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{28}{9}$$

மேலும், மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right) = \alpha\beta = \dfrac{1}{3}$

ஆகவே, தேவையான சமன்பாடு $x^2 - \dfrac{28}{9}x + \dfrac{1}{3} = 0$ (அல்லது) $9x^2 - 28x + 3 = 0$ ஆகும்.

பயிற்சி 3.18

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(i) $x^2 - 6x + 5 = 0$ (ii) $kx^2 + rx + pk = 0$

(iii) $3x^2 - 5x = 0$ (iv) $8x^2 - 25 = 0$

2. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூலங்களைக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளை அமைக்கவும்.

(i) 3 , 4 (ii) $3+\sqrt{7}, 3-\sqrt{7}$ (iii) $\dfrac{4+\sqrt{7}}{2}, \dfrac{4-\sqrt{7}}{2}$

www.tntextbooks.in

3. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha - \beta$ (iii) $\dfrac{\alpha^2}{\beta} + \dfrac{\beta^2}{\alpha}$

4. α, β என்பன $3x^2 - 6x + 4 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனில், $\alpha^2 + \beta^2$ -ன் மதிப்புக் காண்க.

5. α, β என்பன $2x^2 - 3x - 5 = 0$-ன் மூலங்கள் எனில், α^2 மற்றும் β^2 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

6. $x^2 - 3x + 2 = 0$-ன் மூலங்கள் α, β எனில், $-\alpha$ மற்றும் $-\beta$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

7. α, β என்பன $x^2 - 3x - 1 = 0$-ன் மூலங்கள் எனில், $\dfrac{1}{\alpha^2}$ மற்றும் $\dfrac{1}{\beta^2}$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

8. $3x^2 - 6x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α, β எனில், கீழ்க்காணும் மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைஅமைக்க

(i) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha + \beta,\ 2\beta + \alpha$

9. $4x^2 - 3x - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தலைகீழிகளை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு ஒன்றினை அமைக்க.

10. $3x^2 + kx - 81 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தின் வர்க்கமெனில், k-ன் மதிப்பைக் காண்க.

11. $2x^2 - ax + 64 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தின் இருமடங்கு எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

12. $5x^2 - px + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின மூலங்கள் α மற்றும் β என்க. மேலும் $\alpha - \beta = 1$ எனில், p-ன் மதிப்பைக் காண்க.

பயிற்சி 3.19

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $6x - 2y = 3, kx - y = 2$ என்ற தொகுப்பிற்கு ஒரேயொரு தீர்வு உண்டெனில்,

(A) $k = 3$ (B) $k \neq 3$ (C) $k = 4$ (D) $k \neq 4$

2. இரு மாறிகளில் உள்ள நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமையாதது எனில், அவற்றின் வரைபடங்கள்

(A) ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்தும் (B) ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும்
(C) எந்தப் புள்ளியிலும் வெட்டிக் கொள்ளாது (D) x-அச்சை வெட்டும்

3. $x - 4y = 8$, $3x - 12y = 24$ என்னும் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பிற்கு
(A) முடிவிலி எண்ணிக்கையில் தீர்வுகள் உள்ளன
(B) தீர்வு இல்லை
(C) ஒரேயொரு தீர்வு மட்டும் உண்டு
(D) ஒரு தீர்வு இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

4. $p(x) = (k+4)x^2+13x+3k$ என்னும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் ஒரு பூச்சியம் மற்றொன்றின் தலைகீழியானால், k-ன் மதிப்பு
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

5. $f(x) = 2x^2 + (p+3)x + 5$ என்னும் பல்லுறுப்புக்கோவையின் இரு பூச்சியங்களின் கூடுதல் பூச்சியமெனில் p-ன் மதிப்பு.
(A) 3 (B) 4 (C) –3 (D) –4

6. $x^2 - 2x + 7$ என்பதை $x+4$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி
(A) 28 (B) 29 (C) 30 (D) 31

7. $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ என்பதை $x-1$ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவு
(A) $x^2 + 4x + 3$ (B) $x^2 - 4x + 3$ (C) $x^2 - 4x - 3$ (D) $x^2 + 4x - 3$

8. $(x^3 + 1)$ மற்றும் $x^4 - 1$ ஆகியனவற்றின் மீ. பொ.வ
(A) $x^3 - 1$ (B) $x^3 + 1$ (C) $x+1$ (D) $x - 1$

9. $x^2 - 2xy + y^2$ மற்றும் $x^4 - y^4$ ஆகியனவற்றின் மீ. பொ.வ
(A) 1 (B) $x+y$ (C) $x-y$ (D) $x^2 - y^2$

10. $x^3 - a^3$ மற்றும் $(x - a)^2$ ஆகியனவற்றின் மீ. பொ.ம
(A) $(x^3 - a^3)(x + a)$ (B) $(x^3 - a^3)(x - a)^2$
(C) $(x - a)^2(x^2 + ax + a^2)$ (D) $(x + a)^2(x^2 + ax + a^2)$

11. $k \in \mathbb{N}$ எனும்போது a^k, a^{k+3}, a^{k+5} ஆகியவற்றின் மீ. பொ.ம
(A) a^{k+9} (B) a^k (C) a^{k+6} (D) a^{k+5}

12. $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 6}$ என்னும் விகிதமுறு கோவையின் மிகச் சுருக்கிய வடிவம்
(A) $\dfrac{x-3}{x+3}$ (B) $\dfrac{x+3}{x-3}$ (C) $\dfrac{x+2}{x-3}$ (D) $\dfrac{x-3}{x+2}$

13. $\dfrac{a+b}{a-b}$ மற்றும் $\dfrac{a^3 - b^3}{a^3 + b^3}$ ஆகியன இரு விகிதமுறு கோவைகள் எனில், அவற்றின் பெருக்கற்பலன்
(A) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$ (B) $\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (C) $\dfrac{a^2 - ab - b^2}{a^2 + ab + b^2}$ (D) $\dfrac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab - b^2}$

14. $\dfrac{x^2 - 25}{x+3}$ என்பதை $\dfrac{x+5}{x^2 - 9}$ ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் ஈவு
(A) $(x-5)(x-3)$ (B) $(x-5)(x+3)$ (C) $(x+5)(x-3)$ (D) $(x+5)(x+3)$

15. $\frac{a^3}{a-b}$ உடன் $\frac{b^3}{b-a}$ ஐக் கூட்ட, கிடைக்கும் புதிய கோவை

(A) a^2+ab+b^2 (B) a^2-ab+b^2 (C) a^3+b^3 (D) a^3-b^3

16. $49\,(x^2-2xy+y^2)^2$-ன் வர்க்கமூலம்

(A) $7|x-y|$ (B) $7(x+y)(x-y)$ (C) $7(x+y)^2$ (D) $7(x-y)^2$

17. $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$ -ன் வர்க்கமூலம்

(A) $|x+y-z|$ (B) $|x-y+z|$ (C) $|x+y+z|$ (D) $|x-y-z|$

18. $121x^4y^8z^6(l-m)^2$-ன் வர்க்கமூலம்

(A) $11x^2y^4z^4|l-m|$ (B) $11x^4y^4|z^3(l-m)|$

(C) $11x^2y^4z^6|l-m|$ (D) $11x^2y^4|z^3(l-m)|$

19. $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள்சமம் எனில், c-ன் மதிப்பு

(A) $\frac{b^2}{2a}$ (B) $\frac{b^2}{4a}$ (C) $-\frac{b^2}{2a}$ (D) $-\frac{b^2}{4a}$

20. $x^2+5kx+16=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் மூலங்கள் இல்லையெனில்,

(A) $k>\frac{8}{5}$ (B) $k>-\frac{8}{5}$ (C) $-\frac{8}{5}<k<\frac{8}{5}$ (D) $0<k<\frac{8}{5}$

21. 3 -ஐ ஒரு மூலமாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

(A) $x^2-6x-5=0$ (B) $x^2+6x-5=0$

(C) $x^2-5x-6=0$ (D) $x^2-5x+6=0$

22. $x^2-bx+c=0$ மற்றும் $x^2+bx-a=0$ ஆகிய சமன்பாடுகளின் பொதுவான மூலம்

(A) $\frac{c+a}{2b}$ (B) $\frac{c-a}{2b}$ (C) $\frac{c+b}{2a}$ (D) $\frac{a+b}{2c}$

23. $a\neq 0$, என அமைந்த சமன்பாடு $ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்யல்ல?

(A) $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (B) $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

(C) $\alpha+\beta=\frac{b}{a}$ (D) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{c}$

24. $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், $\frac{1}{\alpha}$ மற்றும் $\frac{1}{\beta}$ ஆகியனவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச்சமன்பாடு

(A) $ax^2+bx+c=0$ (B) $bx^2+ax+c=0$

(C) $cx^2+bx+a=0$ (D) $cx^2+ax+b=0$

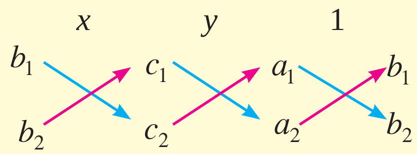
25. $b=a+c$ என்க. $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம் எனில்,

(A) $a=c$ (B) $a=-c$

(C) $a=2c$ (D) $a=-2c$

நினைவில் கொள்க

- x மற்றும் y ஆகிய மாறிகளில் உள்ள நேரியல் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட முடிவுறு கணம் என்பது அந்த மாறிகளில் உள்ள நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு எனப்படும். இத்தொகுப்பையே ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் என்போம்.
- இரு மாறிகளில் ஒன்றை முதலில் நீக்கியபின் சமன்பாட்டுத் தொகுப்பிற்கு தீர்வு காண்பது நீக்கல் முறை எனப்படும்.
- $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தொகுப்பைத் தீர்க்க, குறுக்குப் பெருக்கு முறையை பயன்படுத்த மிக உதவியாகவுள்ள அம்புக்குறிப் படம்



- $p(k) = 0$ எனில், $p(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவைக்கு மெய்யெண் k ஆனது ஒரு பூச்சியம் ஆகும்.
- $p(x) = ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் கெழுக்கள் மற்றும் பூச்சியங்களுக்கு இடையேயான அடிப்படைத் தொடர்புகள்,

  பூச்சியங்களின் கூடுதல் $= -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

  பூச்சியங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் கெழு}}$

- (i) பல்லுறுப்புக்கோவை $p(x)$-க்கு, $x = a$ ஆனது ஒரு பூச்சியம் எனில், எனில் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும்.

  (ii) $x - a$ ஆனது $p(x)$-க்கு ஒரு காரணி எனில், எனில் மட்டுமே $p(a) = 0$ ஆகும்.
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இயற்கணிதக் கோவைகளின் மீ. பொ. வ. என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொருக் கோவையையும் மீதியில்லாமல் வகுக்கக் கூடிய மிகப்பெரிய படியைக் கொண்டக் கோவை ஆகும்.
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட இயற்கணிதக் கோவைகளின் மீ. பொ. ம. என்பது கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு கோவையினாலும் மீதியின்றி வகுபடக் கூடிய மிகக் குறைந்த படியைக் கொண்ட கோவை ஆகும்.
- ஏதேனும் இரண்டு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பொ.வ மற்றும் மீ.பொ.ம. ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன், அவ்விரு பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் பெருக்கற்பலனுக்குச் சமம்.
- $a \in \mathbb{R}$ என்பது ஒரு மிகை மெய்யெண் என்க. a-ன் வர்க்கமூலமானது $b^2 = a$ எனுமாறு அமையும் மெய்யெண் b ஆகும். a-ன் வர்க்கமூலத்தினை $\sqrt[2]{a}$ அல்லது $\sqrt{a}$ எனக் குறிக்கலாம்.

- $ax^2 + bx + c = 0$ என்பது மாறி x-ல் உள்ள ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் ஆகும். இங்கு a, b மற்றும் c என்பன மெய்யெண்கள் மேலும் $a \neq 0$.
- ஒரு இருபடிச் சமன்பாட்டை (i) காரணிப்படுத்தல் முறை (ii) வர்க்கப் பூர்த்தி முறை (iii) சூத்திரத்தை பயன்படுத்தும் முறை ஆகிய முறைகளில் தீர்க்க முடியும்.
- $b^2 - 4ac \geq 0$ எனில், $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ஆகும்.
- $ax^2 + bx + c = 0$ எனும் இருபடிச்சமன்பாட்டிற்கு

  (i) $b^2 - 4ac > 0$ எனில், இரு வெவ்வேறான மெய்யெண் மூலங்கள் உள்ளன

  (ii) $b^2 - 4ac = 0$ எனில், இரு சமமான மெய்யெண்மூலங்கள் உள்ளன

  (iii) $b^2 - 4ac < 0$ எனில், மெய்யான மூலங்கள் இல்லை.

உங்களுக்குத் தெரியுமா ?

பெர்மாட்டின் இறுதித் தேற்றம் (Fermat's last theorem) :

$x^n + y^n = z^n$ என்னும் கோவைக்கு $n > 2$ எனும் போது முழுக்களில் தீர்வு இல்லை.

"உண்மையிலேயே மிகச் சிறந்த நிருபணத்தை நான் கண்டு பிடித்து விட்டேன். ஆனால், நிருபணத்தை முழுமையாக எழுதிவிடும் அளவிற்கு இந்தத் தாளில் இடம் இல்லாமல், மிகக் குறைவான பகுதியே உள்ளது" என பெர்மாட் எழுதினார். 1994-ல் ஆங்கிலேய கணிதவியல் அறிஞர் ஆன்ட்ரு வைல்ஸ் (Andrew Wiles) என்பவர் இதற்குத் தீர்வு காணும் வரை 300 ஆண்டுகளாக இத்தேற்றத்திற்கு தீர்வு காணமுடியவில்லை. உயர்நிலைப்பள்ளி மாணவனாக இருக்கும் போது, நகர நூல்நிலையத்தில் (City Library) இந்தக் கணக்கினை ஆண்ட்ரு வைல்ஸ் தெரிந்து கொண்டார் என்பது ஒரு சிறப்பான செய்தியாகும்.

www.tntextbooks.in

4

அணிகள்

Number, place, and combination - the three intersecting but distinct spheres of thought to which all mathematical ideas admit of being referred .- Sylvester

- அறிமுகம்
- அணிகளின் அமைப்பு
- அணிகளின் வகைகள்
- அணிகளின் கூட்டல், கழித்தல் மற்றும் பெருக்கல்
- அணிச் சமன்பாடுகள்

ஜேம்ஸ் ஜோசப் சில்வெஸ்டர்
(James Joseph Sylvester)
(1814-1897)
இங்கிலாந்து

அணிக் கோட்பாடு, மாறாக் கோட்பாடு, எண்ணியல் கோட்பாடு மற்றும் சேர்ப்புக் கணிதவியல் ஆகிய வற்றிற்கு சில்வெஸ்டர் அடிப்படை கொள்கைகளை அளித்தார். கொடுக் கப்பட்ட ஒரு அணியுடன் பரிமாற்றம் செய்யக்கூடிய அனைத்து அணி களையும் கண்டறிந்தார். மேலும், *"discriminant"* அதாவது தன்மைக் காட்டி முதலான பல கணிதவியல் கலைச் சொற்களை அறிமுகப் படுத்தினார்.

1880-ம் ஆண்டில் இலண்டன் இராயல் சொசைட்டி, அறிவியல் சாதனைக்கான மிக உயரிய விருதான காப்ளி பதக்கத்தை (*Copley Medal*) இவருக்கு வழங்கியது. இவ்வமைப்பு 1901-ம் ஆண்டில் கணித ஆய்வுகளை ஊக்குவிக்கும் பொருட்டு இவரின் நினைவாக "சில்வெஸ்டர் பதக்கம்'' எனும் விருதை நிறுவியது.

4.1 அறிமுகம்

இந்த அத்தியாயத்தில் அணி (Matrix) என்ற முக்கியமான கணிதக் கருத்து பற்றி கற்றறிவோம். இங்கு அணிகளை அறிமுகப்படுத்தி, அதன் இயற்கணித அடிப்படைகளைக் கற்போம்.

18 மற்றும் 19 ஆம் நூற்றாண்டுகளில் அணிகள் கண்டறியப்பட்டு ஒரு கணிதக் கருத்தாக வளர்ச்சியடைந்தது. முதலில், வடிவியல் உருவங்களின் உருமாற்றம் மற்றும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் ஆகியனவற்றின் காரணமாகவே, அணிகள் பற்றியக் கருத்து வளர்ச்சியடைந்தது. தற்போது கணிதவியலில் உள்ள முக்கியமான கருவிகளில் ஒன்றாக அணிகள் விளங்குகின்றன. பல எண்களைக் கொண்ட வரிசையை ஒரே பொருளாகக் கருதி, அதற்கு ஒரு குறியிட்டு, அத்தகைய குறியீடுகளைக் கொண்டு கணக்குகளை மிகவும் சுருங்கிய வடிவில் செய்திட வழிவகைச் செய்வதால், அணிகள் பயனுள்ளவையாக இருக்கின்றன. இவ்வாறு பெறப்படும் கணிதவியலின் சுருக்கெழுத்தான அணிகள் ஒரு சீரிய மற்றும் வலிமையானது ஆகும். அணி பல நடைமுறை கணக்குகளைத் தீர்க்க உதவுகிறது.

1850-ல் ஜேம்ஸ் ஜோசப் சில்வெஸ்டர் என்பவர், எண்களின் வரிசை அமைப்பிற்கு Matrix (அணி) என்ற சொல்லை அறிமுகப் படுத்தினார். Matrix என்பது கருவறையைக் குறிக்கும் இலத்தின் மொழிச் சொல்லாகும். ஆங்கிலத்திலும் இதே பொருள் தான். ஏதாவது ஒன்றை ஏற்படுத்தும் அல்லது உருவாக்கும் இடம் என்ற பொருளில் கூட Matrix எனும் சொல் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

x மற்றும் y-களில் அமைந்த கீழ்க்காணும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் தொகுப்பினைக் கருதுவோம்.

$$3x - 2y = 4 \qquad (1)$$

$$2x + 5y = 9 \qquad (2)$$

நீக்கல் முறையைப் (இதனை காசியன் நீக்கல் முறை எனவும் குறிப்பிடலாம்) பயன்படுத்தி, இதன் தீர்வு (2, 1) என்பதை நம்மால் எளிதில் பெறமுடியும். இந்த நீக்கல் முறையில், மாறிகளை பயன்படுத்தாமல் நாம் கெழுக்களை மட்டும் பயன்படுத்துகின்றோம். மேற்கண்ட நேரியல் சமன்பாடுகளுக்கு அணி இயற்கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி, அதே நீக்கல் முறையில் தீர்வை எளிதில் காணலாம்.

4.2 அணிகளை அமைத்தல் (Formation of matrices)

அணிகள் எவ்வாறு அமைகின்றன என்பதை அறிந்து கொள்ள கீழ்க்கண்ட எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருதுவோம்.

குமாரிடம் 10 பேனாக்கள் உள்ளன. இந்த விவரத்தை (10) என எழுதலாம். அடைப்புக்குறி ( )-க்குள் உள்ள எண் குமாரிடம் உள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கையை குறிக்கும்.

குமாரிடம் 10 பேனாக்கள் மற்றும் 7 பென்சில்கள் உள்ளன என்க. இந்த விவரத்தை (10 7) என எழுதலாம். அடைப்புக்குறி ( )-க்குள் உள்ள முதல் எண் குமாரிடம் உள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும். அடுத்த எண், பென்சில்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்.

பின்வரும் விவரங்களைக் கருதுவோம். குமார் மற்றும் அவருடைய நண்பர்கள் இராசு மற்றும் கோபு ஆகியோரிடமுள்ள பேனா மற்றும் பென்சில்கள் விவரம் :

குமாரிடம் 10 பேனாக்களும் 7 பென்சில்களும்
இராசுவிடம் 8 பேனாக்களும் 4 பென்சில்களும்
கோபுவிடம் 6 பேனாக்களும் 5 பென்சில்களும் உள்ளன.

பின்வருமாறு இவற்றை வரிசைப்படுத்தி அட்டவணை வடிவில் எழுதலாம்.

	பேனாக்கள்	பென்சில்கள்
குமார்	10	7
இராசு	8	4
கோபு	6	5

மேலேயுள்ள பொருட்களின் எண்ணிக்கையினை செவ்வக வரிசையில் பின்வருமாறு எழுதலாம். இதிலுள்ள எண்கள் முறையே அம்மூவரின் பேனா மற்றும் பென்சில்களின் எண்ணிக்கையை குறிப்பிடுகின்றன.

(i) $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ ← முதல் நிரை, ← இரண்டாம் நிரை, ← மூன்றாம் நிரை

↑ முதல் நிரல் ↑ இரண்டாம் நிரல்

இதே விவரத்தை மற்றொரு முறையிலும் கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

	குமார்	இராசு	கோபு
பேனாக்கள்	10	8	6
பென்சில்கள்	7	4	5

இவற்றை செவ்வக வடிவில் வரிசையாக பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

(ii) $\begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ← முதல் நிரை, ← இரண்டாம் நிரை

↑ முதல் நிரல் ↑ 2-ம் நிரல் ↑ 3-ம் நிரல்

www.tntextbooks.in

மேலேயுள்ள (i)-ல் முதல் குத்து வரிசையிலுள்ள எண்கள் முறையே குமார், இராசு, கோபுவிடமுள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கையும், இரண்டாம் குத்து வரிசையிலுள்ள எண்கள் முறையே அவர்களிடமுள்ள பென்சில்களின் எண்ணிக்கையும் குறிக்கின்றன.

அதேபோல், (ii)-ல் முதல் கிடைநிலை வரிசையிலுள்ள எண்கள் முறையே குமார், இராசு, கோபு ஆகியோரிடமுள்ள பேனாக்களின் எண்ணிக்கையும், இரண்டாம் கிடைநிலை வரிசை எண்கள் அவர்களிடமுள்ள பென்சில்களின் எண்ணிக்கையும் குறிக்கின்றன.

மேலே விவரித்தவாறு, எண்களை செவ்வக வடிவில் வரிசைப்படுத்திக் காட்டுதலை அணி (MATRIX) என்கிறோம்,

வரையறை

ஓர் அடைப்புக்குறிக்குள் செவ்வக அமைப்பில் நிரைகளிலும், நிரல்களிலும் வரிசையாக எண்களைக் கொண்ட அமைப்பு, அணி (MATRIX) எனப்படும்.

அணிகளை $A, B, X, Y, \cdots$ போன்ற ஆங்கில பெரிய எழுத்துகளைக் கொண்டு குறிப்போம். ஒவ்வொரு அணியிலும் உள்ள எண்கள் அதன் உறுப்புகள் (entries அல்லது elements) எனப்படும். ஒவ்வொரு கிடைநிலை வரிசையும் அணியின் ஒரு நிரை (row) எனப்படும். ஒவ்வொரு குத்து வரிசையும் அவ்வணியின் ஒரு நிரல் (column) எனப்படும்.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -8 & 9 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ என்பன}$$

அணிகளுக்கான சில எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

4.2.1 அணியின் பொது வடிவம் (General form of a matrix)

m நிரைகளையும், n நிரல்களையும் கொண்ட அணி A-யின் பொதுவடிவம்

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

இங்கு $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{mn}$ என்பன அணியின் உறுப்புகளாகும்.

இந்த அணியை $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ அல்லது $A = (a_{ij})_{m\times n}$ என்றும் எழுதலாம்.

இங்கு $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ மற்றும் $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

மேலும், அணி $A = (a_{ij})_{m\times n}$-ல் a_{ij} என்பது iஆவது நிரை மற்றும் jஆவது நிரல் சந்திக்கும் இடத்திலுள்ள உறுப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ எனில், $a_{23} = 1$. அதாவது, உறுப்பு 1-ஆனது இரண்டாவது நிரையில் மற்றும் மூன்றாவது நிரலில் இருக்கும்.

இதேபோல், $a_{11} = 4,\ a_{12} = 5,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 6,\ a_{22} = 2,\ a_{31} = 7,\ a_{32} = 8$ மற்றும் $a_{33} = 9$.

4.2.2 அணியின் வரிசை (அ) பரிமாணம் (Order or Dimension of a matrix)

A என்ற ஒரு அணியில் m நிரைகளும் n நிரல்களும் இருப்பின், அணி A-ன் வரிசை $m \times n$ ஆகும். (இதை m by n எனப் படிக்கவும்)

உதாரணமாக,

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ என்ற அணியில் 2 நிரைகளும் 3 நிரல்களும் உள்ளன.

எனவே, அணி A-ன் வரிசை 2×3 ஆகும்.

குறிப்பு

$m\times n$ வரிசை கொண்ட அணியில், முதல் எழுத்து m என்பது நிரைகளின் எண்ணிக்கையையும் மற்றும் இரண்டாவது எழுத்து n என்பது நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் குறிக்கும்.

4.3 அணிகளின் வகைகள் (Types of matrices)

இப்போது அணிகளின் சில வகைகளைக் கற்போம்.

(i) நிரை அணி (Row matrix)

ஓர் அணியில் ஒரு நிரை மட்டும் இருந்தால், அவ்வணி நிரை அணி எனப்படும். நிரை அணியை நிரை வெக்டர் (row vector) எனவும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A=(5\ \ 3\ \ 4\ \ 1)$ மற்றும் $B=(-3\ \ 0\ \ 5)$ என்பன நிரை அணிகள். இவற்றின் வரிசைகள் முறையே 1×4 மற்றும் 1×3 ஆகும்.

பொதுவாக, $A=(a_{ij})_{1\times n}$ என்பது $1\times n$ வரிசையுள்ள நிரை அணி ஆகும்.

(ii) நிரல் அணி (Column matrix)

ஓர் அணியில் ஒரு நிரல் மட்டும் இருந்தால், அவ்வணி நிரல் அணி எனப்படும். நிரல் அணியை நிரல் வெக்டர் (column vector) எனவும் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A=\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 5\end{pmatrix}$ என்பன நிரல் அணிகள். இவற்றின் வரிசைகள் முறையே 2×1 மற்றும் 3×1 ஆகும்.

பொதுவாக, $A=[a_{ij}]_{m\times 1}$ என்பது வரிசை $m\times 1$ கொண்ட நிரல் அணி ஆகும்

(iii) சதுர அணி (Square matrix)

ஓர் அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கையானது நிரல்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பின் அவ்வணி சதுர அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ மற்றும் $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & 5 & -7\\ 7 & 6 & 1\end{pmatrix}$ என்பன சதுர அணிகள். இவற்றின் வரிசைகள் முறையே 2 மற்றும் 3 ஆகும்.

பொதுவாக, $A=[a_{ij}]_{m\times m}$ என்பது m வரிசையுள்ள ஒரு சதுர அணியாகும். இங்கு $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{mm}$ என்பன சதுர அணி A-ன் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகள் (principal or leading diagonal elements) எனப்படும்.

(iv) மூலை விட்ட அணி (Diagonal matrix)

ஒரு சதுர அணியில் முதன்மை மூலைவிட்டத்திற்கு மேலேயும் கீழேயும் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் பூச்சியங்கள் எனில், அவ்வணி மூலை விட்ட அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்பன முறையே 2 மற்றும் 3 வரிசையுடைய மூலை விட்ட அணிகளாகும். பொதுவாக, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ என்பது மூலைவிட்ட அணி எனில், $i \neq j$ என்றவாறு உள்ள அனைத்து i,j-களுக்கும் $a_{ij} = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு

மூலைவிட்ட அணிகளில் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகளில் சில உறுப்புகள் பூச்சியங்களாகவும் இருக்கலாம்.

(v) திசையிலி அணி (Scalar matrix)

ஒரு மூலைவிட்ட அணியில், முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புகள் அனைத்தும் சமமாகவும் பூச்சியமில்லாத மாறிலியாகவும் இருப்பின் அந்த அணி, திசையிலி அணி எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ என்பன முறையே 2 மற்றும் 3 வரிசைகளைக் கொண்ட திசையிலி அணிகளாகும்.

பொதுவாக, $A = [a_{ij}]_{m\times m}$ ஒரு திசையிலி அணி எனில், $a_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ எனும்போது} \\ k, & i = j \text{ எனும்போது} \end{cases}$

இங்கு k என்பது ஒரு திசையிலி. அதாவது, k ஒரு மாறிலி.

(vi) அலகு அணி (Unit matrix)

ஒரு திசையிலி அணியில் முதன்மை மூலை விட்ட உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றும் 1 எனில், அந்த அணி அலகு அணி எனப்படும். n வரிசையுடைய அலகு அணியை I_n எனக் குறிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்பன முறையே 2 மற்றும் 3 வரிசையுடைய அலகு அணிகள்.

பொதுவாக, சதுர அணி $A = (a_{ij})_{n\times n}$ என்பது அலகு அணி எனில் $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ எனும்போது} \\ 0, & i \neq j \text{ எனும்போது} \end{cases}$

குறிப்பு

அணிகளில் பெருக்கலைப் பொருத்து அலகு அணியைச் சமனி அணி (identity matrix) எனவும் குறிப்பிடலாம். எல்லா அலகு அணிகளும் திசையிலி அணிகளாகும். ஆனால், ஒரு திசையிலி அணி அலகு அணியாக இருக்க வேண்டியது இல்லை. எண்களில் 1 எவ்வாறு செயல்படுகிறதோ அதேபோல் அணிகளில் அலகு அணி செயல்படுகிறது.

(vii) பூச்சிய அணி (Null matrix or Zero-matrix)

ஓர் அணியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் பூச்சியம் எனில், அந்த அணி பூச்சிய அணி எனப்படும். இந்த அணியை O எனக்குறிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ மற்றும் $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்பன முறையே 2×3 மற்றும் 2×2 வரிசை கொண்ட பூச்சிய அணிகள் ஆகும்.

குறிப்பு

(i) பூச்சிய அணி ஒரு சதுர அணியாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. (ii) எண்களில் பூச்சியம் எவ்வாறு செயல்படுகிறதோ, அதேபோல் அணிகளில் பூச்சிய அணி செயல்படுகிறது. (iii) ஓர் அணியுடன் அதே வரிசையுள்ள பூச்சிய அணியை கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ அந்த அணி மாறாது.

(viii) நிரை நிரல் மாற்று அணி (Transpose of a matrix)

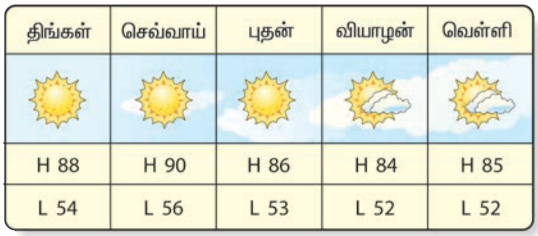
வரையறை: A என்ற அணியின் நிரைகளை நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றக் கிடைக்கும் அணி A-ன் நிரை நிரல் மாற்று அணி எனப்படும். A-ன் நிரை நிரல் மாற்று அணியை A^T (A transpose எனப்படிக்கவும்) எனக் குறிப்போம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \text{ எனில், } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

பொதுவாக, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. இங்கு $i = 1, 2, 3, \cdots, m$ மற்றும் $j = 1, 2, 3, \cdots, n$ எனில்,

$A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$. இங்கு $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ மற்றும் $j = 1, 2, \cdots, m$.

எடுத்துக்காட்டு 4.1



அட்டவணையில் 5 நாட்களின் உயர்ந்த (H) வெப்பநிலை மற்றும் குறைந்த (L) வெப்பநிலை (பாரன்ஹீட்டில்) தரப்பட்டுள்ளன.

5 நாட்களின் உயர்ந்த மற்றும் குறைந்த வெப்பநிலைகளை அணி வடிவத்தில் முறையே முதல் நிரை உயர்ந்த வெப்பநிலையையும், 2-ஆம் நிரை குறைந்த வெப்பநிலையையும் குறிப்பதாக அமைக்கவும். அதிக வெப்பநிலை உடைய நாளைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைக் கொண்டு அணி வடிவில் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$A = \begin{matrix} & \text{தி} & \text{செ} & \text{பு} & \text{வி} & \text{வெ} \\ H & 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ L & 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{matrix}. \text{ அதாவது, } A = \begin{pmatrix} 88 & 90 & 86 & 84 & 85 \\ 54 & 56 & 53 & 52 & 52 \end{pmatrix}$$

அணியின் முதல் நிரையில் உள்ள விவரங்களின்படி அதிக வெப்பநிலை (H) உள்ள நாள் செவ்வாய்க்கிழமை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.2

நான்கு உணவுப் பொருட்களில் ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள கொழுப்புச் சத்து, கார்போஹைடிரேட் மற்றும் புரதச் சத்து ஆகிவற்றின் அளவுகள் (கிராமில்) கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

	பொருள் 1	பொருள் 2	பொருள் 3	பொருள் 4
கொழுப்புச் சத்து	5	0	1	10
கார்போஹைடிரேட்	0	15	6	9
புரதச் சத்து	7	1	2	8

மேற்கண்ட விவரங்களை 3×4 மற்றும் 4×3 அணிகளாக எழுதுக.

தீர்வு தேவையான 3×4 வரிசை கொண்ட அணியை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$. இங்கு நிரல்கள் உணவுப் பொருட்களைக் குறிக்கின்றன.

எனவே, ஒவ்வொரு நிரலும் ஒவ்வொரு உணவுப் பொருளில் உள்ள மூன்று உணவுச் சத்துக்களின் அளவுகளைக் குறிக்கிறது.

மேலும், தேவையான 4×3 வரிசை அணி $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 0 & 15 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

இதிலுள்ள ஒவ்வொரு நிரையும் ஒவ்வொரு உணவுப் பொருளிலுள்ள மூன்று உணவுச் சத்துக்களின் அளவுகளை குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 4.3

$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 0 \\ 9 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ எனில், (i) அணியின் வரிசை (ii) a_{13} மற்றும் a_{42} உறுப்புகள் (iii) 2 என்ற உறுப்பு அமைந்துள்ள நிலை ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு (i) அணி A-ல் 4 நிரைகளும் 3 நிரல்களும் உள்ளன. எனவே A-ன் வரிசை 4×3.

(ii) a_{13} என்ற உறுப்பு முதல் நிரையில் 3-ஆவது நிரலில் உள்ளது. எனவே $a_{13} = 8$.

a_{42} என்ற உறுப்பு 4-ஆவது நிரையில் 2-ஆவது நிரலில் உள்ளது. எனவே $a_{42} = -2$

(iii) உறுப்பு 2 என்பது 2-ஆவது நிரை மற்றும் 2-ஆவது நிரலில் உள்ளது. அதாவது $a_{22} = 2$.

எடுத்துக்காட்டு 4.4

$a_{ij} = |2i - 3j|$ என்ற உறுப்புகளைக் கொண்ட, வரிசை 2×3 உள்ள அணி $A = [a_{ij}]$-யினை அமைக்கவும்.

தீர்வு பொதுவாக 2×3 வரிசையுள்ள அணி

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ என்ற வடிவில் இருக்கும்.

$a_{ij} = |2i - 3j|$, $i = 1, 2$ மற்றும் $j = 1, 2, 3$ எனக்கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால்

$a_{11} = |2(1) - 3(1)| = |-1| = 1$, $a_{12} = |2(1) - 3(2)| = 4$, $a_{13} = |2(1) - 3(3)| = 7$

$a_{21} = |2(2) - 3| = 1$, $a_{22} = |2(2) - 3(2)| = 2$, $a_{23} = |2(2) - 9| = 5$

ஆகவே, தேவையான அணி $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.5

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ எனில், A^T மற்றும் $(A^T)^T$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. A-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணி (transpose) A^T என்பது A-யின் நிரைகளை நிரல்களாகவும் அல்லது நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றி எழுதக் கிடைக்கும்.

எனவே, $A^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. இதேபோல் $(A^T)^T$ அணியானது,

அணி A^T-ன் நிரைகளை நிரல்களாகவும், நிரல்களை நிரைகளாகவும் மாற்றக் கிடைக்கும்.

ஆகவே, $(A^T)^T = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

குறிப்பு

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, $(A^T)^T = A$ என அறிய முடிகிறது. எந்த ஓர் அணி B-க்கும் $(B^T)^T = B$ என்பது உண்மை. மேலும் எந்த ஒரு மாறிலி k-க்கும் $(kA)^T = kA^T$ ஆகும்.

பயிற்சி 4.1

1. ஒரு பொழுது போக்கு நீர் விளையாட்டுப் பூங்காவின் கட்டண விகிதம் பின்வருமாறு.

	வார நாட்களில் கட்டணம் (₹)	விடுமுறை நாட்களில் கட்டணம் (₹)
வயது வந்தோர்	400	500
சிறுவர்	200	250
மூத்தக் குடிமகன்	300	400

வயது வந்தோர், சிறுவர் மற்றும் மூத்தக்குடிமகனுக்கான கட்டண விகிதங்களுக்கான அணிகளை எழுதுக. மேலும் அவற்றின் வரிசைகளை எழுதுக.

2. ஒரு நகரத்தில் 6 மேல்நிலைப் பள்ளிகள், 8 உயர்நிலைப் பள்ளிகள் மற்றும் 13 தொடக்கப் பள்ளிகள் உள்ளன. இந்த விவரங்களை 3×1 மற்றும் 1×3 வரிசைகளைக் கொண்ட அணிகளாக குறிக்கவும்.

3. பின்வரும் அணிகளின் வரிசைகளைக் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 9 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. 8 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு அணிக்கு எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்?

5. 30 உறுப்புகள் கொண்ட அணிக்கு எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்?

6. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு 2×2 வரிசையுடைய அணி $A = [a_{ij}]$-யைக் காண்க

(i) $a_{ij} = ij$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$ (iii) $a_{ij} = \frac{i-j}{i+j}$

7. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு 3×2 வரிசையைக் கொண்ட அணி $A = [a_{ij}]$-யினைக் காண்க.

(i) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (ii) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ (iii) $a_{ij} = \frac{|2i-3j|}{2}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 7 & 4 \\ 6 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ எனில், (i) அணியின் வரிசையைக் காண்க. (ii) a_{24} மற்றும் a_{32} ஆகிய உறுப்புகளை எழுதுக (iii) உறுப்பு 7 அமைந்துள்ள நிரை மற்றும் நிரலைக் காண்க.

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், A-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க.

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ எனில், $(A^T)^T = A$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.

4.4 அணிகளின் மீதான செயல்கள் (Operation on matrices)

இப்பகுதியில் அணிகளின் சமத்தன்மை, ஓர் அணியை ஓர் திசையிலியால் பெருக்கல், அணிகளின் கூட்டல், அணிகளின் கழித்தல் மற்றும் அணிகளின் பெருக்கல் ஆகியவற்றைக் காண்போம்.

(i) அணிகளின் சமத்தன்மை (Equality of matrices)

இரு அணிகள் $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ என்பன சமமெனில்,

(i) அவை சமவரிசை உள்ளனவாகவும்,

(ii) A மற்றும் B அணிகளின் ஒத்த உறுப்புகள் அனைத்தும் சமமாக இருக்கும். அதாவது, அனைத்து i, j-களுக்கு $a_{ij}=b_{ij}$ என இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, அணிகள் $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ சமமில்லை. ஏனெனில், அவ்வணிகளின் வரிசைகள் சமமில்லை.

மேலும், $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. ஏனெனில், சில ஒத்த உறுப்புகள் சமமாக இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4.6

$\begin{pmatrix} x & 5 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & z \\ 5 & y & 1 \end{pmatrix}$ எனில், x, y மற்றும் z ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிகள் சமம். ஆகவே, ஒத்த உறுப்புக்கள் சமமாக இருக்க வேண்டும். ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிடும்போது, நமக்கு $x=3$, $y=9$ மற்றும் $z=4$ எனக் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.7

தீர்வு காண் : $\begin{pmatrix} y \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2x \\ 31+4y \end{pmatrix}$

தீர்வு அணிகள் சமமாக இருப்பதால், ஒத்த உறுப்புகள் சமமாக இருக்கும். ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிடும் போது,

$y=6-2x$; $3x=31+4y$ எனக் கிடைக்கும்.

$y=6-2x$ என்பதை $3x=31+4y$ இல் பிரதியிட, $3x=31+4(6-2x)$

$3x=31+24-8x$ எனக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து $x=5$ ஆகும்.

$x=5$ எனில், $y=6-2(5)=-4$.

ஆகவே, $x=5$ மற்றும் $y=-4$.

(ii) ஓர் அணியை திசையிலியால் பெருக்குதல் (Multiplication of a matrix by a scalar)

வரையறை

அணி $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் k என்பது ஒரு திசையிலி (மெய்யெண்) ஆகியன தரப்பட்டுள்ளன. புதிய அணி $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ ஐ எல்லா i, j-களுக்கும் $b_{ij}=ka_{ij}$ என வரையறுத்தால், அணி B-யை அணி A-ன் திசையிலிப் பெருக்கல் என்போம்.

www.tntextbooks.in

ஆகவே, அணி A-யிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் திசையிலி k ஆல் பெருக்கக்கிடைப்பது அணி B ஆகும். மேலும், $B = kA$ என எழுதலாம். இத்தகைய பெருக்கலையே நாம் திசையிலிப் பெருக்கல் என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ மற்றும் k ஒரு மெய்யெண் எனில்,

$$kA = k\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{pmatrix}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4.8

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ எனில், $3A$-ஐக் காண்க

தீர்வு அணி A-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 3 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் அணி $3A$ ஆகும்.

$$3A = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(-1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(3) & 3(6) & 3(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 9 & 18 & -15 \end{pmatrix}$$

(iii) அணிகளின் கூட்டல் (Addition of matrices)

கணிதம் மற்றும் அறிவியல் பாடங்களில் 3 மாணவர்களும், 3 மாணவிகளும் பெற்ற மதிப்பெண்களை முறையே பின்வரும் அணிகள் A மற்றும் B ஆகியன காட்டுகின்றன.

கணிதம்: $A = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix}$ (மாணவர்கள் / மாணவிகள்)

அறிவியல்: $B = \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$ (மாணவர்கள் / மாணவிகள்)

ஒவ்வொரு மாணவனும் இரு பாடங்களிலும் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்களைக் காண ஒத்த உறுப்புகளைக் கூட்ட வேண்டும்.

$$A + B = \begin{pmatrix} 45 & 72 & 81 \\ 30 & 90 & 65 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 51 & 80 & 90 \\ 42 & 85 & 70 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 45+51 & 72+80 & 81+90 \\ 30+42 & 90+85 & 65+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 & 152 & 171 \\ 72 & 175 & 135 \end{pmatrix}$$

முதல் மாணவன் கணிதத்திலும் அறிவியலிலும் சேர்த்து மொத்தம் 96 மதிப்பெண்கள் பெறுகிறார். அதேபோல் மூன்றாவது மாணவி கணிதத்திலும் அறிவியலிலும் சேர்த்து மொத்தம் 135 மதிப்பெண்கள் பெறுகிறார் என்பதை இறுதியாகப் பெறப்பட்ட அணி காட்டுகிறது.

ஆகவே, ஒரே வரிசையுள்ள இரு அணிகளின் கூடுதல், கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு அணிகளின் ஒத்த உறுப்புகளின் கூடுதல்கள் கொண்ட ஒரு அணியாகும்.

வரையறை

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ ஆகியன சம வரிசை கொண்ட இரு அணிகளானால், A மற்றும் B ஆகியனவற்றின் கூடுதல் அணி $C = [c_{ij}]_{mxn}$ எனில், அனைத்து i மற்றும் j-க்களுக்கு $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ஆகும்.

அணிகளின் கூட்டல் செயல், எண்களின் கூட்டலைப் போலவே அமைந்துள்ளது என அறியலாம். A மற்றும் B அணிகளின் கூடுதல் $A+B$ என குறிக்கப்படும். வெவ்வேறு வரிசை கொண்ட அணிகளின் கூடுதலை வரையறுக்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 4.9

$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், $A+B$ இருக்குமானால், அதனைக் காண்க.

தீர்வு அணி A-ன் வரிசை 2×3 மற்றும் B-ன் வரிசை 2×2. அணிகளின் வரிசை வெவ்வேறாக இருப்பதால், A மற்றும் B ஆகியனவற்றைக் கூட்ட இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 4.10

$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $A + B$ ஐக் காண்க.

தீர்வு அணிகள் A மற்றும் B-ன் வரிசைகள் சமமாக 2×4 என இருப்பதால், $A + B$-ஐக் காண இயலும்.

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5+3 & 6-1 & -2+4 & 3+7 \\ 1+2 & 0+8 & 4+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

எனவே, $A + B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & 10 \\ 3 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(iv) எதிர் அணி (Negative of a matrix)

அணி $A = [a_{ij}]_{mxn}$-ன் எதிர் அணி $-A$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. மேலும், $-A = (-1)A$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது, அனைத்து i மற்றும் j-க்களுக்கும் $b_{ij} = -a_{ij}$ என்றவாறு $-A = [b_{ij}]_{mxn}$ அமையும்.

(v) அணிகளின் கழித்தல் (Subtraction of matrices)

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ என்பன ஒரே வரிசையுள்ள இரு அணிகள் எனில், அவைகளின் கழித்தல் $A - B = A + (-1)B$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $A - B = [c_{ij}]$ எனில், அனைத்து i மற்றும் j-களுக்கும் $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.11

எடைக் குறைப்புக்கான உணவுக் கட்டுப்பாடுத் திட்டத்தின் தொடக்கத்தில் 4 மாணவர்கள் மற்றும் 4 மாணவிகளின் எடை (கி.கி. இல்) முறையே அணி A-ன் முதல் நிரை மற்றும் இரண்டாம் நிரையாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இந்த உணவுக் கட்டுப்பாடு திட்டத்திற்குப் பின்பு அவர்களுடைய எடை அணி B-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$A = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \text{மாணவர்கள்} \\ \text{மாணவிகள்} \end{matrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \text{மாணவர்கள்} \\ \text{மாணவிகள்} \end{matrix}$

மாணவர்கள் மற்றும் மாணவிகளுடைய குறைக்கப்பட்ட எடை அளவினை அணியில் காண்க.

தீர்வு எடை குறைப்பு அணி $A - B = \begin{pmatrix} 35 & 40 & 28 & 45 \\ 42 & 38 & 41 & 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 32 & 35 & 27 & 41 \\ 40 & 30 & 34 & 27 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.5 அணிகளின் கூட்டல் பண்புகள் (Properties of matrix addition)

(i) அணிகளின் கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது (Matrix addition is commutative)

A மற்றும் B ஆகியன ஒரே வரிசையுடைய இரு அணிகள் எனில், $A+B = B+A$ ஆகும்.

(ii) அணிகளின் கூட்டல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது (Matrix addition is associative)

A, B மற்றும் C ஆகியன ஒரே வரிசையுடைய மூன்று அணிகள் எனில்,
$A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) கூட்டல் சமனி (Additive identity)

அணிகளின் கூட்டலில் பூச்சிய அணியானது கூட்டல் சமனியாகும். அதாவது, $m \times n$ என்ற வரிசையுடைய அணி A எனில், $A + O = O + A = A$ ஆகும். இங்கு O என்பது $m\times n$ என்ற வரிசையுடைய பூச்சிய அணியாகும்.

(iv) அணியின் கூட்டலுக்கான நேர்மாறு (Additive inverse)

அணி B ஆனது A என்ற அணிக்கு கூட்டலுக்கான நேர்மாறு அணி எனில், $A+B=B+A= O$. மேலும், $A+(-A)=(-A)+A=O$ என்பதால் $-A$ என்பது A-ன் கூட்டலுக்கான நேர்மாறு எனப்படும்.

குறிப்பு

ஓர் அணியின் கூட்டலுக்கான நேர்மாறு அணி அதன் எதிர் அணி ஆகும். மேலும், ஓர் அணிக்கு கூட்டலுக்கான நேர்மாறு அணி ஒன்றே ஒன்று தான் (unique) இருக்கும்.

பயிற்சி 4.2

1. பின்வரும் அணிச்சமன்பாட்டிலிருந்து x, y மற்றும் z-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.
$\begin{pmatrix} 5x+2 & y-4 \\ 0 & 4z+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}$ எனில், x மற்றும் y-களின் தீர்வுகளைக் காண்க.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ எனில், A-ன் கூட்டல் நேர்மாறு அணியைக் காண்க.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $C = 2A + B$ என்ற அணியைக் காண்க.

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ எனில், $6A - 3B$ என்ற அணியைக் காண்க.

6. $a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ எனில், a மற்றும் b ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

7. $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ மற்றும் $3X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ எனில், X மற்றும் Y ஆகிய அணிகளைக் காண்க.

8. தீர்க்க : $\begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றை சரிபார்க்க : (i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (-A) = O = (-A) + A$.

10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $A + (B + C) = (A + B) + C$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.

11. ஒரு மின்னணு குழுமம் தனது விற்பனைக்காக வாங்கும் மின்னணுப் பொருட்களை கண்காணிக்கும் பொருட்டு தனது மூன்று விற்பனைக் கூடங்களில் விற்பனை செய்யப்படும் பொழுதுபோக்குச் சாதனங்கள் பற்றிய விவரங்களைப் பதிவு செய்தது. இரண்டு வாரங்களில் நடைபெற்ற விற்பனை விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளன.

		T.V.	DVD	Videogames	CD Players
வாரம் I	கடை I	30	15	12	10
	கடை II	40	20	15	15
	கடை III	25	18	10	12
வாரம் II	கடை I	25	12	8	6
	கடை II	32	10	10	12
	கடை III	22	15	8	10

அணிகளின் கூட்டலைப் பயன்படுத்தி இரண்டு வாரங்களில் விற்பனை செய்யப்பட்ட சாதனங்களின் கூடுதலைக் காண்க.

12. ஒரு நீச்சல் குளத்திற்கு ஒரு நாளுக்கான நுழைவுக் கட்டணம் பின்வருமாறு

ஒரு நாளுக்கான நுழைவுக் கட்டணம் (₹)		
உறுப்பினர்	சிறுவர்	பெரியவர்
பிற்பகல் 2 மணிக்கு முன்பு	20	30
பிற்பகல் 2 மணிக்கு பின்பு	30	40
உறுப்பினர் அல்லாதவர்		
பிற்பகல் 2 மணிக்கு முன்பு	25	35
பிற்பகல் 2 மணிக்கு பின்பு	40	50

உறுப்பினர் அல்லாதவர்களுக்கு ஏற்படும் கூடுதல் கட்டணத்தைக் குறிக்கும் அணியைக் காண்க.

4.6 அணிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of matrices)

செல்வி என்பவர் 3 பேனாக்களையும் 2 பென்சில்களையும் வாங்க விரும்புகிறார் என்க. மீனா என்பவருக்கு 4 பேனாக்களும், 5 பென்சில்களும் தேவைப்படுகிறது. ஒரு பேனா மற்றும் ஒரு பென்சில் ஆகியவற்றின் விலை முறையே ₹ 10 மற்றும் ₹ 5 எனில், ஒவ்வொருவருக்கும் பொருட்களை வாங்கத் தேவைப்படும் தொகை எவ்வளவு?

$3 \times 10 + 2 \times 5 = 40$. எனவே, செல்விக்கு ₹ 40 தேவை.

$4 \times 10 + 5 \times 5 = 65$. எனவே, மீனாவிற்கு ₹ 65 தேவை.

www.tntextbooks.in

அணிகளின் பெருக்கலைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட தேவைப்படும் தொகைகளைக் காணலாம். மேற்கண்ட தகவல்களை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

தேவையானவை	விலை (₹)	தேவைப்படும் தொகை (₹)
செல்வி, மீனா $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\times 10 + 2\times 5 \\ 4\times 10 + 5\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 65 \end{pmatrix}$

மற்றொரு கடையில் ஒரு பேனா மற்றும் ஒரு பென்சிலின் விலைகள் முறையே ₹8 மற்றும் ₹4 எனக்கொள்வோம். இப்போது செல்விக்கும் மீனாவிற்கும் தேவைப்படும் தொகைகள் (₹-ல்) முறையே $3\times 8 + 2\times 4 = 32$ மற்றும் $4\times 8 + 5\times 4 = 52$ ஆகும்.

மேற்கண்ட தகவல்களை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

தேவையானவை	விலை (₹)	தேவைப்படும் தொகை (₹)
செல்வி, மீனா $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\times 8 + 2\times 4 \\ 4\times 8 + 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 52 \end{pmatrix}$

இருவரும் இரண்டு கடைகளிலும் தங்களுக்குத் தேவைப்படும் பேனாக்கள் மற்றும் பென்சில்களை வாங்கும் தகவல்களை பின்வருமாறு காணலாம்.

தேவையானவை	விலை (₹)	தேவைப்படும் தொகை (₹)
செல்வி, மீனா $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\times 10 + 2\times 5 & 3\times 8 + 2\times 4 \\ 4\times 10 + 5\times 5 & 4\times 8 + 5\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 32 \\ 65 & 52 \end{pmatrix}$

மேலேயுள்ள எடுத்துக்காட்டிலிருந்து, முதல் அணியின் நிரல்களின் எண்ணிக்கை இரண்டாவது அணியின் நிரைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருப்பின், இரண்டு அணிகளின் பெருக்கலைக் காண இயலும். மேலும், இரு அணிகளின் பெருக்கற்பலனில் உள்ள உறுப்புகள் கிடைக்க, முதல் அணியின் நிரையில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பையும் முறையே இரண்டாவது அணியின் நிரலில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புடன் பெருக்கிக் கூட்ட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ எனில், பெருக்கற்பலன் அணி AB-யைக் காண இயலும். பெருக்கற்பலன் அணி

$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$-ஐக் காண பின்வரும் படிகளில் விளக்குவோம்.

படி 1 : A அணியின் முதல் நிரை உறுப்புகளை முறையே B அணியின் முதல் நிரல் உறுப்புகளால் பெருக்கி, பெருக்கற்பலன்களைக் கூட்டுக. கூட்டி வரும் மதிப்பினை AB-ன் முதல் நிரை மற்றும் முதல் நிரலில் எழுதுக.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) + (-1)5 & \\ & \end{pmatrix}$$

படி 2: படி 1-ல் உள்ள பெருக்கல் முறையைப் பின்பற்றி A-ன் முதல் நிரையிலிலுள்ள உறுப்புகளை முறையே B-ன் இரண்டாம் நிரலிலுள்ள உறுப்புகளால் பெருக்குக. பெருக்கற்பலன்களின் கூடுதலை, AB-யில் முதல் நிரையிலுள்ள இரண்டாம் நிரலில் எழுதுக.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3) + (-1)5 & 2(-9) + (-1)7 \\ & \end{pmatrix}$$

www.tntextbooks.in

படி 3: அதே முறையைப் பின்பற்றி A-ன் இரண்டாவது நிரையிலுள்ள உறுப்புகளை B-ன் முதல் நிரலிலுள்ள உறுப்புகளால் பெருக்குக. பெருக்கற்பலன்களின் கூட்டுத் தொகையை AB-ன் இரண்டாவது நிரையில் முதல் நிரலில் எழுதுக.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & \end{pmatrix}$$

படி 4: AB-ன் இரண்டாம் நிரைக்கும், இரண்டாம் நிரலுக்கும் இதே முறையைப் பயன்படுத்துக.

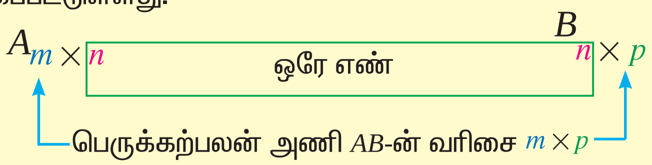
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix}$$

படி 5: பெறப்பட்ட எண் மதிப்புகளைச் சுருக்கி அணி AB-யினைக் காண்க.

$$\begin{pmatrix} 2(3)+(-1)5 & 2(-9)+(-1)7 \\ 3(3)+4(5) & 3(-9)+4(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -25 \\ 29 & 1 \end{pmatrix}$$

வரையறை

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ மற்றும் $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ எனில், இவ்விரு அணிகளின் பெருக்கற்பலன் அணி AB வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் AB-ன் வரிசை $m \times p$ ஆகும். இவ்வுண்மை பின்வரும் படத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.



எடுத்துக்காட்டு 4.12

பின்வருவனவற்றிற்கு அணிகளின் பெருக்கற்பலன் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்கவும். அவ்வாறு வரையறுக்கப்படின், பெருக்கி வரும் அணியின் வரிசையைக் காண்க.

(i) $A_{2\times 5}$ மற்றும் $B_{5\times 4}$ (ii) $A_{1\times 3}$ மற்றும் $B_{4\times 3}$

தீர்வு

(i) A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருப்பதால் பெருக்கற்பலன் அணி AB வரையறுக்கப்படுகிறது.

மேலும், AB-யின் வரிசை 2×4 ஆகும்.

(ii) இங்கு A-ன் வரிசை 1×3 மற்றும் B-ன் வரிசை 4×3

அணி A-ன் நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இல்லை என்பதால், இவ்விரு அணிகளின் பெருக்கலை வரையறுக்க இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு 4.13

தீர்வு காண்க : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

தீர்வு $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 4x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$

www.tntextbooks.in

இருபுறமும் ஒத்த உறுப்புகளை ஒப்பிடும் போது,

$$3x + 2y = 8 \quad \text{மற்றும்} \quad 4x + 5y = 13$$

$$\Longrightarrow 3x + 2y - 8 = 0 \quad \text{மற்றும்} \quad 4x + 5y - 13 = 0.$$

குறுக்குப் பெருக்கல் முறையில் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்போம்.

	x		y		1
2		–8		3		2
5		–13		4		5

$$\Longrightarrow \frac{x}{-26+40} = \frac{y}{-32+39} = \frac{1}{15-8} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{14} = \frac{y}{7} = \frac{1}{7}$$

ஆகவே, $x = 2$ மற்றும் $y = 1$

எடுத்துக்காட்டு 4.14

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ மற்றும் $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$ என நிறுவுக.

தீர்வு அணி A ஆனது ஒரு சதுர அணி என்பதால் A^2 வரையறுக்கப்படுகிறது.

எனவே, $A^2 = A \times A$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

தற்போது, $(a+d)A = (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவைகளிலிருந்து,

$$A^2 - (a+d)A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = (bc - ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

எனவே, $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$

4.7 அணிகளின் பெருக்கல் பண்புகள் (Properties of matrix multiplication)

மெய்யெண்களுக்கான பெருக்கல் பண்புகளில் சில முக்கியமான பண்புகள், அணிகளின் பெருக்கற்பலனில் மெய்யாக இருக்காது. அத்தகைய சில பண்புகளாவன :

(i) பொதுவாக $AB \neq BA$.மேலும், AB காண முடிந்தால் BA காண முடியும் என்று கூற இயலாது.

(ii) A அல்லது B பூச்சிய அணியாக இல்லாமலிருந்தாலும் AB = 0 ஆக இருக்கலாம்.
அதாவது, AB = 0 எனில், A = 0 அல்லது B = 0 எனக் கருத இயலாது.

(iii) A ஒரு பூச்சிய மற்ற அணி மற்றும் $AB = AC$ என்பதில் B = C எப்போதும் கருத இயலாது.

எடுத்துக்காட்டாக, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ஆகிய அணிகளிலிருந்து பின்வருவனவற்றை அறியலாம்.

(i) $AB \neq BA$ (ii) A மற்றும் D பூச்சிய அணிகள் அல்ல. ஆனால், AD = 0

(iii) $AB = AC$, ஆனால் B ≠ C.

அணிப் பெருக்கலின் சில பண்புகளை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் காண்போம்.

(i) **பொதுவாக அணிகளின் பெருக்கல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதல்ல**
(Matrix multiplication is not commutative in general)

A மற்றும் B என்பன இரு அணிகள். AB மற்றும் BA ஆகியன வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன எனில் $AB = BA$-வாக இருக்க வேண்டியஅவசியமில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 4.15

$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ எனில், AB மற்றும் BA ஆகிய அணிகளைக் காண்க. (அவைகள் இருப்பின்)

தீர்வு அணி A-யின் வரிசை 3×2 மற்றும் B-யின் வரிசை 2×3. எனவே AB மற்றும் BA-ன் பெருக்கற்பலன்கள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

தற்போது, $AB = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 72-42 & -24+7 & 16+35 \\ -18+24 & 6-4 & -4-20 \\ 0+18 & 0-3 & 0-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -17 & 51 \\ 6 & 2 & -24 \\ 18 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

இவ்வாறே, $BA = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & -69 \\ 50 & -61 \end{pmatrix}$. (இங்கு $AB \neq BA$ என்பதைக் கவனிக்கவும்)

குறிப்பு

ஒரே வரிசைக் கொண்ட மூலை விட்ட அணிகளின் பெருக்கலில் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்டு. மேலும் அலகு அணி, அதே வரிசையுள்ள எந்தவொரு சதுர அணியுடனும் பெருக்கலைப் பொருத்து பரிமாற்றுப் பண்பு கொண்டிருக்கும்.

(ii) **எப்போதும் அணியின் பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது**
(Matrix multiplication is always associative)

A, B மற்றும் C என்பன ஏதேனும் மூன்று அணிகளில், இருபுறங்களிலுள்ள பெருக்கற்பலன்கள் வரையறுக்கப்படின், $(AB)C = A(BC)$ என்பது மெய்யாகும்.

(iii) **அணிகளின் பெருக்கலானது, கூட்டலின் கீழ் பங்கீட்டுப் பண்பு உடையது**
(Matrix multiplication is distributive over addition)

A, B மற்றும் C என்பன ஏதேனும் மூன்று அணிகள் எனில், பின்வருவனவற்றின் இருபுறங்களிலுள்ள பெருக்கற்பலன்கள் வரையறுக்கப்படும்போது,

(i) $A(B+C) = AB + AC$

(ii) $(A+B)C = AC + BC$.

எடுத்துக்காட்டு 4.16

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $A(B+C) = AB + AC$ என்பதை சரிப்பார்க்கவும்.

தீர்வு
$$B+C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 1 & 10\end{pmatrix}$$
$$A(B+C)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 1 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 38\\ 5 & 34\end{pmatrix} \quad (1)$$
$$AB+AC=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 6 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-6+12 & 15+14\\ 2+24 & -5+28\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3-10 & 3+6\\ -1-20 & -1+12\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}6 & 29\\ 26 & 23\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7 & 9\\ -21 & 11\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 38\\ 5 & 34\end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, $A(B+C)=AB+AC$

(iv) அணிகளின் பெருக்கலுக்கான சமனி அணி (Multiplicative identity)

எந்த ஒரு எண்ணையும் 1 ஆல் பெருக்கும்போது, அதே எண் கிடைக்கும். இப்பண்பு கொண்ட எண் 1-ஐப் போல அணிகளின் இயற்கணிதத்திலும் இத்தகைய பண்பினை கொண்ட அணியினை அறிமுகப்படுத்துவோம்.

n வரிசை கொண்ட சதுர அணி A-க்கு $AI=IA=A$ என்பது மெய்யாகும். இங்கு I என்பது n வரிசை கொண்ட அலகு அணியாகும். எனவே, I என்பது பெருக்கல் சமனி (identity matrix under multiplication) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 4.17

$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}$ எனில், $AI=IA=A$ என்பதைச் சரிபார்க்க. இங்கு I என்பது வரிசை 2 கொண்ட அலகு அணி.

தீர்வு
$$AI=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+3\\ 9+0 & 0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}=A$$
$$IA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 3+0\\ 0+9 & 0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 9 & -6\end{pmatrix}=A$$

எனவே, $AI=IA=A$.

(v) அணியின் பெருக்கல் நேர்மாறு (Multiplicative inverse of a Matrix)

n வரிசை கொண்ட சதுர அணி A மற்றும் அதே n வரிசை கொண்ட மற்றொரு சதுர அணி B ஆகிய இரு அணிகள் $AB=BA=I$, I என்பது n வரிசை கொண்ட அலகு அணி, என்றவாறு இருப்பின், B என்பது A-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு அணி எனப்படும். A-ன் நேர்மாறு அணியை A^{-1} எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

(i) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ போன்ற ஒரு சில சதுர அணிகளுக்கு பெருக்கல் நேர்மாறு இல்லை.

(ii) B என்பது A-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு அணியானால், A என்பது B-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு ஆகும்.

(iii) அணிகளின் பெருக்கல் நேர்மாறு ஒருமைத் தன்மை (uniqueness) உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 4.18

$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ஆகியன அணிப் பெருக்கலைப் பொருத்து ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு அணி என நிறுவுக.

தீர்வு தற்போது, $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -15+15 \\ 2-2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

மேலும், $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 10-10 \\ -3+3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட அணிகள் அணிப்பெருக்கலின் கீழ் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறு அணிகளாக அமைகின்றன.

(vi) **நிரை நிரல் மாற்று அணியின் பின்-திருப்புகை விதி (Reversal law for transpose of matrices)**

A மற்றும் B என்பன இரு அணிகள் மற்றும் AB வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், $(AB)^T = B^T A^T$.

எடுத்துக்காட்டு 4.19

$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகளுக்கு $(AB)^T = B^T A^T$ என்பதை சரிப்பார்க்க.

தீர்வு தற்போது, $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}(1 \;\; 3 \;\; -6) = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{pmatrix}$

ஆகவே, $(AB)^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ (1)

இவ்வாறே, $B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}(-2 \;\; 4 \;\; 5)$

$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{pmatrix}$ (2)

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $(AB)^T = B^T A^T$ என்பது சரிப்பார்க்கப்பட்டது.

பயிற்சி 4.3

1. பின்வருவனவற்றுள் ஒவ்வொன்றிலும் அணிகளின் பெருக்கற் பலன் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதா எனத் தீர்மானிக்க. அவ்வாறிருப்பின், பெருக்கற்பலனின் வரிசையை எழுதுக.

(i) AB, இங்கு $A = [a_{ij}]_{4\text{x}3}$, $B = [b_{ij}]_{3\text{x}2}$ (ii) PQ, இங்கு $P = [p_{ij}]_{4\text{x}3}$, $Q = [q_{ij}]_{4\text{x}3}$

(iii) MN, இங்கு $M = [m_{ij}]_{3\text{x}1}$, $N = [n_{ij}]_{1\text{x}5}$ (iv) RS, இங்கு $R = [r_{ij}]_{2\text{x}2}$, $S = [s_{ij}]_{2\text{x}2}$

www.tntextbooks.in

2. பின்வருவனவற்றிற்கு அணிகளின் பெருக்கல் வரையறுக்கப்படுமானால், அவற்றைக் காண்க.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$

3. ஒரு பழ வியாபாரி தன்னுடைய கடையில் பழங்களை விற்பனை செய்கிறார். ஆப்பிள், மாம்பழம் மற்றும் ஆரஞ்சு ஆகியவற்றின் ஒவ்வொன்றின் விற்பனை விலை முறையே ₹ 20, ₹ 10 மற்றும் ₹ 5 ஆகும். 3 நாட்களில் விற்பனையாகும் பழங்களின் எண்ணிக்கைகளின் விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

நாள்	ஆப்பிள்	மாம்பழம்	ஆரஞ்சு
1	50	60	30
2	40	70	20
3	60	40	10

ஒவ்வொரு நாளிலும் கிடைத்த மொத்த விற்பனைத் தொகையைக் குறிப்பிடும் ஒரு அணியை எழுதுக. இதிலிருந்து பழங்களின் விற்பனையில் கிடைத்த மொத்தத் தொகையைக் கணக்கிடுக.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ எனில், x மற்றும் y-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix}$ மற்றும் $AX = C$ எனில், x மற்றும் y-களின் மதிப்புகளைக் காண்க.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ எனில், $A^2 - 4A + 5I_2 = O$ என நிறுவுக.

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், AB மற்றும் BA ஆகியவற்றைக் காண்க. அவை சமமாக இருக்குமா ?

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $(AB)C = A(BC)$ என்பதை சரிப்பார்க்கவும்.

9. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ எனில், $(AB)^T = B^T A^T$ என்பதை சரிப்பார்க்கவும்.

10. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ என்ற அணிகள் ஒன்றுக்கொன்று பெருக்கல் நேர்மாறு அணி என நிறுவுக.

11. தீர்க்க : $\begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ எனில், $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ என நிறுவுக.

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ எனில், $(A+B)C$ மற்றும் $AC + BC$ என்ற அணிகளைக் காண்க. மேலும், $(A+B)C = AC + BC$ என்பது மெய்யாகுமா ?

பயிற்சி 4.4

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. பின்வருவனவற்றுள் எந்தக்கூற்று மெய்யானதல்ல?
   (A) திசையிலி அணியானது ஒரு சதுர அணியாகும்.
   (B) மூலை விட்ட அணியானது ஒரு சதுர அணியாகும்.
   (C) திசையிலி அணியானது ஒரு மூலை விட்ட அணியாகும்.
   (D) மூலை விட்ட அணியானது ஒரு திசையிலி அணியாகும்.

2. $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஒரு சதுர அணி எனில்,
   (A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = 1$ (D) $m = n$

3. $\begin{pmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ எனில், x மற்றும் y-களின் மதிப்புகள் முறையே
   (A) $-2 , 7$ (B) $-\frac{1}{3}, 7$ (C) $-\frac{1}{3} , -\frac{2}{3}$ (D) $2 , -7$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ எனில், $A + B =$
   (A) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (C) (-14) (D) வரையறுக்கப்படவில்லை

5. ஒரு அணியின் வரிசை 2×3 எனில், அவ்வணியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை
   (A) 5 (B) 6 (C) 2 (D) 3

6. $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ x & 8 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், x-ன் மதிப்பு
   (A) 1 (B) 2 (C) $\frac{1}{4}$ (D) 4

7. A-ன் வரிசை 3×4 மற்றும் B-ன் வரிசை 4×3 எனில், BA-ன் வரிசை
   (A) 3×3 (B) 4×4 (C) 4×3 (D) வரையறுக்கப்படவில்லை

8. $A\times\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ எனில், A-ன் வரிசை
   (A) 2×1 (B) 2×2 (C) 1×2 (D) 3×2

9. A மற்றும் B என்பன சதுர அணிகள். மேலும் $AB = I$ மற்றும் $BA = I$ எனில், B என்பது
   (A) அலகு அணி (B) பூச்சிய அணி
   (C) A-ன் பெருக்கல் நேர்மாறு அணி (D) $-A$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ எனில், x மற்றும் y-களின் மதிப்புகள் முறையே
    (A) $2 , 0$ (B) $0 , 2$ (C) $0 , -2$ (D) $1 , 1$

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A + B = O$ எனில், $B =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ எனில், $A^2 =$

(A) $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

13. A-ன் வரிசை $m \times n$ மற்றும் B-ன் வரிசை $p \times q$ என்க. மேலும், A மற்றும் B ஆகியனவற்றின் கூடுதல் காண இயலுமெனில்,

(A) $m = p$ (B) $n = q$ (C) $n = p$ (D) $m = p, n = q$

14. $\begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ எனில், a-ன் மதிப்பு

(A) 8 (B) 4 (C) 2 (D) 11

15. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ மற்றும் $A^2 = I$ எனில்,

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

16. $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ மற்றும் $a_{ij} = i + j$ எனில், $A =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ எனில், a, b, c மற்றும் d ஆகியனவற்றின் மதிப்புகள் முறையே

(A) $-1, 0, 0, -1$ (B) 1, 0, 0, 1 (C) $-1, 0, 1, 0$ (D) 1, 0, 0, 0

18. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ மற்றும் $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ எனில், அணி $B =$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 5 & x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$ எனில், x-ன் மதிப்பு

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) 0

20. A மற்றும் B என்பன ஒரே வரிசையுடைய சதுர அணிகள் எனில், கீழ்க்கண்டவைகளில் எது மெய்யாகும்?

(A) $(AB)^T = A^T B^T$ (B) $(A^T B)^T = A^T B^T$ (C) $(AB)^T = BA$ (D) $(AB)^T = B^T A^T$

www.tntextbooks.in

நினைவில் கொள்க

- ஒரு அணி என்பது செவ்வக வடிவில் அமைக்கப்பட்ட எண்களின் அமைப்பாகும்.
- ஒரு அணியில் m நிரைகளும் n நிரல்களும் உள்ளது எனில், அதன் வரிசை $m \times n$ ஆகும்.
- $m = 1$ எனில், $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஒரு நிரை அணியாகும்.
- $n = 1$ எனில், $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஒரு நிரல் அணியாகும்.
- $m = n$ எனில், $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ என்பது ஒரு சதுர அணியாகும்.
- $i \neq j$ எனும்போது, $a_{ij} = 0$ எனில், $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ஒரு மூலை விட்ட அணியாகும்.
- $i = j$ எனும்போது $a_{ij} = k$ மற்றும் $i \neq j$ எனும்போது $a_{ij} = 0$ எனில், $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ஒரு திசையிலி அணியாகும். (k என்பது பூச்சியமற்ற ஒரு மாறிலி).
- $i = j$ எனும்போது $a_{ij} = 1$ மற்றும் $i \neq j$ எனும்போது $a_{ij} = 0$ எனில், $A = [a_{ij}]$ என்பது ஒரு அலகு அணியாகும்.
- ஒரு அணியில் எல்லா உறுப்புகளும் பூச்சியங்கள் எனில், அந்த அணி பூச்சிய அணி எனப்படும்.
- A மற்றும் B அணிகள் ஒரே வரிசை கொண்டதாகவும் அவற்றின் ஒத்த உறுப்புகள் சமமாகவும் இருப்பின், அணிகள் A மற்றும் B சமமாகும்.
- இரண்டு அணிகளின் வரிசைகள் சமமாக இருப்பின் அந்த அணிகளை கூட்டவோ (அ) கழிக்கவோ இயலும்.
- அணிகளின் கூட்டல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையது. அதாவது A மற்றும் B அணிகள் ஒரே வரிசை கொண்டவையாக இருப்பின் $A + B = B + A$.
- அணிகளின் கூட்டல் சேர்ப்பு பண்பு உடையது. அதாவது, A, B மற்றும் C அணிகள் ஒரே வரிசை உள்ளவையாக இருப்பின் $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- அணி A-யின் வரிசை $m\times n$ மற்றும் B-ன் வரிசை $n\times p$ எனில், பெருக்கற்பலன் அணி AB வரையறுக்கப்படும். மேலும் அதன் வரிசை $m\times p$ ஆகும்.
- பொதுவாக அணிகளின் பெருக்கல் பரிமாற்றுப் பண்பு உடையதல்ல. அதாவது, $AB \neq BA$.
- அணிகளின் பெருக்கல் சேர்ப்புப் பண்பு உடையது. அதாவது, $(AB)C = A(BC)$ ஆகும். (இருபுறமும் வரையறுக்கப்படின்)
- $(A^T)^T = A$, $(A + B)^T = A^T + B^T$ மற்றும் $(AB)^T = B^T A^T$.
- $AB = BA = I$ எனில், அணிகள் A மற்றும் B ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று பெருக்கலின் நேர்மாறு எனப்படும்.
- $AB = O$ எனில், $A = O$ ஆகவோ அல்லது $B = O$ ஆகவோ இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. எனவே, பூச்சியமல்லாத இரு அணிகளின் பெருக்கற்பலன், பூச்சிய அணியாக இருக்கலாம்.

உங்களுக்குத் தெரியுமா ?

முதன்முதலில், 2003 ஆம் ஆண்டு வழங்கப்பட்ட பரிசான 'அபெல் பரிசு' (Abel Prize) 1 மில்லியன் அமெரிக்க டாலர்களைக் கொண்டது. இது ஒரு சர்வதேச விருதாகும். நார்வே அறிவியல் அகாடமியினால் ஒவ்வொரு ஆண்டும் நார்வே நாட்டின் அரசரால் ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட கணிதவியல் வல்லுநர்களுக்கு இப்பரிசு வழங்கப்படுகிறது.

சென்னையில் பிறந்து, அமெரிக்காவில் வாழும் S.R. சீனிவாச வரதன் அவர்களுக்கு 2007-ல் அபெல் பரிசு வழங்கப்பட்டது. நிகழ்தகவியலில் குறிப்பாக அதிக விலக்கங்கள் உள்ளவைகளை ஒன்றிணைத்து அவர் உருவாக்கிய கருத்தியலுக்காக அபெல் பரிசு வழங்கப்பட்டது.

www.tntextbooks.in

5

ஆயத்தொலை வடிவியல்

No human investigation can be called real science if it cannot be demonstrated mathematically - Leonardo de Vinci

- அறிமுகம்
- பிரிவுச் சூத்திரம்
- முக்கோணம் மற்றும் நாற்கரத்தின் பரப்பு
- நேர்க்கோடுகள்

பியரி டி பெர்மாட்
(Pierre De Fermat)
(1601-1665)
பிரான்ஸ்

17 ஆம் நூற்றாண்டின் முற்பகுதியில் வாழ்ந்த இரு முக்கிய கணிதவியல் அறிஞர்கள் ரெனி டெஸ்கார்டிஸ் மற்றும் பெர்மாட் ஆவர். பகுமுறை வடிவியலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளையும், வளைவு கோடுகளின் மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய ஆயத்தொலைவு-களையும் பெர்மாட் கண்டறிந்தார்.

இவர் ஆயத்தொலை வடிவியலில் குறிப்பிடத்தக்கப் பங்காற்றினார். டெஸ்கார்டிஸின் புகழ் பெற்ற "லா ஜியோமிதி" எனும் நூல் வெளியிடுவதற்கு முன்பே, 1636-ல் கைப்பிரதி வடிவில் பகுமுறை வடிவியலில் பியரி டி பெர்மாட்டின் முக்கிய ஆய்வுகள் வெளியிடப்பட்டன.

5.1 அறிமுகம்

ஆயத்தொலை வடிவியல் (Coordinate Geometry) அல்லது பகுமுறை வடிவியல் (Analytical Geometry) என்பது அச்சுத் தொலை முறை, இயற்கணிதம் மற்றும் பகுவியல் ஆகியனவற்றைப் பயன்படுத்தி வடிவியலைக் கற்பதாகும். இது இயற்கணித முடிவுகளை வடிவியல் வாயிலாகக் கற்கத் துணைபுரிகிறது.

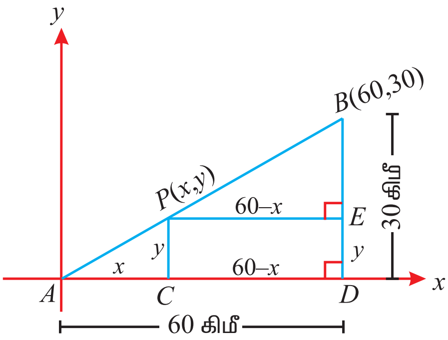
ஆயத்தொலை வடிவியலானது இயற்கணிதத்தையும் வடிவியலையும் இணைக்கும் பாலமாக அமைந்துள்ளது. இயற் கணிதத்தைப் பயன்படுத்தி வடிவியலைக் கற்கும் முறையினை பிரஞ்சுதத்துவ மேதையும் கணிதவியல் அறிஞருமான ரெனி டெஸ்கார்டிஸ் (Rene Descartes) அறிமுகப்படுத்தினார். டெஸ்கார்டிஸ் ஆயத்தொலைகளை அறிமுகப்படுத்தியதின் மூலம் அவர் கணிதத்திற்கு அளப்பரிய பங்காற்றியுள்ளார். இது வடிவியலை கற்பதில் புரட்சியை ஏற்படுத்தியது. இவர் 1637 - இல் "லா ஜியோமிதி" (La Gemetry) என்ற நூலை வெளியிட்டார். இந்நூலில் வடிவியல் கணக்குகளை இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளாக மாற்றி, எளிதாக்கிய பின்னர் வடிவியல் முறையில் அவற்றின் தீர்வுகளைக் கண்டார். அதே காலக்கட்டத்தில் பிரஞ்சு கணித மேதை பியரி டி பெர்மாட் (Pierre De Fermat) என்பாரும் ஆயத்தொலை வடிவியலை உருவாக்கி அதை வெளியிட்டு கணிதத்திற்குப் பெரும் பங்காற்றினார். 1692 இல் லெபினிட்ஸ் (Gottfried Wilhelm Von Leibnitz) என்ற ஜெர்மானிய கணித மேதை, கிடையச்சுத் தூரம் (abscissa) மற்றும் குத்தச்சுத் தூரம் (ordinate) ஆகிய நவீனச் சொற்களை ஆயத்தொலை வடிவியலில் அறிமுகப்படுத்தினார். நிக்கோலஸ் முர்ரே பட்லரின் (Nicholas Murray Butler) கூற்றுப்படி, "டெஸ்கார்ட்டின் பகுமுறை வடிவகணிதம், நியூட்டன் மற்றும் லெபனிட்ஸ் ஆகியோரின் நுண்கணிதம் ஆகியன வியத்தகு கணித முறைகளாக விரிவடைந்தன".

ஒன்பதாம் வகுப்பில், ஆயத்தொலை வடிவியலின் அடிப்படைக் கருத்துகளான அச்சுகள், தளம், தளத்தில் புள்ளிகளைக் குறித்தல், இருபுள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவினைக் காணல் போன்றவற்றை நாம் கற்றுள்ளோம். இந்த அத்தியாயத்தில் பிரிவுச் சூத்திரம், முக்கோணம் மற்றும் நாற்கரத்தின் பரப்பு, நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் சமன்பாடு ஆகியவற்றைக் கற்போம்.

5.2 பிரிவுச் சூத்திரம் (Section Formula)

பின்வரும் கணக்கினை ஆராய்வோம். A மற்றும் B என்பன இரு நகரங்களைக் குறிக்கட்டும். A-யிலிருந்து 60 கி.மீ கிழக்கேயும் பின்னர் 30 கிமீ வடக்கேயும் சென்றால் B-ஐ அடையலாம். ஒரு தொலைபேசிக் குழுமம் P என்ற இடத்தில் ஓர் அலைபரப்பு கோபுரத்தை நிறுவுவதாகக் கொள்வோம். P என்ற இடம் A, B ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டை $1:2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது என்க. அந்த அலைபரப்பு கோபுரம் அமைய உள்ள P என்ற இடத்தை எவ்வாறு அறிவது என்பதைக் காண்போம்.

A-ஐ ஆதியாகக் கொள்வோம். $P(x,y)$ மற்றும் B என்ற புள்ளிகளிலிருந்து x-அச்சுக்குச் செங்குத்துக் கோடுகளை வரைக. அவை x-அச்சை சந்திக்கும் புள்ளிகள் முறையே C, D என்க. மேலும் P-யிலிருந்து, BD ஐ E-ல் வெட்டுமாறு ஒரு செங்குத்துக் கோடு வரைக.



படம். 5.1

தற்போது $AP:PB = 1:2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது ΔPAC மற்றும் ΔBPE என்பன வடிவொத்த முக்கோணங்கள். (அத்தியாயம் 6, பிரிவு 6.3ஐக் காண்க)

ஆதலால், $$\frac{AC}{PE} = \frac{PC}{BE} = \frac{AP}{PB} = \frac{1}{2}$$

அதாவது,

$\frac{AC}{PE} = \frac{1}{2}$	$\frac{PC}{BE} = \frac{1}{2}$
$\Longrightarrow \frac{x}{60-x} = \frac{1}{2}$	$\Longrightarrow \frac{y}{30-y} = \frac{1}{2}$
$2x = 60 - x$	$2y = 30 - y$
$x = 20.$	$y = 10.$

ஆகவே, அந்த அலைபரப்பு கோபுரம் $P(20,10)$ எனும் இடத்தில் அமைந்துள்ளது.

மேற்கண்ட கணக்கை மாதிரியாகக் கொண்டு பிரிவுச் சூத்திரத்தை வருவிப்போம்.

$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்பன வெவ்வேறான இரு புள்ளிகள் என்க. புள்ளி $P(x, y)$ ஆனது, AB- ஐ உட்புறமாக $l:m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதாகக் கொள்வோம். அதாவது, $\frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$ என்க. படம் 5.2-லிருந்து, நாம் பின்வருவனவற்றைப் பெறலாம்.

$$AF = CD = OD - OC = x - x_1$$

$$PG = DE = OE - OD = x_2 - x$$

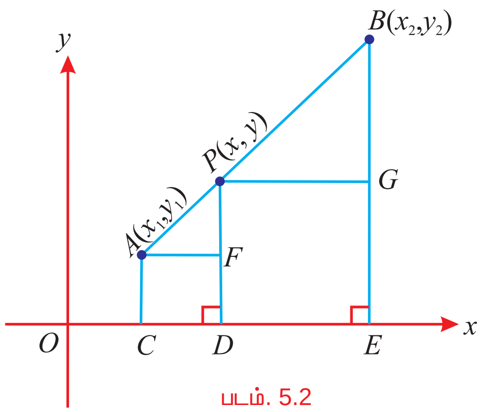
மேலும், $PF = PD - FD = y - y_1$

$$BG = BE - GE = y_2 - y$$

ΔAFP மற்றும் ΔPGB ஆகியன வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகும்.

(அத்தியாயம் 6, பிரிவு 6.3ஐக் காண்க)

எனவே, $$\frac{AF}{PG} = \frac{PF}{BG} = \frac{AP}{PB} = \frac{l}{m}$$



படம். 5.2

ஆகவே, $\frac{AF}{PG} = \frac{l}{m}$ மற்றும் | $\frac{PF}{BG} = \frac{l}{m}$

$\Longrightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{l}{m}$ | $\Longrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$

$\Longrightarrow mx - mx_1 = lx_2 - lx$ | $\Longrightarrow my - my_1 = ly_2 - ly$

$lx + mx = lx_2 + mx_1$ | $ly + my = ly_2 + my_1$

$\Longrightarrow x = \frac{lx_2 + mx_1}{l + m}$ | $\Longrightarrow y = \frac{ly_2 + my_1}{l + m}$

> $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்ற இருபுள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை உட்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி
>
> $$P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right) \text{ ஆகும்.}$$
>
> இந்த சூத்திரத்தை பிரிவுச் சூத்திரம் (Section formula) என்பர்.

தரப்பட்ட மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்தால் மட்டுமே பிரிவுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டும் என்பது தெளிவாகிறது.

முடிவுகள்

(i) $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளையும் இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டை P என்ற புள்ளி வெளிப்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், அப்புள்ளி $P\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$ ஆகும். இங்கு $\frac{l}{m}$ குறை எண்ணாக (negative sign) இருக்கும்.

(ii) AB-ன் நடுப்புள்ளி (Midpoint of AB)

M என்பது AB-ன் நடுப்புள்ளி எனில், M ஆனது AB-ஐ உட்புறமாக 1:1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

எனவே, $l = 1$, $m = 1$ என்பதை பிரிவுச் சூத்திரத்தில் பிரதியிட, AB-ன் நடுப்புள்ளி

$$M\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right) \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

> $A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ஆகும்.

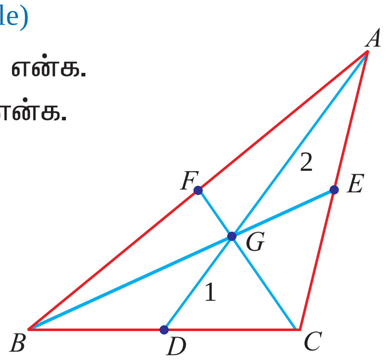
(iii) முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் (Centroid of a triangle)

ΔABC-ன் முனைப் புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்க. AD, BE, CF என்பன ΔABC-ன் நடுக்கோடுகள் (medians) என்க.

முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் என்பது நடுக்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும்.

$G(x, y)$ என்பது ΔABC இன் நடுக்கோட்டு மையம் என்க.

BC–ன் நடுப்புள்ளி $D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ ஆகும்.



படம். 5.3

www.tntextbooks.in

முக்கோணத்தின் பண்புப்படி, நடுக்கோட்டு மையம் G ஆனது நடுக்கோடு AD-ஐ உட்புறமாக $2:1$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

∴ பிரிவுச் சூத்திரப்படி, நடுக்கோட்டு மையம்

$$G(x\,,y)\;=G\left(\frac{2\frac{(x_2+x_3)}{2}+1(x_1)}{2+1},\;\frac{2\frac{(y_2+y_3)}{2}+1(y_1)}{2+1}\right)$$

$$=G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

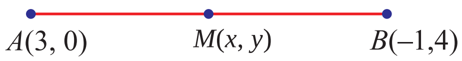
ஆகவே, $(x_1\,,y_1)\,,(x_2\,,y_2)$ மற்றும் $(x_3\,,y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

எடுத்துக்காட்டு 5.1

$(3,0),(-1,4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

$$M(x\,,y)=M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



படம். 5.4

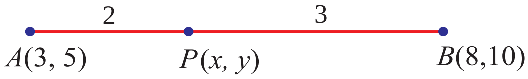
∴ $(3,0),(-1,4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி

$$M(x\,,y\,)=\;M\left(\frac{3-1}{2},\frac{0+4}{2}\right)=M(1,2).$$

எடுத்துக்காட்டு 5.2

$(3\,,5),(8\,,10)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை உட்புறமாக $2:3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

தீர்வு $A(3\,,5)$, $B(8\,,10)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை உட்புறமாக $2:3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P(x,y)$ என்க.



படம். 5.5

பிரிவுச் சூத்திரப் படி, $P(x\,,y)=P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m},\frac{ly_2+my_1}{l+m}\right)$

இங்கு, $x_1=3,y_1=5,x_2=8\,,y_2=10$ மற்றும் $l=2,m=3$

ஆகவே, $$P(x\,,y)=P\left(\frac{2(8)+3(3)}{2+3},\;\frac{2(10)+3(5)}{2+3}\right)=P(5,\,7)$$

எடுத்துக்காட்டு 5.3

$A(-3,\,5)$ மற்றும் $B(4,\,-9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை $P(-2\,,3)$ என்ற புள்ளி உட்புறமாக எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கும்?

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் : $A(-3\,,5)$, $B(4\,,-9)$.

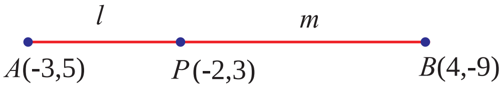
$P\,(-2\,,3)$ என்ற புள்ளி AB-ஐ $l:m$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது என்க.

பிரிவுச் சூத்திரப்படி, $P\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m}, \frac{ly_2+my_1}{l+m}\right) = P(-2, 3)$ (1)

இங்கு, $x_1 = -3, y_1 = 5, x_2 = 4, y_2 = -9$.

$$(1) \Longrightarrow \left(\frac{l(4)+m(-3)}{l+m}, \frac{l(-9)+m(5)}{l+m}\right) = (-2, 3)$$

x-அச்சுத் தொலைவுகளை இருபுறமும் சமப்படுத்த



படம். 5.6

$$\frac{4l-3m}{l+m} = -2 \quad \Longrightarrow \quad 6l = m$$

$$\frac{l}{m} = \frac{1}{6}$$

அதாவது, $l : m = 1 : 6$

எனவே, P என்ற புள்ளி AB -ஐ உட்புறமாக $1 : 6$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது.

குறிப்பு

(i) மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில், y-அச்சுத் தொலைவுகளைச் சமப்படுத்தியும் விகிதத்தைக் காணலாம்.

(ii) தொடர்புடைய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் இருந்தால் மட்டுமே, x-அச்சுத் தொலைவுகளைச் சமன் செய்து பெறும் விகிதமும், y-அச்சுத் தொலைவுகளைச் சமன் செய்து பெறும் விகிதமும் ஒரே விகிதமாக இருக்கும்.

(iii) கோட்டுத் துண்டை ஒரு புள்ளி உட்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், $\frac{l}{m}$ என்பது மிகை எண்ணாக இருக்கும்.

(iv) கோட்டுத் துண்டை ஒரு புள்ளி வெளிப்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், $\frac{l}{m}$ என்பது ஒரு குறை எண்ணாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.4

$(4, -1)$, $(-2, -3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை மூன்று சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.

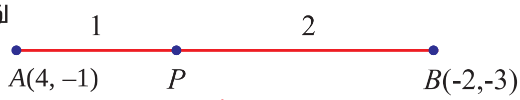
தீர்வு A(4,–1), B(–2,–3) என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் என்க.

$P(x,y)$, $Q(a,b)$ என்பன AB-ஐ முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகள் என்க. எனவே $AP = PQ = QB$

அதாவது, P என்ற புள்ளி AB-ஐ $1 : 2$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது.

படம். 5.7

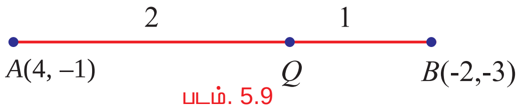
Q என்ற புள்ளி AB-ஐ $2 : 1$ விகிதத்தில் பிரிக்கிறது



படம். 5.8

$\therefore$ பிரிவுச் சூத்திரத்தின்படி,

$$P\left(\frac{1(-2)+2(4)}{1+2}, \frac{1(-3)+2(-1)}{1+2}\right) \text{ மற்றும்}$$



படம். 5.9

$$Q\left(\frac{2(-2)+1(4)}{2+1}, \frac{2(-3)+1(-1)}{2+1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad P(x,y) = P\left(\frac{-2+8}{3}, \frac{-3-2}{3}\right) \text{ மற்றும் } Q(a,b) = Q\left(\frac{-4+4}{3}, \frac{-6-1}{3}\right)$$

$$= P\left(2, -\frac{5}{3}\right) \qquad \text{மற்றும்} \qquad = Q\left(0, -\frac{7}{3}\right).$$

இங்கு, Q என்பது PB-ன் மையப்புள்ளி மற்றும் P என்பது AQ-ன் மையப்புள்ளி என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.5

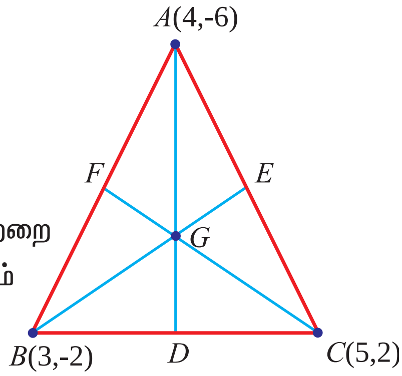
$A(4,-6)$, $B(3,-2)$ மற்றும் $C(5, 2)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் காண்க.

தீர்வு (x_1,y_1), (x_2,y_2) மற்றும் (x_3,y_3) ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் $G(x, y)$ என்க.

எனவே, $G(x\,,y) = G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

இங்கு, $(x_1\,,y_1) = (4,-6)$,

$(x_2,y_2) = (3,-2)$, $(x_3,y_3) = (5\,,2)$



படம். 5.10

எனவே, $(4,-6),(3\,,-2)$ மற்றும் $(5,\ 2)$ ஆகியவற்றை உச்சிகளாக உடைய முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம்

$$\therefore \quad G(x\,,y) = G\left(\frac{4+3+5}{3}, \frac{-6-2+2}{3}\right)$$

$$= G(4,-2).$$

எடுத்துக்காட்டு 5.6

$(7,3),(6,1)$, $(8,2)$ மற்றும் $(p,4)$ என்பன ஓர் இணைகரத்தின் வரிசைப்படி அமைந்த உச்சிகள் எனில், p-ன் மதிப்பைக் காண்க.

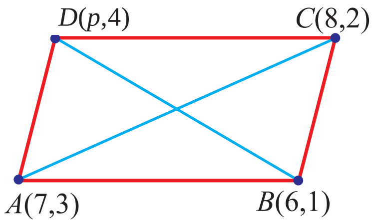
தீர்வு இணைகரத்தின் உச்சிகள் $A(7,3)$,$B(6,1)$,$C(8,2)$ மற்றும் $D(p,4)$ என்க.

ஓர் இணைகரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமக் கூறிடும் என்பதை நாம் அறிவோம்.

எனவே, மூலை விட்டங்கள் AC மற்றும் BD ஆகியனவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் ஒன்றின் மீது ஒன்று பொருந்துகின்றன. அதாவது AC மற்றும் BD-களின் நடுப்புள்ளிகள் சமமாக இருக்கும்.

எனவே, $$\left(\frac{7+8}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{6+p}{2}, \frac{1+4}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{6+p}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right)$$



படம். 5.11

x-அச்சு தொலைவுகளை இருபுறமும் சமப்படுத்த,

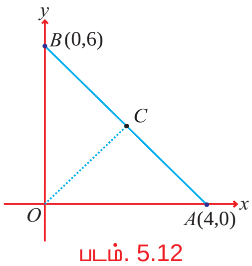
$$\frac{6+p}{2} = \frac{15}{2}$$

எனவே, $p = 9$

எடுத்துக்காட்டு 5.7

$A(4\,,0)$, $B(0\,,6)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி C மற்றும் O என்பது ஆதி எனில், C ஆனது $\triangle OAB$-ன் உச்சிகளிலிருந்து சம தொலைவில் அமையும் எனக் காட்டுக.

www.tntextbooks.in



படம். 5.12

தீர்வு AB-ன் நடுப்புள்ளி $C\left(\frac{4+0}{2},\frac{0+6}{2}\right) = C(2,3)$

$P(x_1,y_1)$ மற்றும் $Q(x_2,y_2)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

எனவே, $O(0,0)$ மற்றும் $C(2,3)$ ஆகிய இரு புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு,

$$OC = \sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{13}$$

மேலும், $A(4,0)$, $C(2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு

$$AC = \sqrt{(2-4)^2+(3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$B(0,6)$, $C(2,3)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு

$$BC = \sqrt{(2-0)^2+(3-6)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

எனவே, $OC = AC = BC$

ஆகவே, C என்ற புள்ளி $\triangle OAB$ -ன் எல்லா உச்சிகளிலிருந்தும் சம தொலைவில் உள்ளது.

குறிப்பு

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் மையப்புள்ளி, அம்முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையமாக (circumcentre) அமையும்.

பயிற்சி 5.1

1. பின்வரும் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டுகளின் நடுப்புள்ளிகளைக் காண்க.

   (i) $(1,-1), (-5,3)$ (ii) $(0,0), (0,4)$

2. பின்வரும் புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணங்களின் நடுக்கோட்டு மையங்களைக் காண்க.

   (i) $(1,3),(2,7)$ மற்றும் $(12,-16)$ (ii) $(3,-5),(-7,4)$ மற்றும் $(10,-2)$

3. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(-6, 4)$. அவ்வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் ஒரு முனை, ஆதிப்புள்ளி எனில், மற்றொரு முனையைக் காண்க.

4. புள்ளி $(1, 3)$-ஐ நடுக்கோட்டு மையமாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் $(-7, 6)$ மற்றும் $(8, 5)$ எனில், முக்கோணத்தின் மூன்றாவது முனையைக் காண்க.

5. பிரிவுச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $A(1,0)$, $B(5,3)$, $C(2,7)$ மற்றும் $D(-2,4)$ என்ற வரிசையில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகளாகும் என நிறுவுக.

6. $(3, 4)$ மற்றும் $(-6, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை வெளிப்புறமாக $3 : 2$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க.

7. $(-3, 5)$ மற்றும் $(4, -9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை உட்புறமாக $1 : 6$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் அச்சுத் தொலைவுகளைக் காண்க.

8. $A(-6,-5)$, $B(-6, 4)$ என்பன இரு புள்ளிகள் என்க. கோட்டுத்துண்டு AB-யின் மேல் $AP = \frac{2}{9}AB$ என்றவாறு அமைந்துள்ள புள்ளி P-யைக் காண்க.

9. $A(2, -2)$ மற்றும் $B(-7, 4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை மூன்று சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.

10. $A(-4, 0)$ மற்றும் $B(0, 6)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டை நான்கு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.

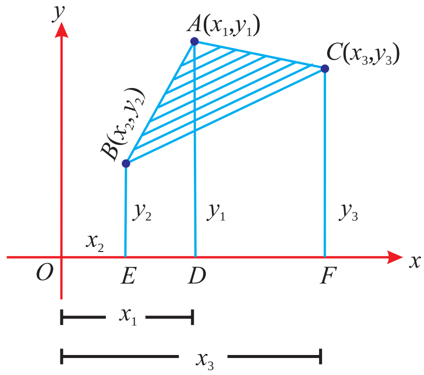
11. $(6, 4)$ மற்றும் $(1, -7)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை x-அச்சு பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.

12. $(-5, 1)$ மற்றும் $(2, 3)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டினை y-அச்சு பிரிக்கும் விகிதத்தையும் மற்றும் பிரிக்கும் புள்ளியையும் காண்க.

13. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் $(1, -1)$, $(0, 4)$ மற்றும் $(-5, 3)$ எனில், அம்முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் (medians) நீளங்களைக் கணக்கிடவும்.

5.3 முக்கோணத்தின் பரப்பு (Area of a Triangle)

ஒரு முக்கோணத்தின் சில அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் அதன் பரப்பைக் காணும் முறையை முன் வகுப்புகளில் கற்றுள்ளோம். இப்பொழுது ஒரு முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் அதாவது உச்சிப் புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் அதன் பரப்பைக் காண்போம்.



படம். 5.13

ΔABC-ன் உச்சிப் புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ என்க.

AD, BE மற்றும் CF ஆகியவற்றை x-அச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையவும்.

படம் 5.13-யிலிருந்து,

$ED = x_1 - x_2$, $DF = x_3 - x_1$, $EF = x_3 - x_2$.

முக்கோணம் ABC-ன் பரப்பளவு

= சரிவகம் $ABED$-ன் பரப்பு + சரிவகம் $ADFC$-ன் பரப்பு – சரிவகம் $BEFC$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}(BE + AD)ED + \frac{1}{2}(AD + CF)DF - \frac{1}{2}(BE + CF)EF$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_2 + x_1y_1 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_2 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_2y_3\}$$

எனவே, ΔABC-ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ச.அலகுகள்

ஆகவே, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ மற்றும் $C(x_3, y_3)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட ΔABC-ன் பரப்பு $\frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$ ச.அலகுகள்.

www.tntextbooks.in

குறிப்பு

முக்கோணத்தின் உச்சிகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதியும் பரப்பினைக் கணக்கிடலாம்.

$$\frac{1}{2}\{x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2\} \text{ ச.அலகுகள்.}$$

அல்லது $$\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\} \text{ ச.அலகுகள்.}$$

பின்வரும் பட விளக்கத்தின் மூலம் மேற்கண்ட சூத்திரத்தை மிக எளிதில் பெறலாம்.

ΔABC-ன் முனைகள் $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்க. உச்சிப் புள்ளிகளை கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையின்படி வரிசைப்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். அவைகளை பின்வருமாறு எழுதவும்.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{Bmatrix}$$

மேலிருந்து கீழாக உள்ள மூலை விட்ட பெருக்கற் பலன்களைக் (dark arrows) கூட்டவும். கீழிருந்து மேலாக உள்ள மூலை விட்ட பெருக்கற் பலன்களைக் (dotted arrows) கூட்டவும். முதலில் பெறப்பட்ட கூட்டற் பலனிலிருந்து இரண்டாம் கூட்டற் பலனைக் கழிக்கவும்.

இவ்வாறு, $\frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ என்பதை பெறலாம்.

குறிப்பு

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பினைக் காண பின்வரும் படிகளைப் பின்பற்றலாம்.

(i) ஒரு உதவிப் படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

(ii) கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் (counter clockwise) அமையும்படி முனைப் புள்ளிகளை வரிசைப் படுத்திக் கொள்க. இல்லையெனில், இச்சூத்திரம் குறை எண்ணை பரப்பாகத் தரும்.

(iii) ΔABC-ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2 + x_2\ y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right\}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காணவும்.

5.4 ஒரே நேர்க்கோட்டிலமையும் மூன்று புள்ளிகள் (Collinearity of three points)

ஒரு தளத்தில் மூன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்தால், அவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் (Collinear points) ஆகும். $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ ஆகிய புள்ளிகளில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி மற்ற இரு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின்மீது அமைந்தால், அவை ஒரு கோடமைப் புள்ளிகளாகும் (Collinear points).

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ மற்றும் $C(x_3,y_3)$ என்பன ஒரு கோடமைப் புள்ளிகள் என்க. இப்புள்ளிகள் ஒரே கோட்டில் அமைவதால் ஒரு முக்கோணத்தை அமைக்காது. எனவே, $\triangle ABC$-ன் பரப்பு பூச்சியமாகும்.

அதாவது, $$\frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\} = 0$$

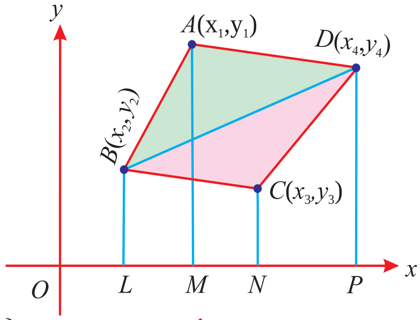
$$\Longrightarrow \quad x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$$

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். இதற்கான நிரூபணத்தை எளிதில் காணலாம்.

எனவே, $\triangle ABC$-ன் பரப்பு பூச்சியம் எனில், எனில் மட்டுமே A, B, C என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவனவாகும்.

www.tntextbooks.in

5.5 நாற்கரத்தின் பரப்பு (Area of a quadrilateral)



படம். 5.14

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ மற்றும் $D(x_4,y_4)$ என்பன நாற்கரம் $ABCD$-ன் முனைப் புள்ளிகள் என்க.

நாற்கரம் $ABCD$-ன் பரப்பு

$= \Delta ABD$-ன் பரப்பு $+ \Delta BCD$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_4y_2+x_1y_4)\}$$

$$+\frac{1}{2}\{(x_2y_3+x_3y_4+x_4y_2)-(x_3y_2+x_4y_3+x_2y_4)\}$$

நாற்கரம் $ABCD$-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4)\}$$

(அல்லது) $\frac{1}{2}\{(x_1-x_3)(y_2-y_4)-(x_2-x_4)(y_1-y_3)\}$ ச. அலகுகள்

மேற்கண்ட சூத்திரத்தைப் பின்வரும் படவிளக்கம் மூலம் எளிதில் நினைவிற் கொள்ளலாம்.

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ மற்றும் $D(x_4,y_4)$ என்ற புள்ளிகளை கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் அமையுமாறு எடுத்துக்கொண்டு அவற்றை பின்வருமாறு எழுதுக.

$$\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{Bmatrix}.$$

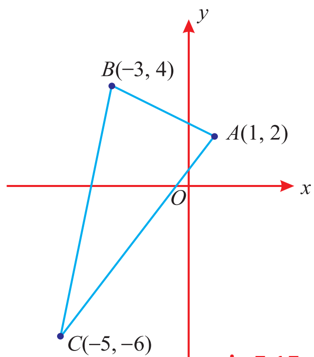
(முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண பயன்படுத்திய அதே முறையைப் பயன்படுத்தவும்)

எனவே, நாற்கரத்தின் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_4y_3+x_1y_4)\}$ ச. அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 5.8

$(1, 2)$, $(-3, 4)$ மற்றும் $(-5, -6)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம். 5.15

தீர்வு உதவிப் படத்தில் இப்புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இவற்றைக் கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் அமையும்படி வரிசையாக எடுத்துக் கொள்ளவும்.

முக்கோணத்தின் முனைகள் A(1, 2), B(−3, 4), C(−5, −6) என்க.

$\triangle ABC$-ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\left\{(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(x_2y_1+x_3y_2+x_1y_3)\right\}$

$= \frac{1}{2}\{(4+18-10)-(-6-20-6)\}$ இங்கு : $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \end{Bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{12+32\} = 22$ ச. அலகுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5.9

$A(6\ ,7)$, $B(-4\ ,\ 1)$ மற்றும் $C(a\ ,-9)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட ΔABC-ன் பரப்பு 68 ச. அலகுகள் எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு $\triangle$ABC-ன் பரப்பு

$$\frac{1}{2}\{(6+36+7a)-(-28+a-54)\}=68$$

இங்கு : $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 6 & -4 & a & 6 \\ 7 & 1 & -9 & 7 \end{Bmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad (42+7a)-(a-82)=136$$

$$\Longrightarrow \quad 6a = 12 \qquad \therefore \quad a = 2$$

எடுத்துக்காட்டு 5.10

$A(2\ ,\ 3)$, $B(4\ ,\ 0)$ மற்றும் $C(6,\ -3)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன என நிரூபி.

தீர்வு ΔABC-ன் பரப்பு

$$= \frac{1}{2}\{(0-12+18)-(12+0-6)\}$$

இங்கு: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 3 \end{Bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\{6-6\} = 0.$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 5.11

$(a\ ,0)$, $(0, b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் மேல் அமைந்துள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x\ ,\ y)$ எனில், $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என நிறுவுக. இங்கு a மற்றும் $b \neq 0$.

தீர்வு $(x\ ,\ y)$, $(a\ ,0)$, $(0, b)$ என்பன ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளாகும்.

ஆகவே, இப்புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியமாகும்.

$$\Longrightarrow \qquad ab - bx - ay = 0$$

இங்கு: $\frac{1}{2}\begin{Bmatrix} a & 0 & x & a \\ 0 & b & y & 0 \end{Bmatrix}$

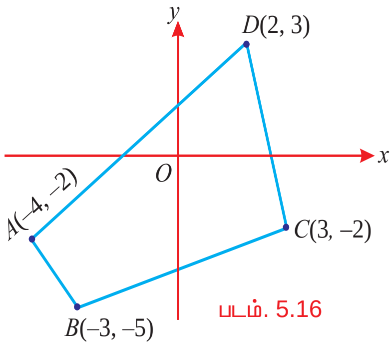
$$\Longrightarrow \qquad bx + ay = ab$$

இங்கு a மற்றும் $b \neq 0$. எனவே, இருபுறமும் ab ஆல் வகுக்க,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.12

$(-4,\ -2)$, $(-3,\ -5)$, $(3,\ -2)$ மற்றும் $(2,\ 3)$ ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.



படம். 5.16

தீர்வு உதவிப் படத்தில் இப்புள்ளிகளைக் குறிப்போம். பிறகு கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் அமையும் வகையில் A(–4, –2), B(–3, –5), C(3, –2) மற்றும் D(2, 3) ஆகியவற்றை முனைகளாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

www.tntextbooks.in

நாற்கரம் $ABCD$-ன் பரப்பு

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$

$= \frac{1}{2}\{(20 + 6 + 9 - 4) - (6 - 15 - 4 - 12)\}$; $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & -5 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{31 + 25\} = 28$ ச.அலகுகள்.

பயிற்சி 5.2

1. கீழ்க் கண்ட புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணங்களின் பரப்புகளைக் காண்க.

   (i) (0, 0), (3, 0) மற்று ம் (0, 2) (ii) (5, 2), (3, −5) மற்றும் (−5, −1)

   (iii) (−4, −5), (4, 5) மற்றும் (−1, −6)

2. வரிசையில் அமைந்த முக்கோணத்தின் முனைகளும் அவை அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவுகளும் கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஒவ்வொன்றிலும் a-ன் மதிப்பைக் காண்க.

	உச்சிகள்	பரப்பு (சதுர அலகுகள்)
(i)	$(0, 0)$, $(4, a)$ மற்றும் $(6, 4)$	17
(ii)	(a, a), $(4, 5)$ மற்றும் $(6, -1)$	9
(iii)	$(a, -3)$, $(3, a)$ மற்றும் $(-1, 5)$	12

3. பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகளா என ஆராய்க.

   (i) (4, 3), (1, 2) மற்றும் (−2, 1) (ii) (−2, −2), (−6, −2) மற்றும் (−2, 2)

   (iii) $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, (6, −2) மற்றும் (−3, 4)

4. கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவன எனில், ஒவ்வொன்றிலும் k-ன் மதிப்பைக் காண்க.

   (i) $(k, -1)$, $(2, 1)$ மற்றும் $(4, 5)$ (ii) $(2, -5)$, $(3, -4)$ மற்றும் $(9, k)$

   (iii) (k, k), $(2, 3)$ மற்றும் $(4, -1)$

5. பின்வருவனவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரங்களின் பரப்பளவுகளைக் காண்க.

   (i) $(6, 9)$, $(7, 4)$, $(4, 2)$ மற்றும் $(3, 7)$

   (ii) $(-3, 4)$, $(-5, -6)$, $(4, -1)$ மற்றும் $(1, 2)$

   (iii) $(-4, 5)$, $(0, 7)$, $(5, -5)$ மற்றும் $(-4, -2)$

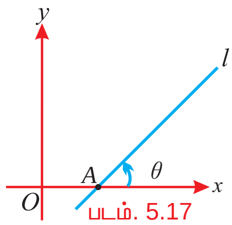
6. $(h, 0)$, (a, b) மற்றும் $(0, k)$ என்பன ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் எனில், முக்கோணத்தின் பரப்பிற்கான சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$ என நிறுவுக. இங்கு h மற்றும் $k \neq 0$.

7. ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் $(0, -1)$, $(2, 1)$ மற்றும் $(0, 3)$ எனில், இதன் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகளை இணைத்து உருவாக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. மேலும், இச்சிறிய முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும், கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தின் பரப்பளவிற்கும் உள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

5.6 நேர்க்கோடுகள் (Straight lines)

5.6.1 சாய்வுக் கோணம் (Angle of Inclination)

மிகை x-அச்சிற்கும் நேர்க்கோடு l-க்கும் இடையே அமைந்த கோணம் நேர்க்கோடு l-ன் சாய்வுக் கோணம் (Angle of Inclination) எனப்படும். (இக்கோணத்தினைக் கடிகார முள்ளோட்ட எதிர்த் திசையில் அளக்க வேண்டும்.)



படம். 5.17

குறிப்புரை

l என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் θ எனில்,

(i) $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

(ii) கிடைநிலை நேர்க்கோடுகளுக்கு $\theta = 0^\circ$ அல்லது $\theta = 180^\circ$ ஆகும். மேலும் நேர்க்குத்துக் கோடுகளுக்கு $\theta = 90^\circ$ ஆகும்.

(iii) தொடக்கத்தில் x-அச்சின் மீது அமைந்துள்ள ஒரு கோடு, x-அச்சில் உள்ள புள்ளி A-யைப் பொருத்து கடிகார எதிர் திசையில் சுழன்று இறுதியில் x-அச்சுடன் பொருந்தினால், இக் கோட்டின் ஆரம்ப சாய்வுக் கோணம் 0° மற்றும் இறுதி சாய்வுக் கோணம் 180° ஆகும்.

(iv) x-அச்சிற்கு செங்குத்தான நேர்க்கோடுகளை நேர்க்குத்துக் கோடுகள் என்போம். அவ்வாறு செங்குத்தாக அமையாத நேர்க்கோடுகளை நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடுகள் என்போம்.

5.6.2 நேர்க்கோட்டின் சாய்வு (Slope of a straight line)

வரையறை

நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடு (Non-vertical line) l-ன் சாய்வுக் கோணம் θ எனில், $\tan\theta$ என்பது அக்கோட்டின் சாய்வு ஆகும். இதை m எனக் குறிப்போம். எனவே, நேர்க்கோட்டின் சாய்வு (Slope of straight line), $m = \tan\theta$, $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, $\theta \ne 90^\circ$, ஆகும்.

குறிப்புரை

(i) x-அச்சு அல்லது x-அச்சிற்கு இணையான நேர்க்கோடுகளின் சாய்வு பூச்சியமாகும்.

(ii) $\tan 90^0$ ஐ வரையறுக்க இயலாது என்பதால் y-அச்சு அல்லது y-அச்சிற்கு இணையான நேர்க்கோடுகளின் சாய்வை வரையறை செய்ய இயலாது. ஆகவே, ஒரு நேர்க்கோட்டின் சாய்வு எனக் கூறினால், அக்கோட்டினை ஒரு நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடு எனக் கருத வேண்டும்.

(iii) θ ஒரு குறுங்கோணமெனில், சாய்வு மிகை எண்ணாக இருக்கும்.
θ ஒரு விரிகோணமெனில், சாய்வு குறை எண்ணாக இருக்கும்.

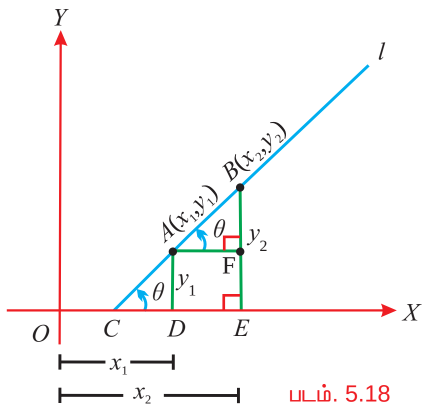
5.6.3 ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டால் அக்கோட்டின் சாய்வு (Slope of a straight line when any two points on the line are given)

$A(x_1, y_1)$ மற்றும் $B(x_2, y_2)$ ஆகிய இரு புள்ளிகள் நேர்க்கோடு l-ன் மீது அமைந்துள்ளன என்க. இக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் θ எனில், $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ மற்றும் $\theta \ne 90^\circ$ ஆகும்.

நேர்க்கோடு AB ஆனது x-அச்சை C-ல் வெட்டட்டும்.

நேர்க்கோடு l-ன் சாய்வு $m = \tan\theta$ (1)

x-அச்சிற்குச் செங்குத்தாக AD மற்றும் BE வரைக. A-யிலிருந்து BE-க்கு AF என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக.



படம். 5.18

படத்திலிருந்து,

$$AF = DE = OE - OD = x_2 - x_1$$

$$BF = BE - EF = BE - AD = y_2 - y_1$$

மேலும் $\angle DCA = \angle FAB = \theta$

செங்கோண ΔABF-ல்

$x_1 \neq x_2$ எனில், $\tan\theta = \dfrac{BF}{AF} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து சாய்வு $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

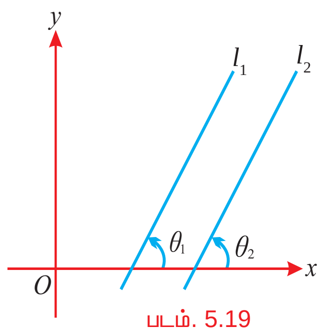
> (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின்
> சாய்வு, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. இங்கு $\theta \neq 90^\circ$ என்பதால் $x_1 \neq x_2$ ஆகும்.

குறிப்பு

(x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வினை பின்வருமாறு கருதலாம்.

சாய்வு $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y\text{-ஆயத்தொலைவுகளின் வித்தியாசம்}}{x\text{-ஆயத்தொலைவுகளின் வித்தியாசம்}}$.

5.6.4 சாய்வுகளில் நேர்க்குத்தற்ற இணை கோடுகளுக்கான நிபந்தனை (Condition for parallel lines in terms of their slopes)



படம். 5.19

l_1 மற்றும் l_2 என்ற இணைகோடுகளின் சாய்வுக் கோணங்கள் θ_1 மற்றும் θ_2 என்க. இவற்றின் சாய்வுகள் m_1 மற்றும் m_2 என்க.

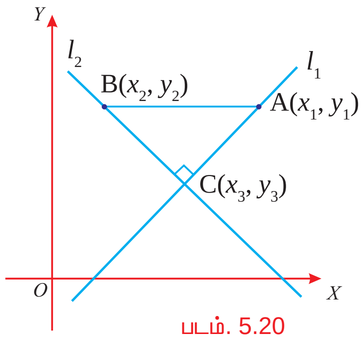
l_1 மற்றும் l_2 என்பன இணை கோடுகள் என்பதால், சாய்வுக் கோணங்கள் θ_1 மற்றும் θ_2 சமமாகின்றன.

எனவே, $\tan\theta_1 = \tan\theta_2 \implies m_1 = m_2$. ஆகவே,

> இரு நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடுகள் இணை எனில், அவற்றின் சாய்வுகள் சமம்.
> இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும். அதாவது, இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் சமமெனில், அக்கோடுகள் இணையாகும் அல்லது அக்கோடுகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் பொருந்தும்.

5.6.5 சாய்வுகளில் நேர்க்குத்தற்ற செங்குத்துக் கோடுகளுக்குரிய நிபந்தனை (Condition for perpendicular lines in terms of their slopes)

l_1 மற்றும் l_2 ஆகிய நேர்க்குத்தற்ற செங்குத்துக் கோடுகள் முறையே $A(x_1,y_1)$ மற்றும் $B(x_2,y_2)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழியே செல்கின்றன என்போம். அவைகள் வெட்டும் புள்ளி $C(x_3,y_3)$ என்க.



படம். 5.20

மேலும், m_1 மற்றும் m_2 என்பன முறையே l_1, l_2 ஆகிய நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் என்க.

நேர்க்கோடு l_1-ன் சாய்வு $m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$

நேர்க்கோடு l_2-ன் சாய்வு $m_2 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$

செங்கோண $\triangle ABC$-ல் $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow (x_2 - x_3 + x_3 - x_1)^2 + (y_2 - y_3 + y_3 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow \left(x_2 - x_3\right)^2 + (x_3 - x_1)^2 + 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1)$$
$$= (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2$$

$$\Longrightarrow 2(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + 2(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (y_2 - y_3)(y_3 - y_1) = -(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\right)\left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right) = -1$$

$$\Longrightarrow \quad m_1 m_2 = -1 \text{ or } m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

ஆகவே, m_1 மற்றும் m_2 ஆகியவற்றைச் சாய்வுகளாகக் கொண்ட நேர்க்குத்தற்ற இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்து எனில், $m_1 m_2 = -1$ ஆகும்.

மறுதலையாக, $m_1 m_2 = -1$ எனில், அவ்விரண்டு நேர்க்கோடுகளும் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை.

குறிப்பு

x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு ஆகியன ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தான நேர்க்கோடுகள் ஆகும். x-அச்சின் சாய்வு பூச்சியம் மற்றும் y-அச்சின் சாய்வு வரையறை செய்யப்படவில்லை என்பதால், $m_1 m_2 = -1$ என்ற நிபந்தனை x, y-அச்சுகளுக்குப் பொருந்தாது.

எடுத்துக்காட்டு 5.13

நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், அக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் காண்க.

தீர்வு θ என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணமெனில், இதன் சாய்வு

$m = \tan\theta$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ மற்றும் $\theta \neq 90^\circ$ ஆகும்.

$$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \theta = 30^\circ$$

எடுத்துக்காட்டு 5.14

நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் 45° எனில், அக்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு சாய்வுக் கோணம் θ எனில், நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$

எனவே, $m = \tan 45^\circ \implies m = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 5.15

(3, –2) மற்றும் (–1, 4) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

தீர்வு (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $(3, -2)$ மற்றும் $(-1, 4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{4+2}{-1-3} = -\frac{3}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 5.16

நேர்க்கோட்டின் சாய்வினைப் பயன்படுத்தி, $A(5, -2)$, $B(4, -1)$ மற்றும் $C(1, 2)$ ஆகியன ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்த புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு (x_1, y_1) மற்றும் (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, $A(5, -2)$ மற்றும் $B(4, -1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m_1 = \frac{-1+2}{4-5} = -1$$

மேலும், $B(4,-1)$ மற்றும் $C(1, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

$$m_2 = \frac{2+1}{1-4} = -1$$

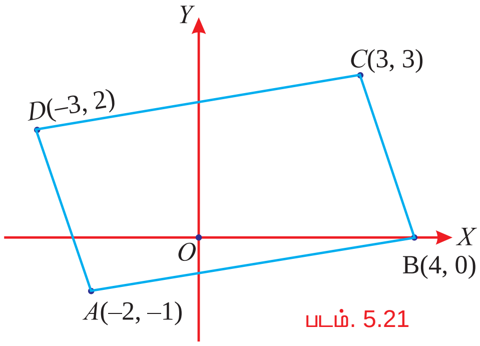
எனவே, AB என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு = BC என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு.

மேலும், B என்பது பொதுப் புள்ளி.

ஆகவே, A, B, C ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 5.17

$(-2, -1)$, $(4, 0)$, $(3, 3)$ மற்றும் $(-3, 2)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரிசையாக எடுத்துக் கொண்டு சாய்வினைப் பயன்படுத்தி அவை ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக.



படம். 5.21

தீர்வு $A(-2, -1)$, $B(4, 0)$, $C(3, 3)$ மற்றும் $D(-3, 2)$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் என்க.

$$AB\text{-ன் சாய்வு} = \frac{0+1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

$$CD\text{-ன் சாய்வு} = \frac{2-3}{-3-3} = \frac{1}{6}$$

எனவே, AB-ன் சாய்வு $=$ CD-ன் சாய்வு

எனவே, பக்கம் AB ஆனது பக்கம் CD-க்கு இணையாகும். (1)

$$BC\text{-ன் சாய்வு} = \frac{3-0}{3-4} = -3$$

$$AD\text{-ன் சாய்வு} = \frac{2+1}{-3+2} = -3$$

எனவே, BC-ன் சாய்வு $=$ AD-ன் சாய்வு

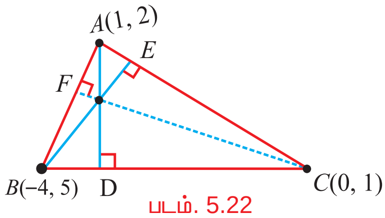
அதாவது, பக்கம் BC ஆனது பக்கம் AD-க்கு இணையாகும். (2)

(1), (2)-களிலிருந்து நாற்கரம் $ABCD$-ன் எதிர்ப் பக்கங்கள் இணையாக உள்ளன.

ஆகவே, $ABCD$ என்பது இணைகரம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.18

$A(1, 2)$, $B(-4, 5)$ மற்றும் $C(0, 1)$ ஆகியன $\triangle ABC$-ன் முனைகள். இம்முக்கோணத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலிருந்தும் அதன் எதிர்ப் பக்கத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோடுகளின் (altitudes) சாய்வுகளைக் காண்க.



படம். 5.22

தீர்வு AD, BE, CF என்பன $\triangle ABC$-ன் குத்துக்கோடுகள் என்க.

$$\text{எனவே, } BC\text{-ன் சாய்வு} = \frac{1-5}{0+4} = -1$$

குத்துக்கோடு AD ஆனது பக்கம் BC க்கு செங்குத்து ஆகும்.

எனவே, AD-ன் சாய்வு $= 1$ $(\because\ m_1 m_2 = -1)$

$$\text{மேலும், } AC\text{-ன் சாய்வு} = \frac{1-2}{0-1} = 1$$

ஆகவே, BE-ன் சாய்வு $= -1$ $(\because\ BE \perp AC)$

$$\text{மேலும், } AB\text{-ன் சாய்வு} = \frac{5-2}{-4-1} = -\frac{3}{5}$$

ஆகவே, CF-ன் சாய்வு $= \frac{5}{3}$ $(\because\ CF \perp AB)$

பயிற்சி 5.3

1. பின்வரும் சாய்வுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுக் கோணங்களைக் காண்க.
   (i) 1 (ii) $\sqrt{3}$ (iii) 0
2. பின்வரும் சாய்வுக் கோணங்களைக் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.
   (i) 30° (ii) 60° (iii) 90°
3. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியே செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வுகளைக் காண்க.
   (i) $(3, -2)$, $(7, 2)$ (ii) $(2, -4)$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி
   (iii) $(1+\sqrt{3}, 2)$, $(3+\sqrt{3}, 4)$
4. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுக் கோணங்களைக் காண்க.
   (i) $(1, 2), (2, 3)$ (ii) $(3, \sqrt{3}), (0, 0)$ (iii) $(a, b), (-a, -b)$
5. ஆதிப் புள்ளி வழியாகவும், $(0, -4)$ மற்றும் $(8, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.
6. சதுரம் $ABCD$-ன் பக்கம் AB ஆனது x-அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
   (i) AB-ன் சாய்வு (ii) BC-ன் சாய்வு (iii) மூலைவிட்டம் AC-ன் சாய்வு
7. சமபக்க முக்கோணம் ABC-ன் பக்கம் BC ஆனது x-அச்சிற்கு இணை எனில், AB மற்றும் BC ஆகியவற்றின் சாய்வுகளைக் காண்க.
8. சாய்வினைப் பயன்படுத்தி, கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.
   (i) $(2, 3), (3, -1)$ மற்றும் $(4, -5)$ (ii) $(4, 1), (-2, -3)$ மற்றும் $(-5, -5)$
   (iii) $(4, 4), (-2, 6)$ மற்றும் $(1, 5)$
9. $(a, 1)$, $(1, 2)$ மற்றும் $(0, b+1)$ என்பன ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் எனில், $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ என நிறுவுக.
10. $A(-2, 3)$, $B(a, 5)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடு மற்றும் $C(0, 5)$, $D(-2, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடு ஆகியன இணை கோடுகள் எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.
11. $A(0,5), B(4,2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடானது, $C(-1,-2), D(5,b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்து எனில், b-ன் மதிப்பைக் காண்க.
12. $\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(1, 8)$, $B(-2, 4)$, $C(8, -5)$. மேலும், M, N என்பன முறையே AB, AC இவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் எனில், MN-ன் சாய்வைக் காண்க. இதைக் கொண்டு MN மற்றும் BC ஆகிய நேர்க்கோடுகள் இணை எனக் காட்டுக.
13. $(6, 7)$, $(2, -9)$ மற்றும் $(-4, 1)$ ஆகியன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் எனில், முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.
14. $A(-5, 7)$, $B(-4, -5)$ மற்றும் $C(4, 5)$ ஆகியன $\triangle ABC$-ன் முனைகள் எனில், முக்கோணத்தின் குத்துயரங்களின் சாய்வுகளைக் காண்க.

15. சாய்வினைப் பயன்படுத்தி (1, 2), (–2 , 2), (–4 , –3) மற்றும் (–1, –3) என்பன அதே வரிசையில் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

16. *ABCD* என்ற நாற்கரத்தின் முனைகள் முறையே *A*(–2 ,–4), *B*(5 , –1), *C*(6 , 4) மற்றும் *D*(–1, 1) எனில், இதன் எதிர்ப் பக்கங்கள் இணை எனக் காட்டுக.

5.6.6 நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a straight line)

L என்பது தளத்தில் உள்ள ஒரு நேர்க்கோடு என்க. x, y எனும் மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு $px+qy+r=0$-ஐக் கருதுக. L-ல் உள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் x ஆயத் தொலைவு மற்றும் y ஆயத் தொலைவு ஆகியவற்றால் சமன்பாடு நிறைவு செய்யப்படும் என்க. இச்சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யும் x, y-ன் மதிப்புகள், L-ன் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைவுகளாக அமையும். எனவே, $px+qy+r=0$ ஆனது ஒரு நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாடு எனப்படுகிறது. இவ்வாறு நேர்க்கோடு L-ஐ இயற்கணித சமன்பாட்டின் வாயிலாக விவரிப்போம். தளத்தில் L என்ற நேர்க்கோடு பின்வரும் வகைகளில் ஒன்றாக அமையும்.

(i) கிடைநிலைக் கோடு (Horizontal line) **(ii) நேர்க்குத்துக் கோடு (Vertical line)**

(iii) கிடைநிலையாகவோ மற்றும் நேர்க்குத்தாகவோ அமையாத கோடு (Neither vertical nor Horizontal)

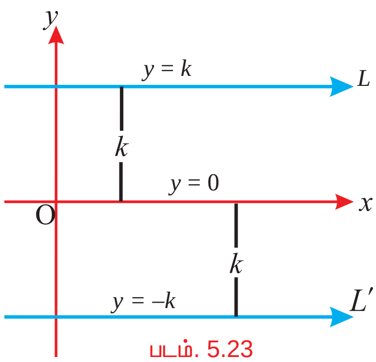
(i) கிடைநிலைக் கோடு (Horizontal line)

L என்பது ஒரு கிடைநிலைக் கோடு என்க.

இப்பொழுது L ஆனது x-அச்சாகவோ அல்லது x-அச்சு அல்லாத ஒரு கிடைநிலைக் கோடாகவோ அமையும்.

வகை (அ) L என்பது x-அச்சைக் குறிக்கும் என்க. தளத்தில் உள்ள (x, y) என்ற புள்ளி L-ன் மேல் இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $y=0$ மற்றும் x ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாகும். எனவே, $y=0$ என்ற சமன்பாடு x-அச்சைக் குறிக்கும். ஆகவே, x-அச்சு என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y=0$ ஆகும்.

வகை (ஆ) x-அச்சு அல்லாத ஏதேனும் ஒரு கிடைநிலைக் கோடு L என்க. எனவே, L ஆனது x-அச்சுக்கு இணையாகும். (x, y) என்ற புள்ளியின் y-அச்சுத் தொலைவு ஒரு மாறிலியாகவும், x என்பது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாகவும் அமைந்தால், அமைந்தால் மட்டுமே நேர்க்கோடு L-ன் மீது அப்புள்ளி அமையும். ஆகவே, x-அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y=k$ (k ஒரு மாறிலி) ஆகும்.



படம். 5.23

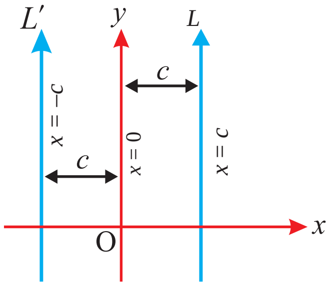
$k>0$ எனில், L ஆனது x-அச்சிற்கு மேற்புறமும், $k<0$ எனில், L ஆனது x-அச்சிற்குக் கீழ்புறமும் அமையும். மேலும், $k=0$ எனில், L என்பது x-அச்சாகும்.

www.tntextbooks.in

(ii) நேர்க்குத்துக் கோடு (Vertical Line)

L என்பது ஒரு நேர்க்குத்துக் கோடு என்க. ஆகவே, L ஆனது y-அச்சு அல்லது y-அச்சு அல்லாத நேர்க்குத்துக் கோடாகும்.

வகை (அ) L என்பது y-அச்சு எனில், தளத்தில் உள்ள (x, y) என்ற புள்ளியானது L-ன் மீது அமைந்தால், அமைந்தால் மட்டுமே $x = 0$ மற்றும் y ஆனது ஏதேனும் ஒரு மெய்யெண்ணாகும். எனவே, சமன்பாடு $x = 0$ என்பது y-அச்சினைக் குறிக்கும். ஆதலால், y-அச்சின் சமன்பாடு $x = 0$ ஆகும்.



படம். 5.24

வகை (ஆ) L என்பது y-அச்சு அல்லாத நேர்க்குத்துக் கோடு எனில், L ஆனது y-அச்சுக்கு இணையாக அமையும்.

(x, y) என்ற புள்ளியின் x-அச்சுத் தொலைவு ஒரு மாறிலியாகவும், y-அச்சுத் தொலைவு ஒரு மெய்யெண்ணாகவும் அமைந்தால், அமைந்தால் மட்டுமே அப்புள்ளி L-ன் மீது அமையும். எனவே, y-அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x = c$ ஆகும். (c ஒரு மாறிலியாகும்). இங்கு,

$c > 0$ எனில், L ஆனது y-அச்சின் வலப்பக்கம் அமையும்.

$c < 0$ எனில், இக்கோடு L ஆனது, y-அச்சின் இடப்பக்கம் அமையும்.

$c = 0$ எனில், L என்பது y-அச்சாகும்.

(iii) கிடைநிலையாகவோ மற்றும் நேர்க்குத்தாகவோ அமையாத நேர்க்கோடு (Neither Horizontal nor Vertical)

L என்பது கிடைநிலையாகவோ மற்றும் நேர்க்குத்தாகவோ இல்லை என்க. இந்நிலையில் நேர்க்கோடு L-ஐ ஒரு சமன்பாட்டால் எவ்வாறு குறிப்பிடலாம்?

θ என்பது அக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் என்க. கோணம் θ-வும், L-ன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியும் தெரிந்தால் L-ன் சமன்பாட்டை காண இயலும்.

நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு m-ன் மதிப்பினை பின்வருமாறு காணலாம்.

(i) சாய்வுக் கோணம் θ கொடுக்கப்பட்டால், $m = \tan\theta$

(ii) L-ன் மீது அமைந்த இரு புள்ளிகள் $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ கொடுக்கப்பட்டால், $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(iii) L என்பது கிடைநிலை நேர்க்கோடு எனில், எனில் மட்டுமே $m = 0$ ஆகும்.

L என்பது நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடு எனில், அதன் சமன்பாட்டை பின்வரும் அமைப்புகளில் காணலாம்:

(அ) சாய்வு–புள்ளி அமைப்பு (Slope-Point form)

(ஆ) இரண்டு புள்ளிகள் அமைப்பு (Two-Points form)

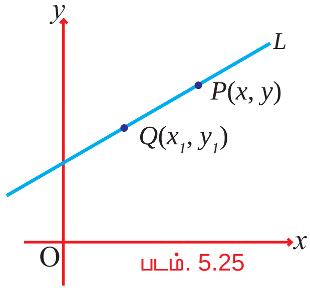
(இ) சாய்வு–வெட்டுத்துண்டு அமைப்பு (Slope-Intercept form)

(ஈ) வெட்டுத்துண்டு அமைப்பு (Intercept form)

(அ) சாய்வு–புள்ளி அமைப்பு (Slope-Point form)

L-ன் சாய்வு m என்க. மற்றும் $Q(x_1, y_1)$ என்பது L-ன் மீது அமைந்த ஒரு புள்ளி என்க.

$P(x, y)$ என்பது L-ன் மீது அமைந்த Q வைத் தவிர ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க.



படம். 5.25

இப்பொழுது $m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow m(x - x_1) = y - y_1$

எனவே, சாய்வு m உடைய மற்றும் (x_1, y_1) என்ற புள்ளி வழியே செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1), \quad \forall \quad (x, y) \in L \qquad (1)$$

குறிப்புரை

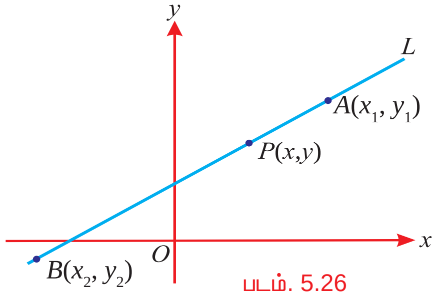
(i) x, y ஆகிய மாறிகளில் அமைந்த ஒருபடிச் சமன்பாடு (1)-ஐ L-ன் மீது அமைந்த ஏதேனும் ஒரு புள்ளியின் x-அச்சுத் தொலைவு மற்றும் y-அச்சுத் தொலைவு ஆகியன நிறைவு செய்கின்றன. மேலும், இச்சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் x, y-களின் மதிப்புகள் நேர்க்கோடு L-ன் மீது அமைந்த ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தொலைவுகளாகும். எனவே, சமன்பாடு (1) ஆனது நேர்க்கோடு L-ன் சமன்பாடு என்றழைக்கப்படுகிறது.

(ii) L-ன் புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவில் ஏற்படும் மாறுதல், x-அச்சுத்தொலைவில் ஏற்படும் மாறுதலுக்கு நேர் விகிதத்தில் அமையும் என்பதை சமன்பாடு (1) காட்டுகிறது. இதன் விகிதசம மாறிலி m என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வாகும்.

(ஆ) இரண்டு புள்ளிகள் அமைப்பு (Two-Points form)

(x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகியன நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோடு L-ன் மீது அமைந்த இரு வெவ்வேறு புள்ளிகள் என்க. எனவே, $x_2 \neq x_1$ ஆகும்.

L-ன் சமன்பாட்டினை அமைக்க, முதலில் L-ன் சாய்வைக் காண்போம். அதன் பிறகு (1) ஐப் பயன்படுத்துவோம்.



படம். 5.26

L-ன் சாய்வு

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ இங்கு } x_2 \neq x_1.$$

சமன்பாடு (1)-லிருந்து, $y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

ஆகவே, நேர்க்கோடு L-ன் சமன்பாடு $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad \forall \quad (x, y) \in L \qquad (2)$

குறிப்பு

L-ன் சமன்பாட்டைப் பெற (x_1, y_1) என்ற புள்ளிக்குப் பதிலாக (x_2, y_2) என்ற புள்ளியையும் பயன்படுத்தலாம்.

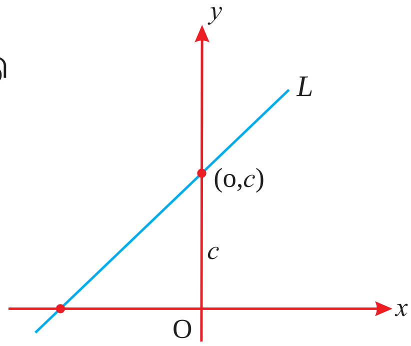
(இ) சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பு (Slope-Intercept form)

L என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு m மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு c என்க.

y-வெட்டுத்துண்டு c என்பதால், $(0, c)$ என்ற புள்ளி L-ன் மீது அமையும்.

சமன்பாடு (1)-ல் $(x_1, y_1) = (0, c)$ என பிரதியிட,

$y - c = m(x - 0)$



படம். 5.27

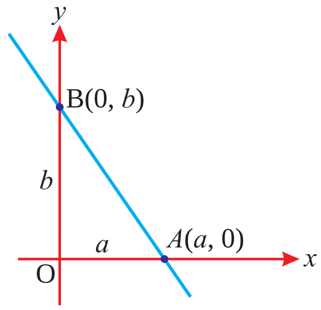
$$\implies y = mx + c, \quad \forall \ (x, y) \in L \qquad (3)$$

ஆகவே, $y = mx + c$ என்பது சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

(ஈ) வெட்டுத்துண்டு அமைப்பு (Intercept form)

நேர்க்கோடு L ஆனது x, y-அச்சுகளில் ஏற்படுத்தும் பூச்சியமல்லாத வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே a, b என்க.

எனவே, இக்கோடு x-அச்சை $A(a, 0)$ என்ற புள்ளியிலும், y-அச்சை $B(0, b)$ என்ற புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது.



படம். 5.28

ஆகவே, AB-ன் சாய்வு $m = -\dfrac{b}{a}$.

(1)-ன் படி, $y - 0 = -\dfrac{b}{a}(x - a)$

$\implies \quad ay = -bx + ab$

$bx + ay = ab$

இருபுறமும் ab ஆல் வகுக்க $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \qquad (a \neq 0, \ b \neq 0)$

எனவே, x-வெட்டுத்துண்டு a மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு b கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \forall \ (x, y) \in L \qquad (4)$$

குறிப்பு

(i) நேர்க்கோடு L-ன் சாய்வு m மற்றும் x-வெட்டுத்துண்டு d எனில், இந்நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = m(x - d)$.

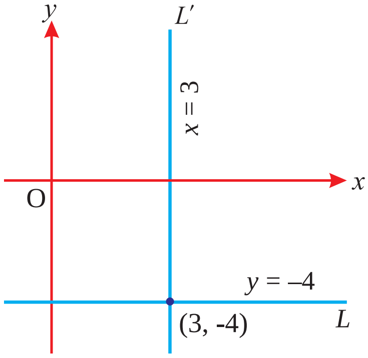
(ii) $y = mx$, $m \neq 0$ என்ற நேர்க்கோடு ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்லும். (இங்கு x மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டுகள் இரண்டும் பூச்சியங்களாகும்)

(iii) (1), (2), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளைச் சுருக்கி, சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பான (3)-ல் உள்ளவாறு தருவிக்கலாம்.

(iv) (1), (2), (3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளை $px + qy + r = 0$ என்ற வடிவில் எழுத இயலும். L-ன் மீதமைந்த (x, y) என்ற அனைத்துப் புள்ளிகளுக்கும் இது பொருந்தும். இச்சமன்பாடு நேர்க்கோட்டின் பொது வடிவச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.19

$(3, -4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் மற்றும் ஆய அச்சுகளுக்கு இணையாக அமைந்த நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.



படம். 5.29

தீர்வு $(3, -4)$ என்ற புள்ளி வழிச் சென்று x-அச்சுக்கு இணையாகவும் மற்றும் y-அச்சுக்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோடுகள் முறையே L மற்றும் L' என்க.

L-ன் எல்லாப் புள்ளிகளின் y-அச்சுத்தொலைவும் -4 ஆகும்.

எனவே, நேர்க்கோடு L-ன் சமன்பாடு $y = -4$

இவ்வாறே, L' மீதுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளின் x-அச்சுத் தொலைவும் 3 ஆகும்.

எனவே, L'-ன் சமன்பாடு $x = 3$

எடுத்துக்காட்டு 5.20

சாய்வுக் கோணம் 45° மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு $\frac{2}{5}$ ஆகியவற்றைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு தேவையான நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$

$$= \tan 45^\circ = 1$$

y-வெட்டுத்துண்டு $c = \frac{2}{5}$

சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = mx + c$$

$$\Longrightarrow \quad y = x + \frac{2}{5}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{5x+2}{5}$$

எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $5x - 5y + 2 = 0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.21

$(-2, 3)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், சாய்வு $\frac{1}{3}$ உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : சாய்வு $m = \frac{1}{3}$, ஒரு புள்ளி $(x_1, y_1) = (-2, 3)$

சாய்வு-புள்ளி அமைப்பில் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Longrightarrow \quad y - 3 = \frac{1}{3}(x + 2)$$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x - 3y + 11 = 0$ ஆகும்.

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 5.22

$(-1,1),\ (2,-4)$ ஆகிய புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் என்க.

இங்கு $x_1 = -1,\ y_1 = 1$ மற்றும் $x_2 = 2,\ y_2 = -4$.

இரண்டு புள்ளிகள்-அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y-1}{-4-1} = \frac{x+1}{2+1}$$

$$\Longrightarrow \quad 3y-3 = -5x-5$$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $5x+3y+2=0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.23

$A(2, 1), B(-2, 3), C(4, 5)$ என்பன $\triangle ABC$-ன் உச்சிகள். உச்சி A-யிலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டின் (median) சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு முக்கோணத்தின் ஓர் முனையையும், அதன் எதிர்ப் பக்கத்தின் நடுப்புள்ளியையும் இணைக்கும் கோடு நடுக்கோடாகும்.

BC-ன் நடுப்புள்ளி D என்க.

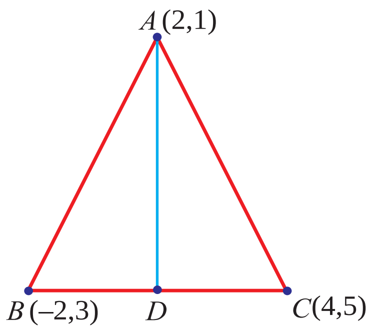
ஆகவே, BC-ன் நடுப்புள்ளி $D\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = D(1, 4)$

நடுக்கோடு AD இன் சமன்பாடு

$$\frac{y-1}{4-1} = \frac{x-2}{1-2} \quad (\because (x_1,y_1) = (2,1),\ (x_2,y_2) = (1,4))$$

$$\frac{y-1}{3} = \frac{x-2}{-1}$$

எனவே, தேவையான நடுக்கோட்டின் சமன்பாடு $3x+y-7=0$.



படம். 5.30

எடுத்துக்காட்டு 5.24

ஒரு நேர்க்கோட்டின் x-வெட்டுத்துண்டு $\frac{2}{3}$ மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு $\frac{3}{4}$ எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : நேர்க்கோட்டின் x-வெட்டுத்துண்டு $a = \frac{2}{3}$

y-வெட்டுத்துண்டு $b = \frac{3}{4}$

வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{\frac{2}{3}}+\frac{y}{\frac{3}{4}} = 1 \Longrightarrow \frac{3x}{2}+\frac{4y}{3} = 1$$

எனவே, தேவையான சமன்பாடு $9x+8y-6=0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.25

(6, -2) எனும் புள்ளி வழிச் செல்வதும் மற்றும் வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 5 கொண்டதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

தீர்வு தேவையான நேர்க்கோடுகளின் x-வெட்டுத்துண்டு a மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு b என்க.

எனவே, $a + b = 5$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\Longrightarrow \quad b = 5 - a$

வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{5-a} = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{(5-a)x + ay}{a(5-a)} = 1$$

$$(5-a)x + ay = a(5-a) \quad (1)$$

இக்கோடு $(6,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$$(1) \Longrightarrow (5-a)6 + a(-2) = a(5-a)$$

$$\Longrightarrow a^2 - 13a + 30 = 0.$$

$$\Longrightarrow (a-3)(a-10) = 0$$

எனவே, $a = 3$ அல்லது $a = 10$

$a = 3$ எனில், $(1) \Longrightarrow (5-3)x + 3y = 3(5-3)$

$$\Longrightarrow 2x + 3y - 6 = 0 \quad (2)$$

$a = 10$ எனில், $(1) \Longrightarrow (5-10)x + 10y = 10(5-10)$

$$\Longrightarrow -5x + 10y = -50$$

$$\Longrightarrow x - 2y - 10 = 0. \quad (3)$$

தேவையான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $2x + 3y = 6$ மற்றும் $x - 2y - 10 = 0$.

பயிற்சி 5.4

1. x-அச்சிலிருந்து 5 அலகுகள் தொலைவில் உள்ளதும் x-அச்சுக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

2. $(-5,-2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் ஆயஅச்சுகளுக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

3. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
   (i) சாய்வு -3; y-வெட்டுத்துண்டு 4.
   (ii) சாய்வுக்கோணம் 60^0, y-வெட்டுத்துண்டு 3.

www.tntextbooks.in

4. ஒரு நேர்க்கோடு y-அச்சை ஆதிப்புள்ளிக்கு மேலாக 3 அலகுகள் தூரத்தில் வெட்டுகிறது மற்றும் $\tan\theta = \frac{1}{2}$ (θ என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம்) எனில், அந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வு மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு ஆகியனவற்றைக் காண்க.
   (i) $y = x + 1$ (ii) $5x = 3y$ (iii) $4x - 2y + 1 = 0$ (iv) $10x + 15y + 6 = 0$

6. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
   (i) சாய்வு -4 ; (1, 2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது.
   (ii) சாய்வு $\frac{2}{3}$; (5, -4) என்ற புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

7. சாய்வுக் கோணம் 30^{0} கொண்ட மற்றும் (4, 2), (3, 1) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. பின்வரும் புள்ளிகளின் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
   (i) (-2, 5), (3, 6) (ii) (0, -6), (-8, 2)

9. $P(1,-3), Q(-2,5), R(-3,4)$ ஆகிய முனைகளைக் கொண்ட $\triangle PQR$-ல் முனை R-இலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

10. நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காணும் முறையைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக.
    (i) (4, 2), (7, 5), (9, 7) (ii) (1, 4), (3, -2), (-3, 16)

11. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y-வெட்டுத்துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
    (i) 2, 3 (ii) $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ (iii) $\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}$

12. கீழேக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y-வெட்டுத் துண்டுகளைக் காண்க.
    (i) $5x + 3y - 15 = 0$ (ii) $2x - y + 16 = 0$ (iii) $3x + 10y + 4 = 0$

13. (3, 4) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் விகிதம் 3 : 2 என உள்ளதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. (2, 2) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 9 ஆகவும் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

15. (5, -3) என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும், அளவில் சமமாகவும், ஆனால் குறி வெவ்வேறாகவும் உள்ள வெட்டுத் துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

16. (9, -1) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் x-வெட்டுத்துண்டானது, y-வெட்டுத்துண்டின் அளவைப் போல் மும்மடங்கு கொண்டதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

17. ஒரு நேர்க்கோடு ஆயஅச்சுகளை A மற்றும் B ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது. AB-ன் நடுப்புள்ளி $(3, 2)$ எனில், AB-ன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

18. x-வெட்டுத்துண்டானது y-வெட்டுத்துண்டின் அளவை விட 5 அலகுகள் அதிகமாகக் கொண்ட ஒரு நேர்க்கோடானது $(22, -6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கின்றது எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

19. $ABCD$ என்ற சாய்சதுரத்தின் இரு முனைகள் $A(3, 6)$ மற்றும் $C(-1, 2)$ எனில், அதன் மூலை விட்டம் BD வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

20. $A(-2, 6)$, $B(3, -4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டை P என்ற புள்ளி உட்புறமாக $2 : 3$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. புள்ளி P வழியாகச் செல்லும் சாய்வு $\frac{3}{2}$ உடைய, நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

5.7 நேர்க்கோட்டுச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பு (General Form of Equation of a straight line)

பல்வேறு வடிவங்களில் அமைந்த நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளை $ax + by + c = 0$, (a, b, c என்பன $a \neq 0$ அல்லது $b \neq 0$ எனக் கொண்ட மெய்யெண் மாறிலிகள்) என்ற பொது அமைப்பிற்கு மாற்றலாம் என ஏற்கனவே குறிப்பிட்டுள்ளோம். இப்போது பின்வருவனவற்றைக் காண்போம்.

(i) $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு.

(ii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

(iii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு.

(iv) இரு வெட்டும் நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி.

(i) $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு (The slope and y-intercept of the straight line $ax + by + c = 0$)

$ax + by + c = 0$ என்பதை $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, $b \neq 0$ என மாற்றி அமைக்கலாம். (1)

(1) - ஐ சாய்வு-வெட்டுத்துண்டு அமைப்பில் உள்ள $y = mx + k$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட,

சாய்வு $m = -\frac{a}{b}$, y-வெட்டுத்துண்டு $= -\frac{c}{b}$ ஆகும்.

$\therefore$ $ax + by + c = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து,

சாய்வு $m = -\frac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}$, y-வெட்டுத்துண்டு $= -\frac{\text{மாறிலி உறுப்பு}}{y\text{-ன் கெழு}}$ எனப் பெறுகிறோம்.

(ii) $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line parallel to the line $ax + by + c = 0$)

இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகள் சமம் எனில், எனில் மட்டுமே அவை இணையாகும். எனவே, $ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையான கோடுகளின் சமன்பாடு $ax + by + k = 0$ என்ற வடிவில் அமையும். இது k-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும்.

(iii) $ax+by+c=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சமன்பாடு (Equation of a line perpendicular to the line $ax+by+c=0$)

ஆயஅச்சுக்களுக்கு இணையாக அமையாத இரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், எனில் மட்டுமே அவற்றின் சாய்வுகளின் பெருக்கற்பலன் -1 ஆகும். எனவே, $ax+by+c=0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக அமையும் எல்லா நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடு $bx-ay+k=0$, k ஒரு மாறிலி ஆகும்.

குறிப்பு

$a_1x+b_1y+c_1=0$; $a_2x+b_2y+c_2=0$ என்ற இரு நேர்க்கோடுகள்

(i) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ எனில், எனில் மட்டுமே இணையாக அமையும்.

(ii) $a_1a_2+b_1b_2=0$ எனில், எனில் மட்டுமே செங்குத்தாக அமையும்.

இங்கு நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளின் கெழுக்கள் பூச்சியமற்றவை.

(iv) இரு வெட்டும் கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளி (The point of intersection of two intersecting straight lines)

இரு நேர்க்கோடுகள் இணையாக இல்லையெனில், அவை ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்ளும். அப்புள்ளி இவ்விரண்டு கோடுகளின் மீதும் அமையும். எனவே, அவைகளின் இரு சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதின் மூலம் வெட்டும் புள்ளியைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5.26

$3x+2y-12=0$, $6x+4y+8=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் இணை என நிறுவுக.

தீர்வு $3x+2y-12=0$-ன் சாய்வு $m_1=-\frac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}=-\frac{3}{2}$

இவ்வாறே, $6x+4y+8=0$-ன் சாய்வு $m_2=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

$\therefore\quad m_1=m_2$. ஆகவே, இவ்விரு நேர்க்கோடுகளும் இணையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.27

$x+2y+1=0$, $2x-y+5=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்தானவை என நிறுவுக.

தீர்வு $x+2y+1=0$-ன் சாய்வு $m_1=-\frac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}=-\frac{1}{2}$

$2x-y+5=0$-ன் சாய்வு $m_2=-\frac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}}=\frac{-2}{-1}=2$

எனவே, சாய்வுகளின் பெருக்கற் பலன் $m_1m_2=-\frac{1}{2}\times 2=-1$

ஆகவே, இவ்விரு நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

எடுத்துக்காட்டு 5.28

$x-8y+13=0$ என்ற கோட்டிற்கு இணையானதும் $(2,5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

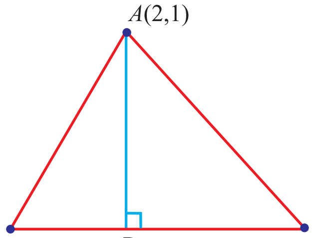
தீர்வு $x-8y+13=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் வடிவம் $x-8y+k=0$. இது (2, 5) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால்,

$2-8(5)+k=0 \implies k=38.$

$\therefore$ தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x-8y+38=0$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5.29

$\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(2, 1)$, $B(6, -1)$, $C(4, 11)$ என்க. A-யிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.



படம். 5.31

தீர்வு BC-ன் சாய்வு $=\dfrac{11+1}{4-6}=-6$

AD என்பது BC-க்குச் செங்குத்து. எனவே AD-ன் சாய்வு $=\dfrac{1}{6}$

$\therefore$ AD-ன் சமன்பாடு $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-1=\dfrac{1}{6}(x-2) \implies 6y-6=x-2$

$\therefore$ தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x-6y+4=0$ ஆகும்.

பயிற்சி 5.5

1. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க.
   (i) $3x+4y-6=0$ (ii) $y=7x+6$ (iii) $4x=5y+3$.
2. $x+2y+1=0$, $3x+6y+2=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் இணை என நிறுவுக.
3. $3x-5y+7=0$, $15x+9y+4=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்து என நிறுவுக.
4. $\dfrac{y}{2}=x-p$ மற்றும் $ax+5=3y$ என்பன இணை எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.
5. $5x-2y-9=0$, $ay+2x-11=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கு ஒன்று செங்குத்து எனில், a-ன் மதிப்பைக் காண்க.
6. $8px+(2-3p)y+1=0$, $px+8y-7=0$ ஆகியன செங்குத்து நேர்க்கோடுகள் எனில், p-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.
7. $(h,3)$, $(4, 1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோடும், $7x-9y-19=0$ என்ற நேர்க்கோடும் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன எனில், h-ன் மதிப்பைக் காண்க.
8. $3x-y+7=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையானதும் $(1, -2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
9. $x-2y+3=0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும் $(1, -2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.
10. $(3, 4)$, $(-1, 2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் மையக் குத்துக்கோட்டின் (perpendicular bisector) சமன்பாட்டைக் காண்க.

11. $2x + y - 3 = 0,\ 5x + y - 6 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், (1, 2), (2, 1) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. $5x - 6y = 1,\ 3x + 2y + 5 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், $3x - 5y + 11 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவும் அமையும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

13. $3x - y + 9 = 0, x + 2y = 4$ ஆகியநேர்க்கோடுகள்வெட்டும்புள்ளியுடன், $2x + y - 4 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

14. $\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(2,\ -4)$, $B(3,\ 3)$, $C(-1,\ 5)$ எனில், B-லிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டு வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

15. $\triangle ABC$-ன் முனைகள் $A(-4,4)$, $B(8,4)$, $C(8,10)$ எனில், A-லிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோட்டு வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

16. ஆதிப்புள்ளிலிருந்து $3x + 2y = 13$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியைக் (foot of the perpendicular) காண்க.

17. ஒரு வட்டத்தின் இரு விட்டங்களின் சமன்பாடுகள் $x + 2y = 7,\ 2x + y = 8$ மற்றும் வட்டத்தின் மீது அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளி $(0, -2)$ எனில், இவ்வட்டத்தின் ஆரத்தை காண்க.

18. $2x - 3y + 4 = 0,\ x - 2y + 3 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும், $(3,\ -2)$, $(-5,\ 8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளியையும், இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

19. இருசமபக்க முக்கோணம் $\triangle PQR$-ல் $PQ = PR$ மற்றும் அடிப்பக்கம் QR என்பது x-அச்சின் மீது அமைகிறது என்க. மேலும், முனை P ஆனது y-அச்சின் மீது அமைகிறது. PQ-ன் சமன்பாடு $2x - 3y + 9 = 0$ எனில், PR வழியாக செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

பயிற்சி 5.6

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $(a, -b)$, $(3a, 5b)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி
(A) $(-a, 2b)$ (B) $(2a, 4b)$ (C) $(2a, 2b)$ (D) $(-a, -3b)$

2. $A(1, -3)$, $B(-3, 9)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டை 1:3 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி P
(A) $(2, 1)$ (B) $(0, 0)$ (C) $\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$ (D) $(1, -2)$

3. $A(3, 4)$, $B(14, -3)$ ஆகியவற்றை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டு x-அச்சை P இல் சந்திக்கின்றது எனில், அக்கோட்டுத்துண்டை P பிரிக்கும் விகிதம்
(A) 4 : 3 (B) 3 : 4 (C) 2 : 3 (D) 4 : 1

4. (–2, –5), (–2, 12), (10, –1) ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டு மையம் (centroid)

(A) $(6,6)$ (B) $(4,4)$ (C) $(3,3)$ (D) $(2,2)$

5. $(1,2)$, $(4,6)$, $(x,6)$, $(3,2)$ என்பன இவ்வரிசையில் ஓர் இணைகரத்தின் முனைகள் எனில், x-ன் மதிப்பு

(A) 6 (B) 2 (C) 1 (D) 3

6. (0,0), $(2,0)$, $(0,2)$ ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

(A) 1 ச. அலகுகள் (B) 2 ச. அலகுகள் (C) 4 ச. அலகுகள் (D) 8 ச. அலகுகள்

7. $(1,1)$, $(0,1)$, $(0,0)$, $(1,0)$ ஆகிய புள்ளிகளால் அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பு

(A) 3 ச. அலகுகள் (B) 2 ச. அலகுகள் (C) 4 ச. அலகுகள் (D) 1 ச. அலகுகள்

8. x-அச்சுக்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம்

(A) 0° (B) 60° (C) 45° (D) 90°

9. $(3,-2)$, $(-1,a)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{3}{2}$ எனில், a-ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

10. $(-2,6)$, $(4,8)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

(A) $\frac{1}{3}$ (B) 3 (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

11. $9x-y-2=0$, $2x+y-9=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி

(A) $(-1,7)$ (B) $(7,1)$ (C) $(1,7)$ (D) $(-1,-7)$

12. $4x+3y-12=0$ என்ற நேர்க்கோடு y-அச்சை வெட்டும் புள்ளி

(A) $(3,0)$ (B) $(0,4)$ (C) $(3,4)$ (D) $(0,-4)$

13. $7y-2x=11$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு

(A) $-\frac{7}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{2}{7}$ (D) $-\frac{2}{7}$

14. (2 , –7) என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், x-அச்சிற்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $x=2$ (B) $x=-7$ (C) $y=-7$ (D) $y=2$

15. $2x-3y+6=0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் x, y-வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே

(A) 2, 3 (B) 3, 2 (C) -3, 2 (D) 3, -2

16. ஒரு வட்டத்தின் மையம் $(-6, 4)$. ஒரு விட்டத்தின் ஒரு முனை $(-12, 8)$ எனில், அதன் மறு முனை

(A) $(-18, 12)$ (B) $(-9, 6)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(0, 0)$

17. ஆதிப்புள்ளி வழிச் செல்வதும் $2x + 3y - 7 = 0$ என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்துமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $2x + 3y = 0$ (B) $3x - 2y = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

18. y-அச்சிற்கு இணையானதும் $(-2, 5)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $x - 2 = 0$ (B) $x + 2 = 0$ (C) $y + 5 = 0$ (D) $y - 5 = 0$

19. $(2,5), (4,6), (a, a)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன எனில், a-ன் மதிப்பு

(A) -8 (B) 4 (C) -4 (D) 8

20. $y = 2x + k$ என்ற நேர்க்கோடு $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கின்றது எனில், k-ன் மதிப்பு

(A) 0 (B) 4 (C) 5 (D) -3

21. சாய்வு 3 ஆகவும், y வெட்டுத்துண்டு -4 ஆகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

(A) $3x - y - 4 = 0$ (B) $3x + y - 4 = 0$

(C) $3x - y + 4 = 0$ (D) $3x + y + 4 = 0$

22. $y = 0$ மற்றும் $x = -4$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

(A) $(0, -4)$ (B) $(-4, 0)$ (C) $(0, 4)$ (D) $(4, 0)$

23. $3x + 6y + 7 = 0$ மற்றும் $2x + ky = 5$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் செங்குத்தானவை எனில், k-ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

நினைவில் கொள்க

- $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
- $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டினை உட்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $P\left(\frac{lx_2 + mx_1}{l + m}, \frac{ly_2 + my_1}{l + m}\right)$ ஆகும்.
- தளத்தில் $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டினை வெளிப்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $Q\left(\frac{lx_2 - mx_1}{l - m}, \frac{ly_2 - my_1}{l - m}\right)$ ஆகும்.
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ (x_3, y_3) ஆகிய புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு
$$= \frac{1}{2}\sum x_1(y_2 - y_3) = \frac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\}.$$

- $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ ஆகிய மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைய நிபந்தனை

  (i) $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3$ (அல்லது)

  (ii) AB-ன் சாய்வு = AC-ன் சாய்வு (அ) BC-ன் சாய்வு.

- ஒரு நேர்க்கோடு மிகை x-அச்சுடன் θ அளவு கோணம் உண்டாக்கினால், அக்கோட்டின் சாய்வு $m = \tan\theta$ ஆகும்.

- (x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்குத்தற்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு
  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

- $ax + by + c = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வு $m = -\dfrac{x\text{-ன் கெழு}}{y\text{-ன் கெழு}} = -\dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$

- கிடைநிலைக் கோட்டின் சாய்வு பூச்சியமாகும். நேர்க்குத்துக் கோட்டின் சாய்வை வரையறுக்க இயலாது.

- இரு கோடுகளின் சாய்வுகள் சமமாக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை இணையாகும்.

- நேர்க்குத்தற்ற இரு நேர்க்கோடுகளின் சாய்வுகளின் பெருக்கற் பலன் -1 (அதாவது, $m_1 m_2 = -1$) ஆக இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே அவை செங்குத்துக் கோடுகளாகும்.

நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடுகள்

வ. எண்	நேர்க்கோடு	சமன்பாடு
1.	x-அச்சு	$y = 0$
2.	y-அச்சு	$x = 0$
3.	x-அச்சிற்கு இணை	$y = k$
4.	y-அச்சிற்கு இணை	$x = k$
5.	$ax+by+c=0$ க்கு இணை	$ax + by + k = 0$
6.	$ax+by+c=0$ க்கு செங்குத்து	$bx - ay + k = 0$
	கொடுக்கப்பட்டவை	**சமன்பாடு**
1.	ஆதி வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு	$y = mx$
2.	சாய்வு m மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு c	$y = mx + c$
3.	சாய்வு m மற்றும் ஒரு புள்ளி (x_1, y_1)	$y - y_1 = m(x - x_1)$
4.	(x_1, y_1), (x_2, y_2) ஆகிய இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு	$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
5.	x-வெட்டுத்துண்டு a மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு b	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

6

வடிவியல்

There is geometry in the humming of the strings, there is music in the spacing of spheres - Pythagoras

- அறிமுகம்
- அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம்
- கோண இருசமவெட்டி தேற்றம்
- வடிவொத்த முக்கோணங்கள்
- தொடுகோடு - நாண் தேற்றம்
- பிதாகரஸ் தேற்றம்

யூக்ளிட்
(Euclid)
(கி.மு 300)
கிரீஸ்

யூக்ளிடின் "Elements" என்னும் நூல், கணித வரலாற்றில் அனைவரிடமும் பெரும்தாக்கத்தை ஏற்படுத்திய ஒரு மிகச் சிறந்தப் படைப்பாகும். இந்நூல் கணிதத்தை குறிப்பாக அதில் ஒரு பிரிவான வடிவியலைக் கற்பிப்பதில் முக்கியப் பாடநூலாக விளங்குகிறது. மீப்பெரு பொது வகுஎண்ணைக் (GCD) கணக்கிட யூக்ளிடின் வழிமுறை ஒரு சிறந்த பயனுள்ள முறையாகும்.

6.1 அறிமுகம்

பல்வேறு வடிவியல் உருவங்களின் பண்புகளை ஆராயும் கணிதத்தின் ஓர் பிரிவே வடிவியல் (Geometry) ஆகும். துல்லியமான அளவுகளின் உதவியின்றி பல்வகையான வடிவியல் வடிவங்களின் பண்புகளையும் சிறப்பியல்புகளையும் எடுகோள்கள் (Axioms) மற்றும் தேற்றங்களுடன் (Theorems) கற்றறிவதே அறிமுறை வடிவியல் (Theoretical Geometry) என்கிறோம். வடிவியல் கற்பதினால், ஒருவருடைய தருக்க அடிப்படையில் சிந்திக்கும் திறன் வளரும்.

கி.மு. 300-ல் வாழ்ந்த யூக்ளிட் (Euclid) வடிவியலின் தந்தை எனக் கருதப்படுகிறார். நிரூபணம் தேவையற்ற வெளிப்படை உண்மைகளான எடுகோள்கள் அல்லது அடிகோள்கள் மற்றும் ஏற்கனவே நிரூபிக்கப்பட்ட முடிவுகள் ஆகியனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு தருவிக்கும் முறையில் வடிவியல் முடிவுகளை ஆராய்வதில் புதிய வழியில் சிந்திக்கும் முறையைப் புகுத்தினார்.

கட்டடக்கலை மற்றும் பொறியியல் போன்ற துறைகளில் வடிவியல் முக்கியப் பங்கு வகிக்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக, நம் வாழ்வில் முக்கியமாக விளங்கும் பல பாலங்கள், சர்வசம மற்றும் வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி அமைக்கப்பட்டவை. உறுதியாகவும், அதிகச் சுமை மற்றும் அழுத்தம் ஆகியவற்றைத் தாங்கும் திறன் கொண்டவையாகவும் உள்ள பாலங்களை கட்டுவதற்கு, வடிவொத்த மற்றும் சர்வசம முக்கோணங்களின் பண்புகள் உதவுகின்றன. கட்டடங்களைக் கட்டும்போது வடிவியல் இரு வகைகளில் பயனாகிறது. ஒன்று கட்டடங்களை மேலும் உறுதியாக்குகிறது. மற்றொன்று அதன் அழகினை மேலும் கூட்டுகிறது. வடிவியல் வடிவங்களை நேர்த்தியாக பயன்படுத்தும்போது அவை, கட்டடங்கள் மற்றும் தாஜ்மகால் போன்ற கட்டமைப்புகள் ஆகியன அனைவரும் விரும்பப்படுகின்ற அடையாளச் சின்னங்களாக மாற்றும். கணிதத்தில் பல பிரிவுகளின் விரிவாக்கத்திலும், அவற்றைப் புரிந்து கொள்ளுதலிலும் வடிவியல் நிரூபணங்கள் முக்கியப் பங்கு வகிக்கின்றன.

அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம் புகழ்மிக்க கிரேக்கக் கணித மேதை தேல்ஸ் (Thales) என்பவரால் அளிக்கப்பட்டது. இது அவரின் பெயரால் தேல்ஸ் தேற்றம் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

www.tntextbooks.in

இத்தேற்றத்தைக் கீழ்க்கண்ட செயல்பாடு மூலம் புரிந்துக் கொள்ளலாம்.

செய்து பார்

$\angle XAY$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கோணத்தை வரைக. P_1, P_2, D, P_3 மற்றும் B ஆகிய புள்ளிகளை (5 புள்ளிகள்) AX என்ற கதிர் மீது

$AP_1 = P_1P_2 = P_2D = DP_3 = P_3B = 1$ (அலகு) என்றிருக்குமாறு குறிக்க.

B-ன் வழியாக ஏதாவது ஒரு கோட்டினை கதிர் AY ஐ C-ல் வெட்டுமாறு வரைக. மீண்டும் D-ன் வழியே BC-க்கு இணையாக AC -ஐ E-ல் வெட்டுமாறு ஒரு கோடு வரைக.

இப்பொழுது, $AD = AP_1 + P_1P_2 + P_2D = 3$ அலகுகள்.

மேலும், $DB = DP_3 + P_3B = 2$ அலகுகள்.

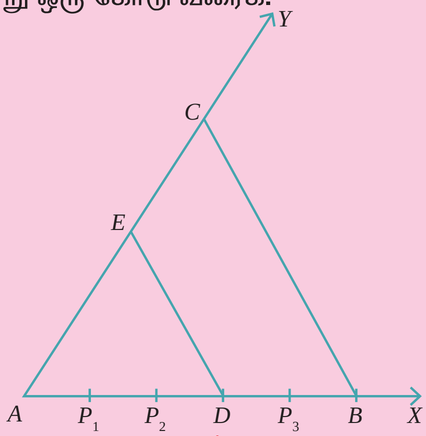
$\therefore \quad \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{3}{2}$

AE மற்றும் EC-ன் நீளங்களை அளக்கவும்.

$\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{3}{2}$ என அறியலாம்.

இதே போல், ΔABC-ல் $DE \parallel BC$ எனில்,

$\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$ எனவும் அறியலாம்.



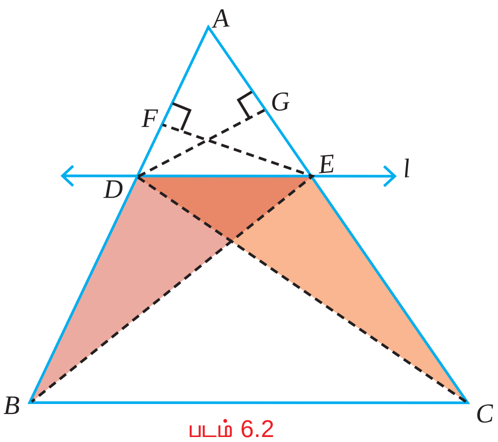
படம் 6.1

இந்த முடிவினை அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றமாக நிரூபிக்கலாம். தேற்றம் பின்வருமாறு:

6.2 அடிப்படை விகிதசமம் மற்றும் கோண இருசமவெட்டி தேற்றங்கள் (Basic proportionality and Angle Bisector theorems)

தேற்றம் 6.1 அடிப்படை விகிதசமத் தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றம் (Basic Proportionality theorem or Thales Theorem)

ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மற்ற இரண்டு பக்கங்களை வெட்டுமாறும் வரையப்பட்டால் அக்கோடு அவ்விருப் பக்கங்களையும் சமவிகிதத்தில் பிரிக்கும்.



படம் 6.2

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : ΔABC-ல் BC-க்கு இணையாக உள்ள l என்ற நேர்க்கோடு ABஐ D-யிலும் ACஐ E-யிலும் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AE}{EC}$

அமைப்பு : BE, CD ஐச் சேர்.

$EF \perp AB$ மற்றும் $DG \perp CA$ வரைக.

நிரூபணம் $EF \perp AB$. எனவே முக்கோணங்கள் ADE மற்றும் DBE ஆகியவைகளுக்கு EF குத்துயரமாக அமைகிறது.

ΔADE-ன் பரப்பு $= \dfrac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம் $= \dfrac{1}{2} AD \times EF$

ΔDBE-ன் பரப்பு $= \dfrac{1}{2} \times$ அடிப்பக்கம் $\times$ உயரம் $= \dfrac{1}{2} DB \times EF$

www.tntextbooks.in

$$\therefore \quad \frac{\Delta ADE\text{ - ன் பரப்பளவு}}{\Delta DBE\text{ - ன் பரப்பளவு}} = \frac{\frac{1}{2}AD \times EF}{\frac{1}{2}DB \times EF} = \frac{AD}{DB} \qquad (1)$$

இவ்வாறே,

$$\frac{\Delta ADE\text{ - ன் பரப்பளவு}}{\Delta DCE\text{ - ன் பரப்பளவு}} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DG}{\frac{1}{2} \times EC \times DG} = \frac{AE}{EC} \qquad (2)$$

ஆனால், ΔDBE, ΔDCE என்பன DE என்ற ஒரே அடிப்பக்கத்தைக் கொண்டும் BC மற்றும் DE ஆகிய இணை நேர்க்கோடுகளுக்கு இடையிலும் அமைந்துள்ளன.

$\therefore \quad \Delta DBE$-ன் பரப்பளவு = ΔDCE-ன் பரப்பளவு (3)

(1), (2) , (3)-லிருந்து $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ எனப் பெறுகிறோம். ஆகவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

கிளைத்தேற்றம் (Corollary)

ΔABC-ல் BC-ன் இணைகோடு DE ஆனது AB-ஐ D-யிலும் AC -ஐ E-யிலும் வெட்டுகிறது எனில்,

(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

நிரூபணம்:

(i) தேல்ஸ் தேற்றத்திலிருந்து

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Longrightarrow \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

$$\Longrightarrow \frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$$

ஆகவே, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

உங்களுக்குத் தெரியுமா ?

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ எனில், $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

இது கூட்டல் விகிதசம விதி எனப்படும்.

இங்கு, $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

கூட்டல் விகிதசம விதிப்படி

$$\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$$

(ii) இவ்வாறே,

$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ என நிரூபிக்கலாம்.

இதன் மறுதலைத் தேற்றமும் உண்மையாகுமா? இதனைச் சோதித்துப் பார்க்க, பின்வரும் செயல்பாட்டினைச் செய்து பார்ப்போம்.

செய்து பார்

AX என்ற கதிரின் மீது $\angle XAY$ வரைக. அக்கதிரின் மேல் P_1, P_2, P_3, P_4 மற்றும் B என்ற புள்ளிகளை $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B = 1$ அலகு, என்றவாறு குறிக்கவும்.

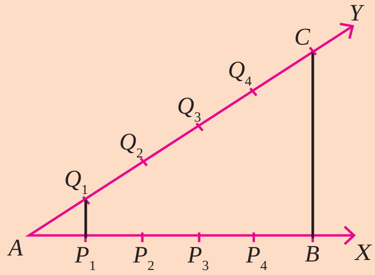
இதைப் போன்றே, கதிர் AY-ன் மேல் Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 மற்றும் C புள்ளிகளை $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = Q_4C = 2$ அலகுகள், என்றவாறு குறிக்கவும்.

இப்போது P_1Q_1 மற்றும் BC ஆகியவற்றை இணைக்கவும்.

இப்போது $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{1}{4}$.

மேலும், $\frac{AQ_1}{Q_1C} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

எனவே, $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AQ_1}{Q_1C}$.



படம் 6.3

P_1Q_1 மற்றும் BC என்பன இணைகோடுகள் என்பதனைக் காண்கிறோம்.

அதாவது, $P_1Q_1 \parallel BC$. (1)

இதைப்போன்றே, P_2Q_2, P_3Q_3 P_4Q_4 என்பனவற்றை இணைப்பதின் மூலம்

$\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AQ_2}{Q_2C} = \frac{2}{3}$ மற்றும் $P_2Q_2 \parallel BC$ (2)

$\frac{AP_3}{P_3B} = \frac{AQ_3}{Q_3C} = \frac{3}{2}$ மற்றும் $P_3Q_3 \parallel BC$ (3)

$\frac{AP_4}{P_4B} = \frac{AQ_4}{Q_4C} = \frac{4}{1}$ மற்றும் $P_4Q_4 \parallel BC$ (4)

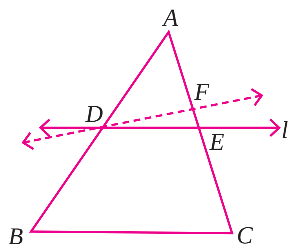
(1), (2), (3), (4)-லிருந்து, ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு நேர்க்கோடு இரு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்கும் எனில், அக்கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும் என அறியலாம்.

இதேப் போன்று, தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையைக் கூறி நிரூபிப்போம்.

தேற்றம் 6.2 அடிப்படைச் விகிதசமத் தேற்றத்தின் மறுதலை (தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை)

Converse of Basic Proportionality Theorem (Converse of Thales Theorem)

ஒரு நேர்க்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களை ஒரே விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.



படம் 6.4

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: l என்ற கோடு, முக்கோணம் ΔABC-ன் பக்கங்கள் AB, AC ஆகியவற்றை முறையே D, E-ல் $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ என்றிருக்குமாறு வெட்டுகிறது. (1)

நிரூபிக்க: $DE \parallel BC$

அமைப்பு: DE ஆனது BC-க்கு இணையாக இல்லையெனில், $DF \parallel BC$ என்றிருக்குமாறு DFஐ வரைக.

நிரூபணம் $DF \parallel BC$. எனவே, தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC} \quad (2)$$

(1), (2) ஆகியவைகளிலிருந்து $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EC} \implies \frac{AF+FC}{FC} = \frac{AE+EC}{EC}$

$$\frac{AC}{FC} = \frac{AC}{EC} \quad \therefore \; FC = EC$$

F மற்றும் E என்பன ஒரே புள்ளியாக அமைந்தால் மட்டுமே $FC = EC$ மெய்யாகும்.

எனவே, $DE \parallel BC$

தேற்றம் 6.3 கோண இருசமவெட்டித் தேற்றம் (Angle Bisector Theorem)

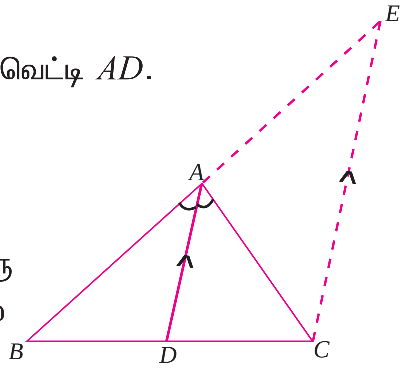
ஒரு முக்கோணத்தில் ஒரு கோணத்தின் உட்புற (வெளிப்புற) இருசமவெட்டியானது அக்கோணத்தின் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக (வெளிப்புறமாக), அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

நிலை(*i*) (உட்புற கோண இருசமவெட்டி)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : $\triangle ABC$-ல் $\angle BAC$-ன் உட்புற இருசமவெட்டி AD.

அது BC-ஐ D-ல் சந்திக்கிறது.

நிரூபிக்க: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



படம் 6.5

அமைப்பு : DA-க்கு இணையாகவும் C-யின் வழியாகவும் ஒரு இணைகோடு வரைக.அக்கோடு BA-வின் நீட்சியை புள்ளி E-ல் சந்திக்கட்டும். எனவே, $CE \parallel DA$

நிரூபணம் $CE \parallel DA$ மற்றும் AC ஒரு குறுக்குவெட்டி (Transversal).

எனவே, $\angle DAC = \angle ACE$ (ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்) (1)

மற்றும் $\angle BAD = \angle AEC$ (ஒத்த கோணங்கள்) (2)

$\angle A$-ன் உட்புற கோண இருசமவெட்டி AD. ஆதலால்,

$\angle BAD = \angle DAC$ (3)

(1), (2) ,(3)-லிருந்து $\angle ACE = \angle AEC$ எனப் பெறுகிறோம்.

எனவே, $\triangle ACE$-ல் $AE = AC$ (சம கோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்கள் சமம்)

$\triangle BCE$-ல் $CE \parallel DA$. எனவே,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad \text{(தேல்ஸ் தேற்றம்)}$$

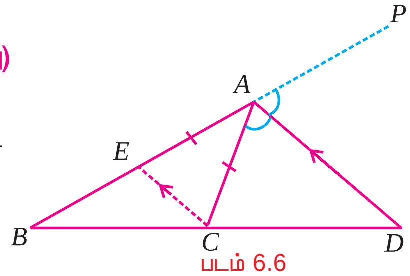
$$\implies \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (\because AE = AC)$$

ஆகவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப் பட்டது.

நிகழ்வு (*ii*) (வெளிப்புற கோண இருசமவெட்டி) (தேர்வுக்கு அன்று)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: $\triangle ABC$-ல் AD என்பது $\angle BAC$-ன் வெளிப்புற கோண இருசமவெட்டி மற்றும் BC நீட்சியினை D-ல் வெட்டுகிறது.

நிரூபிக்க : $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$



படம் 6.6

அமைப்பு : DA-க்கு இணையாக C-ன் வழியாக ஒரு நேர்க்கோடு வரைக. அக்கோடு BA-வை சந்திக்கும் புள்ளி E என்க. எனவே, $CE \parallel DA$.

நிரூபணம் $CE \parallel DA$ மற்றும் AC ஒரு குறுக்கு வெட்டி,

$\angle ECA = \angle CAD$ (ஒன்று விட்ட கோணங்கள்) (1)

மேலும், $CE \parallel DA$ மற்றும் BP ஒரு குறுக்குவெட்டி என்பதால்,

$$\angle CEA = \angle DAP \qquad \text{(ஒத்த கோணங்கள்)} \qquad (2)$$

ஆனால், AD என்பது $\angle CAP$-ன் கோண இருசமவெட்டி என்பதால்,

$$\angle CAD = \angle DAP \qquad (3)$$

(1), (2), (3)-லிருந்து,

$$\angle CEA = \angle ECA$$

எனவே, $\triangle ECA$-ல் $AC = AE$ (சமகோணங்களுக்கு எதிரே அமைந்த பக்கங்கள் சமம்)

$\triangle BDA$-ல் $EC \parallel AD$.

$$\therefore \qquad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \qquad \text{(தேல்ஸ் தேற்றம்)}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \qquad (\because AE = AC)$$

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

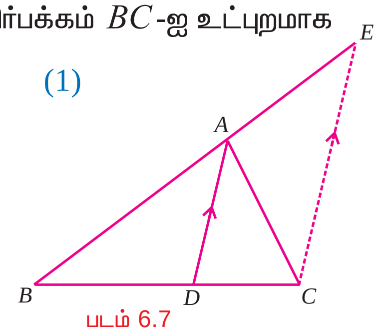
தேற்றம் 6.4 கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Angle Bisector Theorem)

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு உச்சியின் வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு, அதன் எதிர்பக்கத்தினை உட்புறமாக (வெளிப்புறமாக), மற்ற இரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு உச்சியில் அமைந்த கோணத்தினை உட்புறமாக (வெளிப்புறமாக) இரு சமபாகங்களாக பிரிக்கும்.

நிலை (*i*) : (உட்புறமாக)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : $\triangle ABC$-ல், AD என்ற நேர்க்கோடு, எதிர்பக்கம் BC-ஐ உட்புறமாக

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ என்றவாறு பிரிக்கிறது.} \qquad (1)$$



படம் 6.7

நிரூபிக்க : $\angle BAC$-ன் உட்புற இருசமவெட்டி AD.

அதாவது, $\angle BAD = \angle DAC$ என நிரூபிக்க வேண்டும்

அமைப்பு :

C-ன் வழியாக DA-க்கு இணையாக நேர்க்கோடு வரைக. அக்கோடு BA-ன் நீட்சியினை சந்திக்கும் புள்ளி E என்க. ஆகவே, $CE \parallel AD$

நிரூபணம் $CE \parallel AD$ என்பதால், தேல்ஸ் தேற்றப்படி, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$ (2)

(1), (2)-லிருந்து, $$\frac{AB}{AC} = \frac{BA}{AE}$$

$$\therefore \qquad AE = AC$$

இப்போது, $\triangle ACE$-ல் $\angle ACE = \angle AEC \qquad (\because AE = AC)$ (3)

இணைகோடுகள் AD மற்றும் CE-ன் குறுக்கு வெட்டி AC.

www.tntextbooks.in

எனவே, $\angle DAC = \angle ACE$ (ஒன்று விட்டகோணங்கள் சமம்) (4)

மேலும், இணைகோடுகள் AD மற்றும் CE ஆகியவற்றின் குறுக்கு வெட்டி BE.

எனவே, $\angle BAD = \angle AEC$ (ஒத்தகோணங்கள் சமம்) (5)

(3), (4) ,(5)-லிருந்து கிடைப்பது, $\angle BAD = \angle DAC$

$\therefore$ AD என்பது $\angle BAC$-ன் இருசமவெட்டி ஆகும்.

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

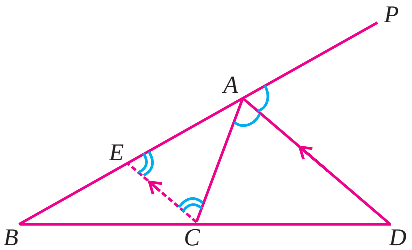
நிலை (*ii*) வெளிப்புறமாக (தேர்வுக்கு அன்று)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : $\triangle ABC$-யில் கோடு AD ஆனது $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (1)

என அமையுமாறு எதிர்பக்கம் BC-ன் நீட்சியினை வெளிப்புறமாக D-ல் பிரிக்கிறது.

நிரூபிக்க : $\angle PAC$-ன் இருசமவெட்டி AD.

அதாவது, $\angle PAD = \angle DAC$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.



படம் 6.8

அமைப்பு : C-ன் வழியாக DA-க்கு இணையாக நேர்க்கோடு வரைக. அக்கோடு BA-வை சந்திக்கும் புள்ளியினை E-எனக் குறிக்கவும். எனவே, $CE \parallel DA$

நிரூபணம் $CE \parallel DA$. எனவே, தேல்ஸ் தேற்றப்படி, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{EA}$ (2)

(1), (2)-லிருந்து, $\frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$ $\therefore$ $AE = AC$

$\triangle ACE$-ல் $\angle ACE = \angle AEC$ ($\because AE = AC$) (3)

இணைகோடுகள் AD மற்றும் CE ஆகியனவற்றின் குறுக்குவெட்டி AC ஆகும்.

எனவே, $\angle ACE = \angle DAC$ (ஒன்று விட்டக் கோணங்கள்) (4)

இணைகோடுகள் AD மற்றும் CE-ன் குறுக்கு வெட்டி BA.

எனவே, $\angle PAD = \angle AEC$ (ஒத்த கோணங்கள்) (5)

(3) , (4), (5)-லிருந்து, $\angle PAD = \angle DAC$

$\therefore$ $\angle PAC$-ன் இருசமவெட்டி AD. ஆகவே, $\angle BAC$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி AD ஆகும்.

தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

எடுத்துக்காட்டு 6.1

$\triangle ABC$-ல் $DE \parallel BC$ மற்றும் $\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$. $AE = 3.7$ செ.மீ எனில், EC-ஐக் காண்க.

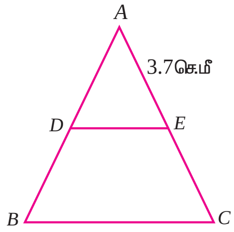
தீர்வு $\triangle ABC$-ல், $DE \parallel BC$.

www.tntextbooks.in

$\therefore \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (தேல்ஸ் தேற்றம்)

$\Longrightarrow \quad EC = \frac{AE \times DB}{AD}$

இவ்வாறாக, $EC = \frac{3.7 \times 3}{2} = 5.55$ செ.மீ



படம் 6.9

எடுத்துக்காட்டு 6.2

$\triangle PQR$-ன் பக்கங்கள் PQ மற்றும் PR-களின் மீது அமைந்த புள்ளிகள் S மற்றும் T என்க. மேலும், $ST \parallel QR$, $PR = 5.6$செ.மீ மற்றும் $\frac{PS}{SQ} = \frac{3}{5}$ எனில், PT-ஐக் காண்க.

தீர்வு $\triangle PQR$-ல் $ST \parallel QR$. தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \quad (1)$$

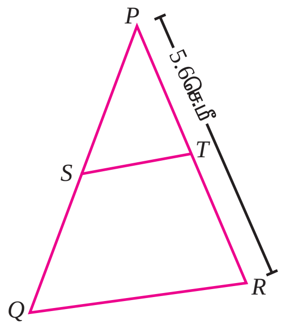
$PT = x$ என்க. $\therefore \quad TR = PR - PT = 5.6 - x$

(1)-லிருந்து $PT = TR\left(\frac{PS}{SQ}\right)$

$$x = (5.6 - x)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$5x = 16.8 - 3x$$

எனவே, $x = \frac{16.8}{8} = 2.1$. ஆகவே, PT = 2.1செ.மீ



படம் 6.10

எடுத்துக்காட்டு 6.3

$\triangle ABC$-ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-ல் ஆகியவற்றின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள் D மற்றும் E என்க. மேலும், $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ மற்றும் $\angle ADE = \angle DEA$ எனில், $\triangle ABC$ ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

தீர்வு $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆதலால், தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையின் படி $DE \parallel BC$.

$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC \quad (1)$

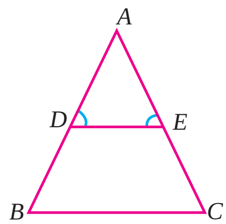
மற்றும் $\angle DEA = \angle BCA \quad (2)$

மேலும், $\angle ADE = \angle DEA$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) (3)

(1), (2) , (3)-லிருந்து $\angle ABC = \angle BCA$

$\therefore$ $AC = AB$ (சம கோணங்களுக்கு எதிரே அமைந்த பக்கங்கள் சமம்)

எனவே $\triangle ABC$ ஒரு இரு சமபக்கமுக்கோணம் ஆகும்.



படம் 6.11

எடுத்துக்காட்டு 6.4

$\triangle ABC$-ன் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA ஆகியவற்றில் அமைந்த புள்ளிகள் D, E மற்றும் F என்க. மேலும், $DE \parallel AC$ மற்றும் $FE \parallel AB$ எனில், $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$ என நிறுவுக.

www.tntextbooks.in

தீர்வு $\triangle ABC$-ல் $DE \parallel AC$.

$\therefore \quad \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$ (தேல்ஸ் தேற்றம்) (1)

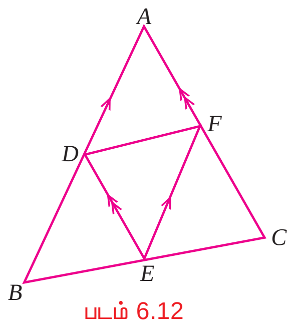
மேலும், $FE \parallel AB$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \quad \frac{BE}{EC} = \frac{AF}{FC}$ (தேல்ஸ் தேற்றம்) (2)

(1), (2)-லிருந்து, $\frac{BD}{AD} = \frac{AF}{FC}$

$\Longrightarrow \quad \frac{BD + AD}{AD} = \frac{AF + FC}{FC}$ (கூட்டல் விகிதசம விதி)

எனவே, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{FC}$.



படம் 6.12

எடுத்துக்காட்டு 6.5

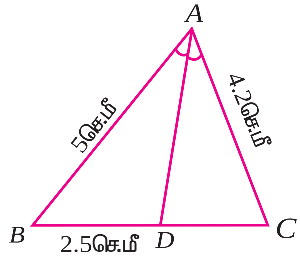
$\triangle ABC$-ல் $\angle A$ என்ற கோணத்தின் உட்புற இருசமவெட்டி AD ஆனது, பக்கம் BCஐ D-ல் சந்திக்கிறது. $BD = 2.5$ செ.மீ, $AB = 5$ செ.மீ மற்றும் $AC = 4.2$ செ.மீ எனில், DC-ஐக் காண்க.

தீர்வு $\triangle ABC$-ல், AD என்பது $\angle A$-ன் உட்புற இருசமவெட்டி.

$\therefore \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (கோண இருசமவெட்டி தேற்றம்)

$\Longrightarrow \quad DC = \frac{BD \times AC}{AB}$

ஆகவே, $DC = \frac{2.5 \times 4.2}{5} = 2.1$ செ.மீ.



படம் 6.13

எடுத்துக்காட்டு 6.6

$\triangle ABC$-ல், $\angle A$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி ஆனது BC-ன் நீட்சியினை E-ல் சந்திக்கிறது. $AB = 10$ செ. மீ, $AC = 6$ செ. மீ மற்றும் $BC = 12$ செ. மீ எனில், CE-ஐக் காண்க.

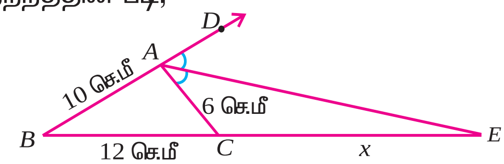
தீர்வு $\triangle ABC$-ல் $\angle A$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி AE என்க. மேலும் AE ஆனது BC-ன் நீட்சியினை E-ல் சந்திக்கிறது.

$CE = x$ செ.மீ. என்க. கோண இருசமவெட்டித் தேற்றத்தின் படி,

$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{12 + x}{x} = \frac{10}{6}$

$3(12 + x) = 5x$. எனவே, $x = 18$.

ஆதலால், $CE = 18$ செ. மீ.



படம் 6.14

எடுத்துக்காட்டு 6.7

$\triangle ABC$-ல் பக்கம் BC-ன் நடுப்புள்ளி D என்க. P மற்றும் Q என்பன AB மற்றும் AC-களின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள் ஆகும். மேலும், $\angle BDA$ மற்றும் $\angle ADC$ ஆகிய கோணங்களை முறையே DP மற்றும் DQ என்பன இரு சமபாகங்களாக பிரிக்கும் எனில், $PQ \parallel BC$ என நிறுவுக.

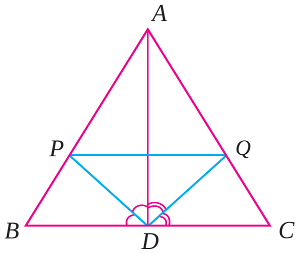
தீர்வு $\triangle ABD$-ல் $\angle BDA$-ன் கோண இருசமவெட்டி DP என்க.

www.tntextbooks.in

$\therefore \quad \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AD}{BD}$ (கோண இருசமவெட்டித் தேற்றம்) (1)

$\triangle ADC$-ல் $\angle ADC$-ன் கோண இருசமவெட்டி DQ என்க.

$\therefore \quad \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AD}{DC}$ (கோண இருசமவெட்டித் தேற்றம்) (2)



படம் 6.15

ஆனால், $BD = DC$ ($\because D$ என்பது BC-ன் நடுப்புள்ளி)

இப்போது, (2) $\Longrightarrow \dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AD}{BD}$ (3)

(1),(3)-லிருந்து, $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$

ஆகவே, $PQ \parallel BC$. (தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை)

பயிற்சி 6.1

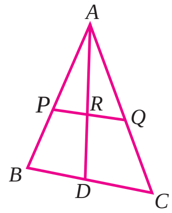
1. D மற்றும் E ஆகிய புள்ளிகள் முறையே ΔABC-ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-களில் $DE \parallel BC$ என்றிருக்குமாறு அமைந்துள்ளன.

   (i) $AD = 6$ செ.மீ, $DB = 9$ செ.மீ மற்றும் $AE = 8$ செ.மீ எனில், AC-ஐ காண்க.

   (ii) $AD = 8$ செ.மீ, $AB = 12$ செ.மீ மற்றும் $AE = 12$ செ.மீ எனில், CE-ஐ காண்க.

   (iii) $AD = 4x–3$, $BD = 3x–1$, $AE = 8x–7$ மற்றும் $EC = 5x–3$ எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

2. படத்தில் $AP = 3$ செ. மீ, $AR = 4.5$ செ. மீ, $AQ = 6$ செ. மீ, $AB = 5$ செ. மீ மற்றும் $AC = 10$ செ. மீ. எனில், AD-ன் மதிப்பைக் காண்க.

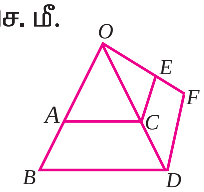


3. E மற்றும் F என்ற புள்ளிகள் முறையே $\triangle PQR$-ன் பக்கங்கள் PQ மற்றும் PR ஆகியவற்றின் மீது அமைந்துள்ளன. பின்வருவனவற்றிற்கு $EF \parallel QR$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.

   (i) $PE = 3.9$ செ. மீ., $EQ = 3$ செ.மீ., $PF = 3.6$ செ.மீ மற்றும் $FR = 2.4$ செ. மீ.

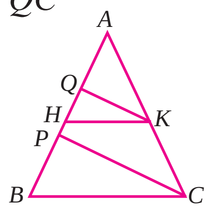
   (ii) $PE = 4$ செ. மீ, $QE = 4.5$ செ.மீ., $PF = 8$ செ.மீ மற்றும் $RF = 9$ செ. மீ.

4. படத்தில் $AC \parallel BD$ மற்றும் $CE \parallel DF$.
   $OA = 12$ செ.மீ, $AB = 9$ செ.மீ, $OC = 8$ செ.மீ.
   மற்றும் $EF = 4.5$ செ.மீ எனில், FO-வைக் காண்க.



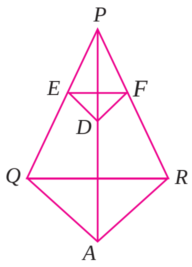
5. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில், AB-க்கு இணை CD என்க. AB-க்கு இணையாக வரையப்பட்ட ஒரு நேர்க்கோடு AD-ஐ P-யிலும் BC-ஐ Q-யிலும் சந்திக்கிறது எனில், $\dfrac{AP}{PD} = \dfrac{BQ}{QC}$ என நிறுவுக.

6. படத்தில் $PC \parallel QK$ மற்றும் $BC \parallel HK$. $AQ = 6$ செ.மீ, $QH = 4$ செ.மீ, $HP = 5$ செ.மீ, $KC = 18$ செ.மீ எனில், AK மற்றும் PB-க்களைக் காண்க.

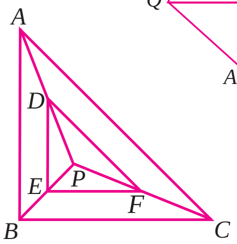


www.tntextbooks.in

7. படத்தில் $DE \parallel AQ$ மற்றும் $DF \parallel AR$ எனில், $EF \parallel QR$ என நிறுவுக.



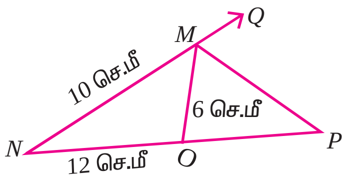
8. படத்தில் $DE \parallel AB$ மற்றும் $DF \parallel AC$ எனில், $EF \parallel BC$ என நிறுவுக.



9. AD என்பது $\triangle ABC$-ல் $\angle A$-ன் உட்புற கோண இருசமவெட்டி. அது BCஐ D-ல் சந்திக்கிறது.
   (i) $BD = 2$ செ.மீ, $AB = 5$ செ.மீ, $DC = 3$ செ.மீ எனில், AC காண்க.
   (ii) $AB = 5.6$ செ.மீ, $AC = 6$ செ.மீ மற்றும் $DC = 3$ செ.மீ எனில், BC காண்க.
   (iii) $AB = x$, $AC = x - 2$, $BD = x + 2$ மற்றும் $DC = x - 1$ எனில், x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

10. பின்வருவனவற்றுள் AD என்பது $\triangle ABC$-ல் $\angle A$-ன் கோண இருசமவெட்டி ஆகுமா எனச் சோதிக்க.
   (i) $AB = 4$ செ. மீ, $AC = 6$ செ. மீ, $BD = 1.6$ செ. மீ, மற்றும் $CD = 2.4$ செ. மீ,
   (ii) $AB = 6$ செ. மீ, $AC = 8$ செ. மீ, $BD = 1.5$ செ. மீ. மற்றும் $CD = 3$ செ. மீ.

11. MP என்பது $\triangle MNO$-ல் $\angle M$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி. மேலும், இது NO-ன் நீட்சியினை P-யில் சந்திக்கிறது. $MN = 10$ செ.மீ, $MO = 6$ செ.மீ, $NO = 12$ செ.மீ எனில், OP-ஐ காண்க.



12. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் $\angle B$ மற்றும் $\angle D$ ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் AC-ஐ E-ல் வெட்டுகின்றன எனில், $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DC}$ என நிறுவுக.

13. ΔABC-ல் $\angle A$-ன் உட்புற இருசமவெட்டி BC-ஐ D-யிலும், $\angle A$-ன் வெளிப்புற இருசமவெட்டி BC-ன் நீட்சியினை E-யிலும் சந்திக்கின்றன எனில், $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{CD}{CE}$ என நிறுவுக.

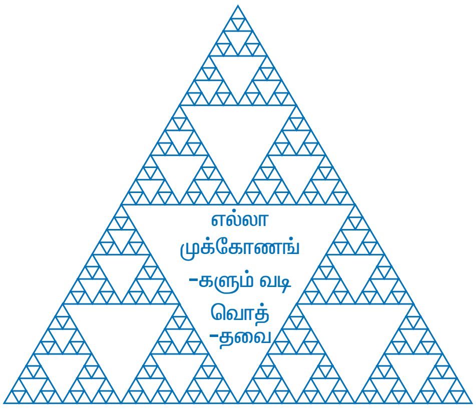
14. $ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் $AB = AD$. AE மற்றும் AF என்பன முறையே $\angle BAC$ மற்றும் $\angle DAC$ ஆகியவற்றின் உட்புற இருசமவெட்டிகள் எனில், $EF \parallel BD$ என நிறுவுக.

6.3 வடிவொத்த முக்கோணங்கள் (Similar Triangles)

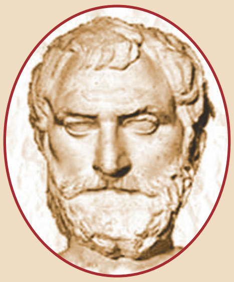
எட்டாம் வகுப்பில் சர்வசம முக்கோணங்களைப் பற்றி விரிவாகக் கற்றோம். இரு வடிவியல் உருவங்கள் ஒரே அளவு மற்றும் ஒத்த வடிவம் கொண்டவையாக இருப்பின் அவை சர்வசமம் (Congruent) என அறிந்தோம். இப்பகுதியில் வடிவத்தில் ஒத்தவையாகவும் ஆனால் அளவுகளில் வேறுபட்டவையாக இருப்பின் அமைந்த வடிவியல் உருவங்களைப் பற்றிக் கற்போம். இத்தகைய வடிவங்களை நாம் வடிவொத்தவை (Similar) என்கிறோம்.

நம்மைச் சுற்றியுள்ள உருவங்களை காணும் போது, ஒரே வடிவம் உள்ள, சம அல்லது மாறுபட்ட அளவுகள் கொண்ட பல பொருட்களைப் பார்க்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு

மரத்திலுள்ள இலைகள், ஒத்த வடிவத்திலும் ஒரே அல்லது வேறுபட்ட அளவுகளைக் கொண்டவையாகவும் உள்ளன. இதைப்போன்றே, ஒரே படச்சுருளைக் கொண்டு எடுக்கப்படும் பல்வேறு அளவுகளிலான மெய்யான நிழற்படங்கள் யாவும் ஒத்த வடிவங்களிலும் ஆனால் வேறுபட்ட அளவுகளிலும் இருக்கும். இவையாவும் **வடிவொத்தப் பொருட்கள்** எனப்படும்.



கிரேக்க நாட்டில் வடிவியலை அறிமுகப் படுத்தியவராக சொல்லப் படும் **தேல்ஸ்,** எகிப்தில் உள்ள பிரமிடுகளின் உயரங்களையும் அவற்றின் நிழல்களையும், வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தி கண்டறிந்தவர் எனக் கருதப்படுகிறார். இவ்வாறு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பயன்பாடு உயரங்கள், தூரங்கள் ஆகிய அளவீடுகளைக் கணக்கிட ஏதுவாகின்றன. இவர், இருசமப்பக்க முக்கோணத்தில் சமபக்கங்களுக்கு எதிரே உள்ள கோணங்கள் சமம் எனக் கண்டார். செய்முறை வடிவியலில், வடிவொத்த முக்கோணங்கள், செங்கோண முக்கோணங்கள் ஆகியவற்றின் பண்புகளைப் பயன்படுத்தினார்.



மிலிடஸின் தேல்ஸ்
(Thales of Miletus)
(624-546 கி.மு.)
கிரீஸ்

தத்துவ அறிஞர், விஞ்ஞானி மற்றும் கணிதவியல் நிபுணர் என அறியப்பட்டவர்களுள், முதன்மையானவராக திகழ்பவர் தேல்ஸ் ஆவார். காரணங்களைக் கொண்டுத் தருவிக்கும் முறையை முதன் முதலில் வடிவியலில் பயன்படுத்தியவரும் இவரே. மேலும் இவர், வடிவியலில் பல தேற்றங்களைக் கொண்டு பிடித்துள்ளார். கணிதத்தில் பல கணக்குகளைத் தீர்க்க இவர் கையாண்ட முறை அனைவரின் கவனத்தை ஈர்த்தது. கி.மு. 585-ல் சூரிய கிரகணத்தை முன்கூட்டியே தெரிவித்த பெருமையும் இவரைச் சாரும்.

சர்வசம வடிவப் படங்கள், வடிவொத்தவையாக இருக்கும். ஆனால் இதன் மறுதலை மெய்யாக இருக்கத் தேவையில்லை. இந்தப் பகுதியில், நாம் முக்கோணங்களின் வடிவொத்தத் தன்மைகளைப் பற்றி அறிவோம். மேலும், அவைகளைப் பயன்படுத்தி கணக்குகளுக்கு தீர்வு காண்போம். பின்வரும் எளிய செயல்பாடு, வடிவொத்த முக்கோணங்களை மனதளவில் அறிய நமக்கு உதவும்.

செய்து பார்

- மெல்லிய அட்டையில் ஒரு முக்கோண வடிவத்தை வெட்டி எடு.
- தரைக்கு மேல் 1 மீட்டர் உயரத்தில் இந்த அட்டையைச் சூரிய ஒளியில் காட்டவும்.
- தொடர்வரிசையில் முக்கோண வடிவங்களைத் தரையில் காண ஏதுவாக இந்த அட்டையினைத் தரையை நோக்கி நகர்த்து.
- தரையை, அட்டை நெருங்க நெருங்க, பிம்பம் சிறியதாகிக் கொண்டுச் செல்கிறது. தரையை விட்டு மேல்நோக்கி விலக விலக, பிம்பம் பெரியதாகிக் கொண்டே செல்கிறது.
- முக்கோணத்தின் வடிவ அளவு மாறுபட்டாலும், அதன் முனைகளில் அமையும் கோண அளவுகள் எப்போதும் ஒரே அளவில் இருப்பதை பார்க்கலாம்.

www.tntextbooks.in

வரையறை

இரு முக்கோணங்களில்

(i) ஒத்த கோணங்கள் சமம் (அல்லது)

(ii) ஒத்த பக்கங்களின் நீளங்கள் சம விகிதத்தில் (அல்லது விகிதசமத்தில்) இருக்கும் எனில், அம்முக்கோணங்களை வடிவொத்த முக்கோணங்கள் என்போம்.

அதாவது, ஒரு முக்கோணம் மற்றொன்றின் சீரான விரிவாக்கம் எனில், இவ்விரண்டு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை (similar) ஆகும்.

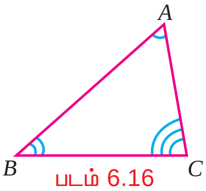
ஆகவே, $\triangle ABC$ மற்றும் $\triangle DEF$ ஆகிய இரண்டு முக்கோணங்களில்,

(i) $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$

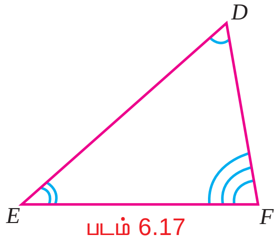
(அல்லது)

(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{CA}{FD}$ என இருந்தால்,

அவைகள் வடிவொத்த முக்கோணங்களாகும்.



படம் 6.16



படம் 6.17

இங்கு A, B, C ஆகிய உச்சிகள் முறையே D, E மற்றும் F ஆகிய உச்சிகளுக்கு ஒத்தவை யாகும். இவ்வடிவொத்த முக்கோணங்களை குறியீடாக $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ என எழுதுகிறோம். '$\sim$' என்னும் குறியீடு 'வடிவொத்தது' என்பதைக் குறிக்கும்.

குறிப்புரை

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ஆகியவற்றின் வடிவொத்தத் தன்மையைப் பொருத்தமான ஒத்த உச்சிகளைக் கொண்ட குறியீடாக $\triangle BCA \sim \triangle EFD$ மற்றும் $\Delta CAB \sim \Delta FDE$ எனவும் குறிக்கலாம்.

6.3.1 வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான விதிமுறைகள்

பின்வரும் மூன்று அடிப்படை விதிமுறைகள், முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்பதை நிரூபிக்கப் போதுமானவை.

(i) வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான AA-விதிமுறை (Angle-Angle similarity criterion)

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமமானால், அவ்விரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை ஆகும்.

குறிப்பு

ஒரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்கள் முறையே மற்றொரு முக்கோணத்தின் இரண்டு கோணங்களுக்குச் சமமானால், அவற்றின் மூன்றாவது கோணங்களும் முறையே சமமாகும். எனவே வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான AA-விதிமுறையை, AAA-விதிமுறை என்றும் குறிக்கலாம்.

(ii) வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான SSS-விதிமுறை (Side-Side-Side similarity criterion)

இரு முக்கோணங்களில், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமமானால், அவற்றின் ஒத்த கோணங்கள் சமம். எனவே இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.

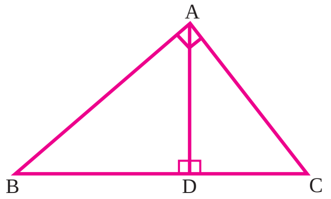
(iii) வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான SAS-விதிமுறை (Side-Angle-Side similarity criterion)

ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணம் மற்றொரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்திற்குச் சமமாகவும், அவ்விரு முக்கோணங்களில் அக்கோணங்களை உள்ளடக்கிய ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமத்திலும் இருந்தால், அவ்விரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை.

வடிவொத்த முக்கோணங்களின் முடிவுகள் சிலவற்றை நிரூபணமின்றி பட்டியலிடுவோம்.

(i) இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் விகிதத்திற்குச் சமம்.

(ii) ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் செங்கோணத்தைக் கொண்ட உச்சியின் வழியே கர்ணத்திற்கு செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால், அக்கோட்டின் இரு புறமும் அமையும் இரு முக்கோணங்கள் மற்றும் பெரிய முக்கோணம் ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று வடிவொத்தவையாக அமையும்.



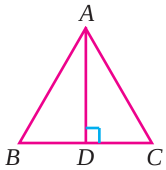
படம் 6.18

இங்கு, (அ) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, ABC$ (ஆ) $\Delta\, DAC \sim \Delta\, ABC$

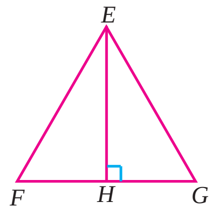
(இ) $\Delta\, DBA \sim \Delta\, DAC$

(iii) இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை எனில், ஒத்தப் பக்கங்களின் விகிதம் அவற்றின் ஒத்த குத்துயரங்களின் விகிதத்திற்கு சமம்.

$\Delta ABC \sim \Delta EFG$ எனில் $\dfrac{AB}{EF} = \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{CA}{GE} = \dfrac{AD}{EH}$



படம் 6.19



படம் 6.20

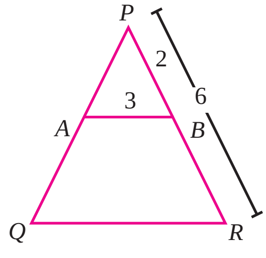
(iv) இரு முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவையாக இருப்பின், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதம் ஒத்த சுற்றளவுகளின் விகிதத்திற்கும் சமம். அதாவது,

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF \text{ எனில், } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}.$$

எடுத்துக்காட்டு 6.8

A, B என்பன ΔPQR-ன் பக்கங்கள் PQ, PR-களின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள் என்க. மேலும், $AB \parallel QR$, $AB = 3$ செ. மீ, $PB = 2$ செ.மீ மற்றும் $PR = 6$ செ.மீ எனில், QR-ன் நீளத்தினை காண்க.

தீர்வு $AB = 3$ செ.மீ, $PB = 2$, செ.மீ, $PR = 6$ செ.மீ மற்றும் $AB \parallel QR$.



படம் 6.21

ΔPAB மற்றும் ΔPQR-ல்

$\angle PAB = \angle PQR$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\angle P$ என்பது இரு முக்கோணங்களுக்கும் பொது.

$\therefore\ \Delta PAB \sim \Delta PQR$ (AA-விதிமுறை)

ஆதலால், ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.

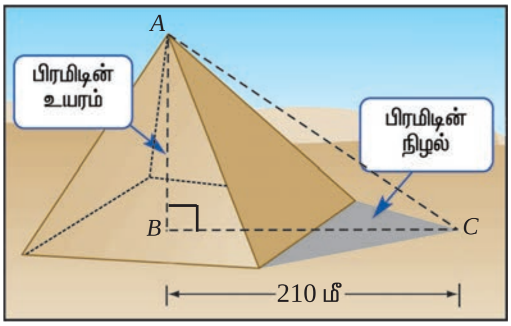
எனவே, $\dfrac{AB}{QR} = \dfrac{PB}{PR}$

$\Longrightarrow \quad QR = \dfrac{AB \times PR}{PB} = \dfrac{3 \times 6}{2}$

ஆகவே, $QR = 9$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 6.9

1.8 மீ உயரமுள்ள ஒருவர் ஒரு பிரமிடின் (Pyramid) அருகே நின்று கொண்டிருக்கின்றார். ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அவருடைய நிழலின் நீளம் 2.7மீ மற்றும் பிரமிடின் நிழலின் நீளம் 210 மீ எனில், பிரமிடின் உயரம் காண்க.



படம் 6.22

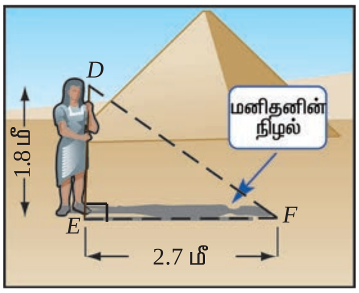
தீர்வு AB, DE என்பன முறையே பிரமிடு மற்றும் மனிதனின் உயரங்கள் என்க.

BC, EF என்பன முறையே பிரமிடு மற்றும் மனிதனின் நிழல்களின் நீளங்கள் என்க.

ΔABC மற்றும் ΔDEF -ல்

$$\angle ABC = \angle DEF = 90^{o}$$

$$\angle BCA = \angle EFD$$



படம் 6.23

(ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் குறிப்பிட்ட ஏற்றக் கோணங்கள் சமம்)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta DEF$ (AA-விதிமுறை)

எனவே, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$$\Longrightarrow \frac{AB}{1.8} = \frac{210}{2.7} \Longrightarrow AB = \frac{210}{2.7} \times 1.8 = 140.$$

பிரமிடின் உயரம் = 140 மீ.

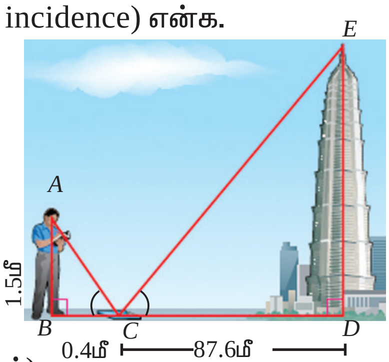
எடுத்துக்காட்டு 6.10

ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியினை, ஒருவர் கோபுரத்திலிருந்து 87.6 மீ தூரத்தில் தரையில் உள்ள ஒரு கண்ணாடியில் பார்க்கிறார். கண்ணாடி மேல் நோக்கியவாறு உள்ளது. அவர் கண்ணாடியிலிருந்து 0.4மீ தூரத்திலும் அவரின் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டின் மட்டம் தரையிலிருந்து 1.5மீ உயரத்திலும் உள்ளது எனில், கோபுரத்தின் உயரம் காண்க. (மனிதனின் அடி, கண்ணாடி மற்றும் கோபுரத்தின் அடி ஆகியவை ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன)

தீர்வு AB, ED என்பன முறையே மனிதனின் உயரம், கோபுரத்தின் உயரம் என்க. C என்பது கண்ணாடியில் கோபுரத்தின் உச்சியின் படுபுள்ளி (Point of incidence) என்க.

ΔABC மற்றும் ΔEDC -ல் $\angle ABC = \angle EDC = 90^{o}$,

$$\angle BCA = \angle DCE$$



படம் 6.24

(ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் குறிப்பிட்ட ஏற்ற கோணங்கள் சமம். அதாவது படுகோணம், எதிரொளிப்பு கோணத்திற்குச் சமம்)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EDC$ (AA-விதிமுறை)

$\therefore \frac{ED}{AB} = \frac{DC}{BC}$ (ஒத்த பக்கங்கள் சமவிகிதத்தில் இருக்கும்)

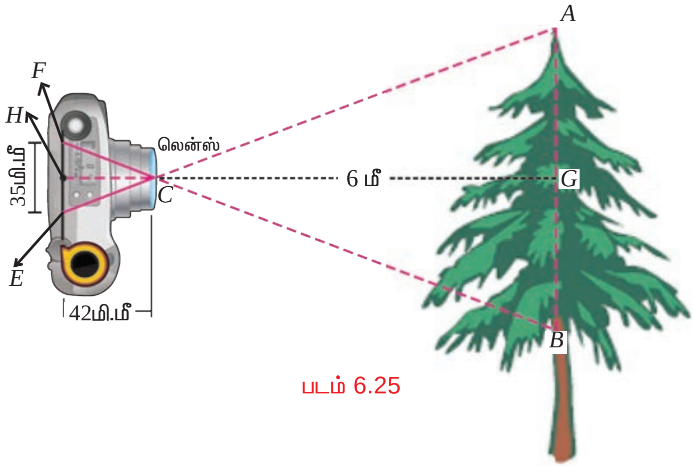
$$\Longrightarrow ED = \frac{DC}{BC} \times AB = \frac{87.6}{0.4} \times 1.5 = 328.5.$$

கோபுரத்தின் உயரம் = 328.5மீ.

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 6.11

ஒரு நிழற்படக் கருவியிலுள்ள படச் சுருளில் ஒரு மரத்தின் பிம்பத்தின் நீளம் 35 மி.மீ. லென்ஸ்க்கும் படச்சுருளுக்கும் இடைப்பட்ட தூரம் 42 மி.மீ. மேலும், லென்ஸிலிருந்து மரத்துக்கு உள்ள தூரம் 6மீ எனில், நிழற்படம் எடுக்கப்படும் மரத்தின் பகுதியின் நீளம் காண்க.



படம் 6.25

தீர்வு AB, EF என்பன முறையே நிழல்படம் எடுக்கப்படும் மரத்தின் பகுதியின் நீளம் மற்றும் படச்சுருளில் பிம்பத்தின் நீளம் என்க. C என்னும் புள்ளி லென்ஸைக் குறிக்கட்டும். CG, CH என்பன ΔACB மற்றும் ΔFEC-ன் குத்துயரங்கள் ஆகும்.

AB || FE என்பது தெளிவு.

ΔACB மற்றும் ΔFEC-ல் $\angle BAC = \angle FEC$

$\angle ECF = \angle ACB$ (குத்தெதிர்க்கோணங்கள் சமம்)

$\therefore\ \Delta ACB \sim \Delta ECF$ (AA-விதிமுறை)

எனவே, $\frac{AB}{EF} = \frac{CG}{CH}$

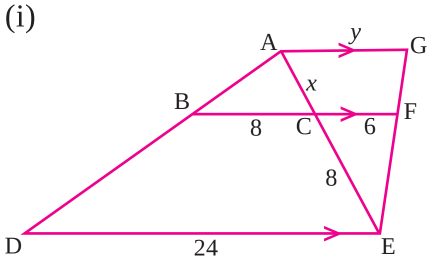
$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{CG}{CH} \times EF = \frac{6 \times 0.035}{0.042} = 5$$

நிழல் படம் எடுக்கப்பட்ட மரத்தின் பகுதியின் நீளம் 5மீ ஆகும்.

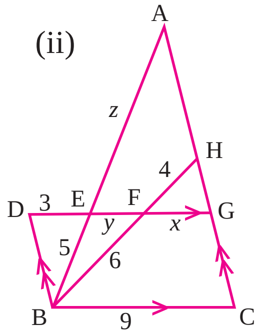
பயிற்சி 6.2

1. பின்வரும் படங்கள் ஒவ்வொன்றிலும் தெரியாதனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. எல்லா நீளங்களும் சென்டி மீட்டரில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. (அளவுகள் அளவுத்திட்டப்படி இல்லை)

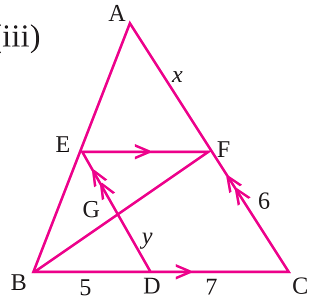
(i)



(ii)



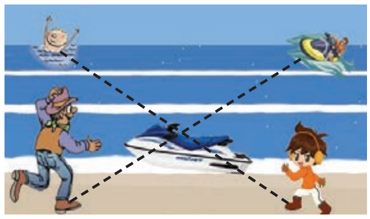
(iii)



2. ஒரு நிழற்படக் கருவியின் படச்சுருளில், 1.8 மீ உயரமுள்ள ஒரு மனிதனின் பிம்பத்தின் நீளம் 1.5 செ.மீ. என்க. கருவியின் லென்ஸிலிருந்து படச்சுருள் 3 செ.மீ தூரத்தில் இருந்தால், அவர் நிழற்படக் கருவியிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருப்பார்?

3. 120 செ.மீ. உயரமுள்ள ஒரு சிறுமி ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் அடியிலிருந்து விலகி, அதற்கு நேரெதிராக 0.6 மீ./வி வேகத்தில் நடந்துக் கொண்டிருக்கிறாள். விளக்கு, தரை மட்டத்திலிருந்து 3.6 மீ. உயரத்தில் உள்ளது எனில், சிறுமியின் நிழலின் நீளத்தை 4 வினாடிகளுக்கு பிறகு காண்க.

4. ஒரு சிறுமி கடற்கரையில் அவள் தந்தையுடன் இருக்கிறாள். கடலில் நீந்தும் ஒருவன் தொடர்ந்து நீந்த முடியாமல் நீரில் தத்தளித்துக் கொண்டிருப்பதை கண்டாள். அவள் உடனே மேற்கில் 50 மீ தொலைவில் இருக்கும் தன் தந்தையை உதவி செய்யுமாறு கூக்குரலிட்டாள். இவளை விட இவள் தந்தை ஒரு படகுக்கு 10 மீ அருகிலிருந்தார். இவர் அப்படகைப் பயன்படுத்தி மூழ்கிக் கொண்டிருப்பவனை அடைய வேண்டுமெனில், 126 மீ அப்படகில் செல்ல வேண்டும். அதே சமயத்தில் அச்சிறுமி நீர் ஊர்தி ஒன்றில் படகிலிருந்து 98 மீ தூரத்தில் செல்லும் ஒருவனைக் காண்கிறாள். நீர் ஊர்தியில் இருப்பவர் மூழ்கிக் கொண்டிருப்பவருக்கு கிழக்கில் உள்ளார். அவரைக் காப்பாற்ற ஊர்தியில் உள்ளவர் எவ்வளவு தொலைவு செல்ல வேண்டும்? (படத்தைப் பார்க்க) (இவ்வினா மட்டும் தேர்வுக்குரியதன்று)



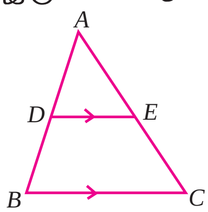
5. ΔABC-ல் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-யில் முறையே P மற்றும் Q என்ற புள்ளிகள் உள்ளன. $AP = 3$ செ.மீ, $PB = 6$ செ.மீ, $AQ = 5$ செ.மீ மற்றும் $QC = 10$ செ.மீ எனில், $BC = 3\ PQ$ என நிறுவுக.

6. ΔABC-ல், $AB = AC$ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ என்க. மேலும், AC-ல் D என்பது $AD = 5$ செ.மீ மற்றும் $CD = 4$ செ.மீ என்று இருக்குமாறு ஒரு புள்ளி எனில், $\Delta BCD \sim \Delta ACB$ என நிறுவுக. இதன் மூலம் DB-யைக் காண்க.

7. ΔABC-ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-களின் மேல் அமைந்த புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E என்க. மேலும், $DE \parallel BC$, $AB = 3\ AD$ மற்றும் ΔABC-ன் பரப்பளவு 72 செ.மீ^{2} எனில், நாற்கரம் $DBCE$-ன் பரப்பளவைக் காண்க.

8. $\triangle ABC$-ன் பக்க நீளங்கள் 6 செ.மீ, 4 செ.மீ, 9 செ.மீ மற்றும் $\triangle PQR \sim \triangle ABC$. $\triangle PQR$-ன் ஒரு பக்கம் 35 செ.மீ எனில், $\triangle PQR$-ன் சுற்றளவு மிக அதிகமாக எவ்வளவு இருக்கக் கூடும்?

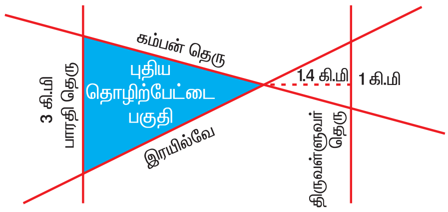
9. படத்தில் $DE \parallel BC$. மேலும், $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{3}{5}$ எனில்,



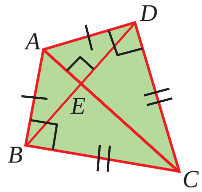
(i) $\dfrac{\Delta ADE \text{ - ன் பரப்பளவு}}{\Delta ABC \text{ - ன் பரப்பளவு}}$,

(ii) $\dfrac{\text{சரிவகம் } BCED \text{ - ன் பரப்பளவு}}{\Delta ABC \text{ - ன் பரப்பளவு}}$ ஆகியனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

10. அரசு, ஒரு மாநகரில் பயன்படுத்தப்படாத நிலப்பகுதி ஒன்றில் புதிய தொழிற்பேட்டையினை நிறுவத் திட்டமிடுகிறது. நிழலிட்டப் பகுதி புதியதாக அமைக்கப்படும் தொழிற்பேட்டை பகுதியின் பரப்பளவைக் குறிக்கிறது. இப்பகுதியின் பரப்பளவைக் காண்க.



11. ஒரு சிறுவன் வைரத்தின் குறுக்கு வெட்டுத் தோற்ற வடிவில், படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு பட்டம் செய்தான். இங்கு $AE = 16$ செ.மீ, $EC = 81$ செ.மீ. அவன் BD என்ற குறுக்குக் குச்சியினைப் பயன்படுத்த விரும்புகிறான். அக்குச்சியின் நீளம் எவ்வளவு இருக்கவேண்டும்?

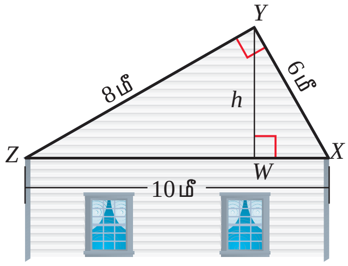


12. ஒரு மாணவன் கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தினைக் கணக்கிட விரும்புகிறான். கொடிக்கம்பத்தின் உச்சியின் எதிரொளிப்பைக் கண்ணாடியில் காணும் வகையில், ஒரு சிறு கண்ணாடியைத் தரையில் வைக்கிறான். அக்கண்ணாடி அவனிடமிருந்து 0.5மீ தொலைவில் உள்ளது. கண்ணாடிக்கும் கொடிகம்பத்திற்கும் இடையே உள்ள தொலைவு 3மீ மற்றும் அவனுடைய கிடைமட்டப் பார்வைக் கோடு தரையிலிருந்து 1.5 மீ உயரத்தில் உள்ளது எனில், கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. (மாணவன், கண்ணாடி மற்றும் கொடிக் கம்பம் ஆகியன ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன.)

13. ஒரு மேற்கூரை படத்தில் காட்டியவாறு குறுக்கு வெட்டுத் தோற்றத்தைக் கொண்டுள்ளது. இதில்

(i) வடிவொத்த முக்கோணங்களைத் தெரிந்தெடுக்கவும்.

(ii) கூரையின் உயரம் h-ஐக் காண்க.



தேற்றம் 6.5 பிதாகரஸ் தேற்றம் (பௌதயன் தேற்றம்)

(Pythagoras theorem (Baudhayan theorem))

ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : செங்கோண $\triangle ABC$-ல், $\angle A = 90^\circ$.

நிரூபிக்க : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

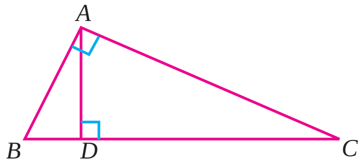
அமைப்பு : $AD \perp BC$ வரைக.

நிரூபணம்

முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் DBA-களில், $\angle B$ பொதுவான கோணம்.

மேலும், $\angle BAC = \angle ADB = 90^\circ$.

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA$ (AA - விதிமுறை)



படம் 6.26

எனவே, அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் விகிதங்கள் சமம்.

ஆகவே, $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA}$

$\implies AB^2 = DB \times BC$ (1)

இதைப் போன்றே, $\triangle ABC \sim \triangle DAC$.

எனவெ, $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$

$\implies AC^2 = BC \times DC$ (2)

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றைக் கூட்ட,

$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times DC$

$$= BC(BD + DC)$$
$$= BC \times BC = BC^2$$

ஆகவே, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. பிதாகரஸ் தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

குறிப்புரை

பிதாகரஸ் தேற்றம் இரண்டு அடிப்படைக் கருத்துக்களைக் கொண்டுள்ளது. ஒன்று பரப்பளவுகளைப் பற்றியது. மற்றொன்று நீளங்களைப் பற்றியது. எனவே, இந்த சிறப்புத் தேற்றம் வடிவியலையும், இயற்கணிதத்தையும் பிணைக்கிறது. பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையும் மெய்யாகும். இத்தேற்றம் முதன்முதலில் யூக்ளிட் என்பவரால் குறிப்பிடப்பட்டு நிரூபிக்கப்பட்டது.

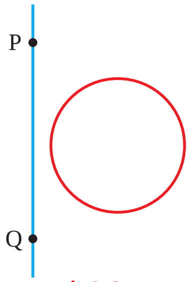
பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையின் கூற்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (நிரூபணம் பயிற்சிக்காக விடப்பட்டுள்ளது)

தேற்றம் 6.6 பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Pythagoras theorem)

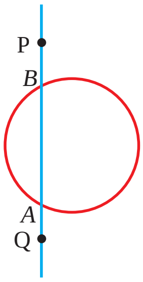
ஒரு முக்கோணத்தில், ஒரு பக்கத்தின் வர்க்கம், மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், முதல் பக்கத்திற்கு எதிரே உள்ள கோணம் செங்கோணம்.

6.4 வட்டங்கள் மற்றும் தொடுகோடுகள் (Circles and Tangents)

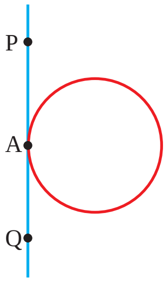
வட்டத்துடன் தொடர்புள்ள ஒரு நேர்க்கோடு அவ்வட்டத்தினை ஒரேயொரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுமானால், அக்கோடு வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு (Tangent) எனப்படும். வடிவியலில் வட்டத்தின் தொடுகோடுகள், வடிவியல் அமைப்புகள் மற்றும் நிருபணங்களிலும் முக்கிய பங்காற்றுகின்றன. இந்த பாடப்பகுதியல் வட்டங்கள், தொடுகோடுகள் ஆகியவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்ட சில முடிவுகளை விளக்குவோம். அவற்றின் மூலம், தொடுகோடு-நாண் தேற்றம் (Tangent-Chord Theorem) எனப்படும் முக்கியத் தேற்றத்தினை நிரூபிப்போம். ஒரு நேர்க்கோடு மற்றும் ஒரு வட்டம் ஆகியவற்றை ஒரு தளத்தில் எடுத்துக் கொண்டால், அவை மூன்று வகைகளில் அமையும். அவை ஒன்றினை மற்றொன்று வெட்டாமல் போகலாம்; அவை இரண்டு புள்ளிகளில் வெட்டலாம். இறுதியாக, ஒன்றை மற்றொன்று ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொடலாம்.



படம் 6.27



படம் 6.28



படம் 6.29

படம். 6.27-ல், வட்டத்திற்கும் நேர்க்கோடு PQ-விற்கும் பொதுப் புள்ளி இல்லை.

படம். 6.28-ல், நேர்க்கோடு PQ என்பது வட்டத்தினை A, B என்ற இரு வெவ்வேறு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இந்நிலையில் PQ ஆனது வட்டத்திற்கு ஒரு வெட்டுக்கோடு (Secant)ஆகும்.

படம். 6.29-ல், நேர்க்கோடு PQ-யும் வட்டமும் ஒரே ஒரு பொதுப் புள்ளியைக் கொண்டுள்ளன. அதாவது, நேர்க்கோடு வட்டத்தினை ஒரே ஒரு புள்ளியில் தொடுகிறது. நேர்க்கோடு PQ ஆனது வட்டத்திற்கு புள்ளி A-ல் தொடுகோடு (Tangent) எனப்படும்.

வரையறை

ஒரு நேர்க்கோடு வட்டத்தினை ஒரே ஒரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுமானால் அக்கோடு வட்டத்திற்கு தொடுகோடு எனப்படும். அப்புள்ளி தொடு புள்ளி (Point of Contact) எனப்படும்.

வட்டங்கள் மற்றும் தொடுகோடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட தேற்றங்கள் (நிரூபணம் இன்றி)

1. வட்டத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்டத் தொடுகோடு, தொடு புள்ளி வழிச் செல்லும் ஆரத்திற்குச் செங்குத்தாகும்.
2. வட்டத்தின் ஒரு புள்ளியில் ஒரே ஒரு தொடுகோடு மட்டுமே வரைய முடியும்.
3. வட்டத்திற்கு வெளியே உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து, அவ்வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையமுடியும்.
4. வட்டத்திற்கு வெளியிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட இரு தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம்.
5. இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமானால் தொடு புள்ளியானது வட்டங்களின் மையங்களை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டில் அமையும்.
6. இரு வட்டங்கள் வெளிப்புறமாகத் தொடுமானால், வட்ட மையங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரமானது அவற்றின் ஆரங்களின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும்.
7. இரு வட்டங்கள் உட்புறமாகத் தொடுமானால், வட்ட மையங்களுக்கு இடையே உள்ள தூரமானது அவற்றின் ஆரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமமாகும்.

தேற்றம் 6.7 தொடுகோடு – நாண் தேற்றம் (Tangent-Chord theorem)

வட்டத்தில் தொடுகோட்டின் தொடு புள்ளி வழியே ஒரு நாண் வரையபட்டால், அந்த நாண் தொடுகோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் முறையே ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக மாற்று வட்டத் துண்டுகளில் அமைந்த கோணங்களுக்குச் சமம்.

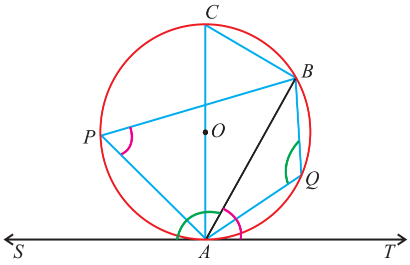
கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் A எனும் புள்ளியில் ST ஒரு தொடுகோடு, AB ஒரு நாண்.

P, Q என்பன AB என்ற நாணின் எதிரெதிர் பக்கங்களில் உள்ள ஏதேனும் இரு புள்ளிகள்.

நிரூபிக்க : (i) $\angle BAT = \angle BPA$ (ii) $\angle BAS = \angle AQB$

அமைப்பு : வட்டத்தில் AC என்ற விட்டத்தினை வரைக.

B, C ஆகியவற்றை இணைக்கவும்.



படம் 6.30

நிரூபணம்

கூற்று	காரணம்
$\angle ABC = 90^\circ$	அரை வட்டத்தின் உள் அமைக் கோணம் 90°
$\angle CAB + \angle BCA = 90^\circ$	செங்கோண ΔABC-ல் முக்கோணத்தில் இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல். (1)
$\angle CAT = 90^\circ$	தொடு புள்ளியில் விட்டம் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாகும்.
$\Longrightarrow \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$	(2)
$\angle CAB + \angle BCA = \angle CAB + \angle BAT$	(1) , (2)-லிருந்து

$\Longrightarrow$ $\angle BCA = \angle BAT$ (3)

$\angle BCA = \angle BPA$ ஒரே வட்டத்துண்டிலுள்ள உள் அமைக்கோணங்கள் சமம் (4)

$\angle BAT = \angle BPA$. (3), (4)-லிருந்து (5)

ஆகவே, (i) நிரூபிக்கப்பட்டது.

மேலும், $\angle BPA + \angle AQB = 180^\circ$ வட்ட நாற்கரத்தின் எதிரெதிர் கோணங்கள்.

$\Longrightarrow$ $\angle BAT + \angle AQB = 180^\circ$ (5)-லிருந்து (6)

மேலும், $\angle BAT + \angle BAS = 180^\circ$ நேர்க்கோட்டில் அமைந்த கோணங்கள். (7)

$\angle BAT + \angle AQB = \angle BAT + \angle BAS$ (6), (7)-லிருந்து

$\angle BAS = \angle AQB$. எனவே, (ii) நிரூபிக்கப்பட்டது.

ஆகவே, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் 6.8 தொடுகோடு – நாண் தேற்றத்தின் மறுதலை (Converse of Tangent-Chord Theorem)

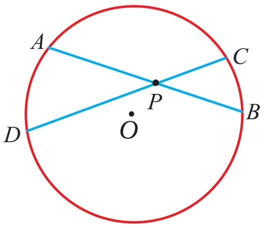
ஒரு வட்டத்தில் ஒரு நாணின் ஒரு முனைப்புள்ளி வழியே வரையப்பட்ட நேர்க்கோடு அந்நாணுடன் உண்டாக்கும் கோணமானது மறு வட்டத் துண்டிலுள்ள கோணத்திற்குச் சமமானால், அந் நேர்க்கோடு வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடாகும்.

வரையறை

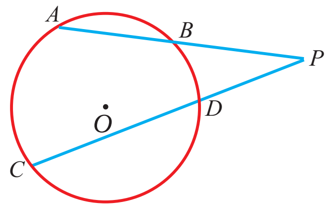
AB என்ற கோட்டுத் துண்டில் P என்பது ஒரு புள்ளி. $PA \times PB$ என்பது PA, PB-ஐ பக்கங்களாகக் கொண்ட செவ்வகத்தின் பரப்பளவைக்குறிக்கிறது. இந்த பெருக்கல்பலன் என்பது AB என்ற கோட்டுத்துண்டின் பகுதிகளாகிய PA மற்றும் PB ஆல் அமைக்கப்பட்டச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

தேற்றம் 6.9

ஒரு வட்டத்தில் இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாக (வெளிப்புறமாக) வெட்டிக் கொண்டால் ஒரு நாணின் வெட்டுத் துண்டுகளால் அமைக்கப்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு மற்றொரு நாணின் வெட்டுத் துண்டுகளால் அமைக்கப்படும் செவ்வகத்தின் பரப்பளவிற்குச் சமம்.



படம் 6.31



படம் 6.32

படம்.6.31-ல், O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு நாண்கள், ஒன்றையொன்று உட்புறமாக P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. எனவே, $PA \times PB = PC \times PD$.

படம் 6.32-ல், O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தில் AB மற்றும் CD என்ற இரண்டு நாண்கள், ஒன்றையொன்று வெளிப்புறமாக P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. எனவே, $PA \times PB = PC \times PD$.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

ஒரு வட்டத்தின் புள்ளி A-ல் வரையப்படும் தொடுகோடு PQ என்க. AB என்பது வட்டத்தின் நாண் என்க. மேலும், $\angle BAC = 54^\circ$ மற்றும் $\angle BAQ = 62^\circ$ என்று அமையுமாறு வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளி C எனில், $\angle ABC$-ஐ காண்க.

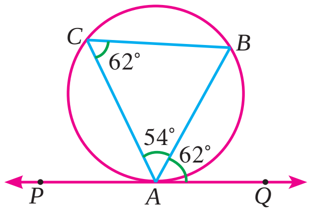
தீர்வு: A-ல் PQ ஒரு தொடுகோடு மற்றும் AB ஒரு நாண்.

எனவே, $\angle BAQ = \angle ACB = 62^\circ$. (தொடுகோடு - நாண் தேற்றம்)

மேலும், $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$.

(ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று கோணங்களின் கூடுதல் 180°)

$$\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$$
$$= 180^\circ - (54^\circ + 62^\circ) = 64^\circ.$$

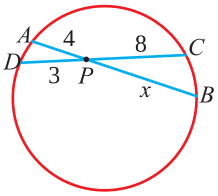


படம் 6.33

எடுத்துக்காட்டு 6.13

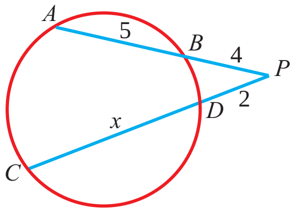
கீழ்க்காணும் ஒவ்வொரு படத்திலும் x-ன் மதிப்பை காண்க.

(i)



படம் 6.34

(ii)



படம் 6.35

தீர்வு

(i) இங்கு $PA \times PB = PC \times PD$

$$\Longrightarrow \quad PB = \frac{PC.PD}{PA}$$

எனவே, $x = \dfrac{8 \times 3}{4} = 6$.

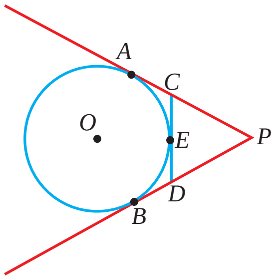
(ii) இங்கு $PA \times PB = PC \times PD$

$$\Longrightarrow \quad 9 \times 4 = (2+x)\, 2$$

$x + 2 = 18$ எனவே, $x = 16$.

எடுத்துக்காட்டு 6.14

படத்தில் PA, PB என்பன O-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்திற்கு வெளிப் புள்ளி P-யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளாகும். CD என்பது வட்டத்திற்கு E என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு. $AP = 15$ செமீ எனில், ΔPCD -யின் சுற்றளவைக் கண்டுபிடி.



படம் 6.36

தீர்வு வெளியே உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமம் என்பதனை நாம் அறிவோம்.

$\therefore CA = CE, \quad DB = DE, \quad PA = PB.$

$$\therefore \quad \Delta PCD \text{ -ன் சுற்றளவு } = PC + CD + DP$$
$$= PC + CE + ED + DP$$
$$= PC + CA + DB + DP$$
$$= PA + PB = 2\,PA \qquad (\because PB = PA)$$

ஆகவே, ΔPCD -ன் சுற்றளவு $= 2 \times 15 = 30$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 6.15

$ABCD$ என்ற நாற்கரம், அதன் எல்லா பக்கங்களும் ஒரு வட்டத்தை தொடுமாறு அமைந்துள்ளது. $AB = 6$ செ.மீ, $BC = 6.5$ செ.மீ மற்றும் $CD = 7$ செ.மீ எனில், AD-ன் நீளத்தைக் காண்க.

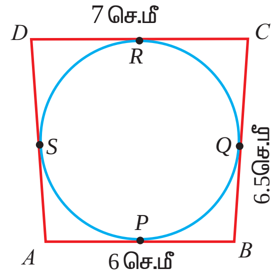
தீர்வு நாற்கரமானது வட்டத்தை தொடும் புள்ளிகள் P, Q, R மற்றும் S என்க.

$\therefore \quad AP = AS \ (1), \quad BP = BQ \ (2), \quad CR = CQ \ (3), \quad DR = DS \ (4).$

(1), (2), (3) மற்றும் (4) ஆகியவற்றைக் கூட்டக்கிடைப்பது,

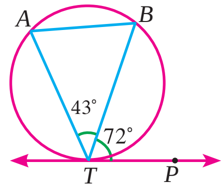
$$AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS$$
$$= AS + DS + BQ + CQ$$
$$\Longrightarrow \quad AB + CD = AD + BC.$$
$$AD = AB + CD - BC = 6 + 7 - 6.5 = 6.5$$

ஆகவே, $AD = 6.5$ செ.மீ.



படம் 6.37

பயிற்சி 6.3



1. படத்தில் TP ஒரு தொடுகோடு. A, B என்பன வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகள். $\angle BTP = 72^\circ$ மற்றும் $\angle ATB = 43^\circ$ எனில் $\angle ABT$-ஐக் காண்க.
2. ஒரு வட்டத்தில் AB, CD என்னும் இரு நாண்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறமாக P-யில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.
   (i) $CP = 4$ செ.மீ, $AP = 8$ செ.மீ., $PB = 2$ செ.மீ எனில், PD-ஐக் காண்க.
   (ii) $AP = 12$ செ.மீ, $AB = 15$ செ.மீ, $CP = PD$ எனில், CD-ஐக் காண்க.
3. AB மற்றும் CD என்ற இரு நாண்கள் வட்டத்திற்கு வெளியே P எனும் புள்ளியில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.
   (i) $AB = 4$ செ.மீ, $BP = 5$ செ.மீ மற்றும் $PD = 3$ செ.மீ எனில், CD-ஐக் காண்க.
   (ii) $BP = 3$ செ.மீ, $CP = 6$ செ.மீ மற்றும் $CD = 2$ செ.மீ எனில், AB-ஐக் காண்க.
4. ஒரு வட்டம், ΔABC-ல் பக்கம் BC-ஐ P-ல் தொடுகிறது. அவ்வட்டம் AB மற்றும் AC-களின் நீட்சிகளை முறையே Q மற்றும் R-ல் தொடுகிறது எனில், $AQ = AR = \frac{1}{2}(\Delta ABC$-ன் சுற்றளவு$)$ என நிறுவுக.
5. ஒரு இணைகரத்தின் எல்லாப் பக்கங்களும் ஒரு வட்டத்தினை தொடுமானால் அவ்விணைகரம் ஒரு சாய்சதுரமாகும் என நிறுவுக.
6. ஒரு தாமரைப் பூவானது தண்ணீர் மட்டத்திற்கு மேல் 20 செ.மீ உயரத்தில் உள்ளது. தண்டின் மீதிப் பகுதி தண்ணீர் மட்டத்திற்கு கீழே உள்ளது. காற்று வீசும்போது தண்டு தள்ளப்பட்டு, தாமரைப் பூவானது தண்டின் ஆரம்ப நிலையிலிருந்து 40 செ.மீ தூரத்தில் தண்ணீரைத் தொடுகிறது. ஆரம்ப நிலையில் தண்ணீர் மட்டத்திற்குக் கீழே உள்ள தண்டின் நீளம் காண்க?
7. செவ்வகம் $ABCD$-ன் உட்புற புள்ளி O-விலிருந்து செவ்வகத்தின் முனைகள் A, B, C, D இணைக்கப்பட்டுள்ளன எனில், $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ என நிறுவுக.

பயிற்சி 6.4

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $\triangle ABC$-ன் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC ஆகியவற்றை ஒரு நேர்க்கோடு முறையே D மற்றும் E-களில் வெட்டுகிறது. மேலும், அக்கோடு BC-க்கு இணை எனில் $\frac{AE}{AC} =$

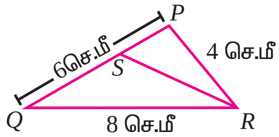
   (A) $\frac{AD}{DB}$ (B) $\frac{AD}{AB}$ (C) $\frac{DE}{BC}$ (D) $\frac{AD}{EC}$

www.tntextbooks.in

2. $\triangle ABC$-ல் AB மற்றும் AC-களிலுள்ள புள்ளிகள் D மற்றும் E என்பன $DE \parallel BC$ என்றவாறு உள்ளன. மேலும், $AD = 3$ செ.மீ, $DB = 2$ செ.மீ மற்றும் $AE = 2.7$ செ.மீ எனில், $AC =$

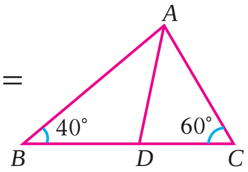
(A) 6.5 செ.மீ (B) 4.5 செ.மீ (C) 3.5 செ.மீ (D) 5.5 செ.மீ

3. $\triangle PQR$-ல் RS என்பது $\angle R$-ன் கோண உட்புற இருசமவெட்டி. $PQ = 6$ செ.மீ, $QR = 8$ செ.மீ, $RP = 4$ செ.மீ எனில், $PS =$



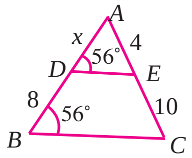
(A) 2 செ.மீ (B) 4 செ.மீ (C) 3 செ.மீ (D) 6 செ.மீ

4. படத்தில் $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$, $\angle B = 40^\circ$ மற்றும் $\angle C = 60^\circ$ எனில், $\angle BAD =$



(A) 30° (B) 50° (C) 80° (D) 40°

5. படத்தில் x-ன் மதிப்பானது

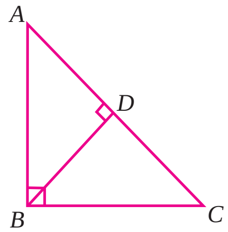


(A) $4 \cdot 2$ அலகுகள் (B) $3 \cdot 2$ அலகுகள்
(C) $0 \cdot 8$ அலகுகள் (D) $0 \cdot 4$ அலகுகள்

6. ΔABC மற்றும் ΔDEF-களில் $\angle B = \angle E$ மற்றும் $\angle C = \angle F$ எனில்,

(A) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{EF}$ (B) $\dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AB}{FD}$ (C) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$ (D) $\dfrac{CA}{FD} = \dfrac{AB}{EF}$

7. கொடுக்கப்பட்ட படத்திற்குப், பொருந்தாத கூற்றினைக் கண்டறிக.



(A) $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (B) $\Delta ABD \sim \Delta ABC$

(C) $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (D) $\Delta ADB \sim \Delta BDC$

8. 12 மீ நீளமுள்ள ஒரு நேர்க்குத்தான குச்சி, 8 மீ நீளமுள்ள நிழலைத் தரையில் ஏற்படுத்துகிறது. அதே நேரத்தில் ஒரு கோபுரம் 40 மீ நீளமுள்ள நிழலைத் தரையில் ஏற்படுத்துகிறது எனில், கோபுரத்தின் உயரம்

(A) 40 மீ (B) 50 மீ (C) 75 மீ (D) 60 மீ

9. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பக்கங்களின் விகிதம் 2:3 எனில், அவற்றின் பரப்பளவுகளின் விகிதம்

(A) 9 : 4 (B) 4 : 9 (C) 2 : 3 (D) 3 : 2

10. முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் DEF வடிவொத்தவை. அவற்றின் பரப்பளவுகள் முறையே 100 செ.மீ ^{2}, 49 செ.மீ ^{2} மற்றும் $BC = 8.2$ செ.மீ எனில், $EF =$

(A) 5.47 செ.மீ (B) 5.74 செ.மீ (C) 6.47 செ.மீ (D) 6.74 செ.மீ

11. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் சுற்றளவுகள் முறையே 24 செ.மீ, 18 செ.மீ என்க. முதல் முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கம் 8 செ.மீ எனில், மற்றொரு முக்கோணத்தின் அதற்கு ஒத்த பக்கம்

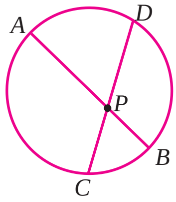
(A) 4 செ.மீ (B) 3 செ.மீ (C) 9 செ.மீ (D) 6 செ.மீ

www.tntextbooks.in

12. AB, CD என்பன ஒரு வட்டத்தின் இரு நாண்கள். அவை நீட்டப்படும்போது P-ல் சந்திக்கின்றன மற்றும் $AB = 5$ செ.மீ, $AP = 8$ செ.மீ, $CD = 2$ செ.மீ எனில், $PD =$

(A) 12 செ.மீ (B) 5 செ.மீ (C) 6 செ.மீ (D) 4 செ.மீ

13. படத்தில் நாண்கள் AB மற்றும் CD என்பன P-ல் வெட்டுகின்றன $AB = 16$ செ.மீ, $PD = 8$ செ.மீ, $PC = 6$ மற்றும் AP >PB எனில், AP =

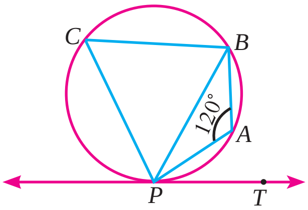


(A) 8 செ.மீ (B) 4 செ.மீ (C) 12 செ.மீ (D) 6 செ.மீ

14. P என்னும் புள்ளி, வட்ட மையம் O-விலிருந்து 26 செ.மீ தொலைவில் உள்ளது. P-யிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட PT என்ற தொடுகோட்டின் நீளம் 10 செ.மீ எனில், $OT =$

(A) 36 செ.மீ (B) 20 செ.மீ (C) 18 செ.மீ (D) 24 செ.மீ

15. படத்தில், $\angle PAB = 120^\circ$ எனில், $\angle BPT =$



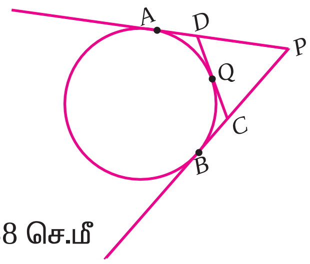
(A) 120^o (B) 30^o

(C) 40^o (D) 60^o

16. O-வை மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு PA, PB என்பன வெளிப்புள்ளி P-யிலிருந்து வரையப்பட்டத் தொடுகோடுகள். இத்தொடுகோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் 40^o எனில், $\angle POA =$

(A) 70^o (B) 80^o (C) 50^o (D) 60^o

17. படத்தில், PA, PB என்பன வட்டத்திற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளி P-யிலிருந்து வரையப்பட்டத் தொடுகோடுகள். மேலும் CD என்பது Q என்ற புள்ளியில் வட்டத்திற்கு தொடுகோடு. $PA = 8$ செ.மீ, $CQ = 3$ செ.மீ எனில், $PC =$



(A) 11 செ.மீ (B) 5 செ.மீ (C) 24 செ.மீ (D) 38 செ.மீ

18. செங்கோண ΔABC-ல் $\angle B = 90^\circ$ மற்றும் $BD \perp AC$. BD = 8 செ.மீ, $AD = 4$ செ.மீ எனில், $CD =$

(A) 24 செ.மீ (B) 16 செ.மீ (C) 32 செ.மீ (D) 8 செ.மீ

19. இரண்டு வடிவொத்த முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகள் முறையே 16 செ.மீ ^{2}, 36 செ.மீ ^{2}. முதல் முக்கோணத்தின் குத்துயரம் 3 செ.மீ எனில், மற்றொரு முக்கோணத்தில் அதனை ஒத்த குத்துயரம்

(A) 6.5 செ.மீ (B) 6 செ.மீ (C) 4 செ.மீ (D) 4.5 செ.மீ

20. இரு வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ΔABC மற்றும் ΔDEF ஆகியவற்றின் சுற்றளவுகள் முறையே 36 செ.மீ, 24 செ.மீ. மேலும், $DE = 10$ செ.மீ எனில், $AB =$

(A) 12 செ.மீ (B) 20 செ.மீ (C) 15 செ.மீ (D) 18 செ.மீ

7

முக்கோணவியல்

- அறிமுகம்
- முற்றொருமைகள்
- உயரங்களும் தூரங்களும்

ஹிப்பார்சஸ்
(Hipparchus)
(190 - 120 கி.மு.)
கிரீஸ் (Greece)

இவர் முக்கோணவியலை மேம்படுத்தினார். முக்கோணவியலில் பயன்படுத்தப்படும் அட்டவணைகளை உருவாக்கினார். கோள முக்கோணவியலில் பல கணக்குகளுக்குத் தீர்வினைக் கண்டார். சூரியன் மற்றும் சந்திரன் பற்றிய தமது கோட்பாடுகளினாலும் மற்றும் அவர் கண்டறிந்த முக்கோணவியலினாலும், சூரிய கிரகணத்தை முன் கூட்டியே அறிவதற்கு நம்பகமான முறையை முதன் முதலில் ஹிப்பார்சஸ் உருவாக்கினார்.

வானில் நடக்கும் நிகழ்வுகளை வெறுங்கண்ணால் கூர்ந்து ஆய்வு செய்ய நீண்ட காலமாக பயன்பட்ட பல வானவியல் கருவிகளை புதியதாகக் கண்டுபிடித்தது மட்டுமின்றி, இத்தகைய பல கருவிகளை மேம்படுத்திய பெருமையும் இவரைச் சாரும்.

There is perhaps nothing which so occupies the middle position of mathematics as trigonometry – J.F. Herbart

7.1 அறிமுகம்

வட்டங்களின் விற்களின் அளவுகள் மற்றும் அவ்விற்களை வரைப்படுத்தும் நாண்களின் அளவுகள் ஆகிய வற்றிற்கு இடையே உள்ளத் தொடர்பினை விவரிப்பதற்காக முக்கோணவியல் உருவாக்கப்பட்டது. முக்கோணவியல், 15 ஆம் நூற்றாண்டிற்குப் பிறகு ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் அளவுகளை அதன் பக்கங்களின் நீளங்களுடன் தொடர்புப்படுத்தப் பயன்டுத்தப்பட்டது. கி.மு. 2ஆம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த கிரேக்க நாட்டைச் சேர்ந்த ஹிப்பார்சஸ் (Hipparchus) முக்கோணவியலின் படைப்பாளர் எனக் கூறப்படுகிறது. முக்கோணத்தின் அளவுகள் எனப் பொருள்படும் முக்கோணவியல் (Trigonometry) என்னும் சொல்லுக்குரிய பெருமை பார்த்தோலோமஸ் பிடிஸ்கஸ் (Bartholomaus Pitiscus) (1561-1613) என்பவரைச் சாரும்.

ஒன்பதாம் வகுப்பில், வெவ்வேறு முக்கோணவியல் விகிதங்கள், அவற்றிற்கிடையேயான விகிதத் தொடர்புகள் மற்றும் முக்கோணவியல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி கணக்கு களுக்குத் தீர்வு காணும் முறை ஆகியனவற்றைக் கற்றறிந்தோம்.

முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் பற்றியும், மலைகள், கட்டடங்கள் போன்றவற்றின் உயரங்களையும், அவைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரங்களையும் நேரிடையாக அளந்து பாராமல், முக்கோணவியல் விகிதங்களை மட்டும் பயன்படுத்தி அவற்றை கண்டறியும் முறைகளைப் பற்றியும் இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் கற்க உள்ளோம்.

7.2 முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் (Trigonometric identities)

ஒரு சமன்பாடானது வரையறுக்கப்பட்ட மாறி அல்லது மாறிகளின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யானால், அச்சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமையாகும் என்பதனை நாம் அறிவோம். எடுத்துக்காட்டாக, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ என்ற சமன்பாடு ஒரு முற்றொருமையாகும். ஏனெனில், அனைத்து மெய்யெண்கள் a, b களுக்கும் இச்சமன்பாடு மெய்யாகும்.

இதே போன்று ஒரு கோணமாறியில், முக்கோண விகிதங்களைக் கொண்டச் சமன்பாடானது, அதிலுள்ள வரையறுக்கப்பட்ட கோணங்களின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யானால், அச்சமன்பாடு முக்கோணவியல் முற்றொருமை எனப்படும்.

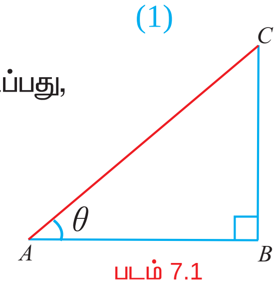
www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டாக $(\sin\theta + cos\theta)^2 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 4\sin\theta\cos\theta$ என்ற சமன்பாடு θ-ன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாதலால், இச்சமன்பாடு ஒரு முக்கோணவியல் முற்றொருமையாகும். இருப்பினும் $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$ என்ற சமன்பாடு முற்றொருமை ஆகாது. ஏனெனில், இச்சமன்பாடு $\theta = 0^\circ$-ற்கு மெய்யாகிறது. ஆனால், $\theta = 45^\circ$ எனில், $(\sin 45^\circ + \cos 45^\circ)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \neq 1$ என்பதால், சமன்பாடு மெய் ஆகாது.

> இந்த அத்தியாயத்தில், அனைத்து முக்கோணவியல் முற்றொருமைகள் மற்றும் சமன்பாடுகள் ஆகியன மாறிகளின் எந்தெந்த மதிப்புகளுக்கு பொருளுடையதாக அமைகின்றனவோ, அம்மதிப்புகளுக்கு அவை நன்கு வரையறுக்கப்பட்டதாகக் கருதப்படுகின்றன.

பிதாகரஸின் முற்றொருமைகள் (Pythagorean identities) என அழைக்கப்படும் பயனுள்ள மூன்று முற்றொருமைகளைத் தருவித்து, அவற்றைப் பயன்படுத்தி வேறு சில முற்றொருமைகளைப் பெறுவோம்.

செங்கோண $\triangle ABC$ -ல் $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (1)



படம் 7.1

சமன்பாடு (1)-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் AC^2 ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} \qquad (AC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

எனவே, $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$

$\angle A = \theta$ என்க. $0^\circ < \theta < 90^\circ$ என உள்ள θ-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (2)$$

மேலும், $\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ = 1$ மற்றும் $\cos^2 90^\circ + \sin^2 90^\circ = 1$ என்பது தெளிவாகிறது.

எனவே, (2) ஆனது $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ என்ற எல்லா θ மதிப்பிற்கும் மெய்யாகும்.

(1)-ஐ AB^2 ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{AB^2}{AB^2} + \frac{BC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \qquad (\because AB \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{AB}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 \implies 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta. \qquad (3)$$

$\theta = 90^\circ$ என்ற மதிப்பிற்கு $\tan\theta$ மற்றும் $\sec\theta$ வரையறுக்கப்படாததால்,

முற்றொருமை (3)ஆனது $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ என்ற θ-வின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாகும்.

மீண்டும் (1)-ன் ஒவ்வொரு உறுப்பையும் BC^2 ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{AB^2}{BC^2} + \frac{BC^2}{BC^2} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \qquad (\because BC \neq 0)$$

$$\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{BC}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \implies \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta. \qquad (4)$$

$\theta = 0^\circ$ என்ற மதிப்பிற்கு $\cot\theta$ மற்றும் $\operatorname{cosec}\theta$ வரையறுக்கப்படாததால்,

முற்றொருமை (4) ஆனது $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ என்ற எல்லா θ-வின் மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாகும்.

மேற்கண்ட முற்றொருமைகளுக்குச் சமமான சில முடிவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

	முற்றொருமை	சமமான வடிவங்கள்
(i)	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ (அல்லது) $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$
(ii)	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (அல்லது) $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
(iii)	$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$	$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ (அல்லது) $\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$

குறிப்புரை

மேலே உள்ள முற்றொருமைகளை நாம் குறுங்கோணம் θ-வில் நிரூபித்துள்ளோம். ஆனால் இம்முற்றொருமைகள், θ-வின் எம்மதிப்புகளுக்கு முக்கோணவியல் சார்புகள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதோ அம்மதிப்புகளுக்கு இம்முற்றொருமைகள் மெய்யாகும். இப்பாடநூலில் கோணம் θ-வின் குறுங்கோண மதிப்புக்களை மட்டும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

பொதுவாக, முக்கோணவியல் சார்புகள் உள்ள முற்றொருமைகளை நிரூபிக்க ஒரு பொதுவான வழிமுறை ஏதும் இல்லை. இருப்பினும் கீழே தரப்பட்டுள்ள சில உத்திகள், முக்கோணவியல் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்க பயனுள்ளதாக அமையும்.

(i) கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை, நிரூபிக்கப்பட வேண்டியவை ஆகியவற்றை கவனத்தில் கொண்டு முற்றொருமைகளைக் கவனமாக படிக்கவும்.

(ii) எளிய பகுதியை எடுத்து விரிவாக்குவது அல்லது சுருக்குவதைவிட முற்றொருமையின் சிக்கலான பகுதியை எடுத்துக்கொண்டு சுருக்குவது சுலபமானது.

(iii) சில சமயங்களில் முற்றொருமையின் இரு பக்கங்களிலும் கோவைகள் சிக்கலாக இருப்பின், இரு பகுதிகளையும் தனித்தனியாக எடுத்துச் சுருக்கி, ஒரே கோவையாகத் தனித்தனியாகப் பெற வேண்டும்.

(iv) பின்னங்களை ஒன்றிணைக்கும்போது பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் கூட்டலில் பயன்படும் இயற்கணித உத்திகளைப் பயன்படுத்தவும்.

(v) தேவை எனில், ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அதற்குச் சமமான sine, cosine ஆகியனவற்றிக்கு மாற்றி பின் சுருக்குவதற்கு முயற்சி செய்யவும்.

(vi) ஒரு முற்றொருமை ஆனது, $\tan^2\theta, \cot^2\theta, \text{cosec}^2\theta, \sec^2\theta$ ஆகியவைகளுடன் கூடிய உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ மற்றும் $\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ என்பனவற்றைப் பயன்படுத்துவது நன்மை பயக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.1

$\dfrac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin\theta}{\text{cosec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)} + \frac{\cos\theta}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.2

$\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1^2-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \quad (\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.3

$[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta] = 1$

என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு $[\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) - \sin(90^\circ-\theta)][\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta][\tan\theta + \cot\theta]$

$$= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \quad (\because \operatorname{cosec}(90^\circ-\theta) = \sec\theta,\ \sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right) = 1. \quad (\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 7.4

$\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \quad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \quad (\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(\tan\theta - \sec\theta + 1)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$$

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 7.5

$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}=1+\tan\theta+\cot\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta}+\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan\theta}{1-\frac{1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}=\frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta-1}{\tan\theta}}+\frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}+\frac{1}{(-\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta-1}-\frac{1}{(\tan\theta)(\tan\theta-1)}$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\left(\tan^2\theta-\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\tan\theta-1)}\;\frac{(\tan^3\theta-1)}{\tan\theta}$$

$$=\frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1^2)}{(\tan\theta-1)\tan\theta}\qquad(\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2))$$

$$=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{\tan^2\theta}{\tan\theta}+\frac{\tan\theta}{\tan\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=\tan\theta+1+\cot\theta$$

$$=1+\tan\theta+\cot\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.6

$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)^2+(\cos\theta+\sec\theta)^2$$

$$=\sin^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta+2\cos\theta\sec\theta$$

$$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta+\sec^2\theta+2\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}+2\cos\theta\frac{1}{\cos\theta}$$

$$=1+(1+\cot^2\theta)+(1+\tan^2\theta)+2+2$$

$$=7+\tan^2\theta+\cot^2\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.7

$(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\sin^6\theta + \cos^6\theta$$

$$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$(\because a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b))$$

$$= 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta. \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 7.8

$\dfrac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\right) \qquad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$$

$$= (\tan\theta)\left(\frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\right) = \tan\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.9

$\dfrac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\right) \times \left(\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}\right)$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1} \qquad (\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1)$$

$$= (\sec\theta - \tan\theta)^2 = \sec^2\theta + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta$$

$$= (1 + \tan^2\theta) + \tan^2\theta - 2\sec\theta\tan\theta \qquad (\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta)$$

$$= 1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.10

$\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$$\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{1+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{(\cos\theta+1)}{\cos\theta}(\cos\theta)$$

$$= 1+\cos\theta$$

$$= (1+\cos\theta)\times\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.11

$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

தீர்வு

முதலில், இடது பக்கத்தில் உள்ளதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta \quad (1)$$

அடுத்ததாக, வலது பக்கம் உள்ளதைக் கருதுவோம்.

$$\frac{1}{\tan\theta+\cot\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)}$$

$$= \sin\theta\cos\theta \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து,

$$(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta) = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}.$$

குறிப்பு

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta} = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}} = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}} = \frac{1}{\tan\theta+\cot\theta}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.12

$\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$ மற்றும் $m \neq n$ எனில், $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$m = \tan\theta + \sin\theta$, $n = \tan\theta - \sin\theta$ என்பன கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$$m^2 - n^2 = (\tan\theta + \sin\theta)^2 - (\tan\theta - \sin\theta)^2$$
$$= \tan^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\tan\theta - (\tan^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\tan\theta)$$
$$= 4\sin\theta\tan\theta \qquad (1)$$

மேலும், $$4\sqrt{mn} = 4\sqrt{(\tan\theta + \sin\theta)(\tan\theta - \sin\theta)}$$
$$= 4\sqrt{\tan^2\theta - \sin^2\theta} = 4\sqrt{\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta\right)}$$
$$= 4\sqrt{\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)}$$
$$= 4\sqrt{\sin^2\theta(\sec^2\theta - 1)}$$
$$= 4\sqrt{\sin^2\theta\tan^2\theta} \quad (\because \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta)$$
$$= 4\sin\theta\tan\theta. \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

எடுத்துக்காட்டு 7.13

$\tan^2\alpha = \cos^2\beta - \sin^2\beta$ எனில், $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\beta$ என நிறுவுக.

தீர்வு

$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \tan^2\alpha$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{1} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

> கூட்டல்–கழித்தல் விகிதசம விதி
> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ எனில், $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

கூட்டல் கழித்தல் விகிதசம விதியைப் பயன்படுத்தக் கிடைப்பது,

$$\frac{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta)}{(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - (\cos^2\beta + \sin^2\beta)} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow \frac{2\cos^2\beta}{-2\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$\Longrightarrow \tan^2\beta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$ என நிறுவப்பட்டது.

குறிப்பு : கூட்டல்–கழித்தல் விகிதசம விதியைப் பயன்படுத்தாமலும் மேலே உள்ள கணக்கிற்கு தீர்வு காணலம்.

பயிற்சி 7.1

1. பின்வருவன ஒவ்வொன்றும் முற்றொருமை ஆகுமா எனக் காண்க.

(i) $\cos^2\theta + \sec^2\theta = 2 + \sin\theta$ (ii) $\cot^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

2. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

(i) $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\mathrm{cosec}^2\theta$ (ii) $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (iv) $\dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

(v) $\sqrt{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$ (vi) $\dfrac{1+\cos\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta\,(1+\cos\theta)} = \cot\theta$

(vii) $\sec\theta\,(1-\sin\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ (viii) $\dfrac{\sin\theta}{\mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta} = 1 - \cos\theta$

3. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிறுவுக.

(i) $\dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\cos(90^\circ - \theta)} = 2\sec\theta.$

(ii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta.$

(iii) $\dfrac{\sin(90^0 - \theta)}{1-\tan\theta} + \dfrac{\cos(90^0 - \theta)}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta.$

(iv) $\dfrac{\tan(90^0 - \theta)}{\mathrm{cosec}\,\theta + 1} + \dfrac{\mathrm{cosec}\,\theta + 1}{\cot\theta} = 2\sec\theta.$

(v) $\dfrac{\cot\theta + \mathrm{cosec}\,\theta - 1}{\cot\theta - \mathrm{cosec}\,\theta + 1} = \mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta.$

(vi) $(1 + \cot\theta - \mathrm{cosec}\,\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2.$

(vii) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}.$

(viii) $\dfrac{\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{\sin\theta\sin(90^0 - \theta)}{2\sin^2(90^0 - \theta) - 1}$

(ix) $\dfrac{1}{\mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta} - \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\mathrm{cosec}\,\theta + \cot\theta}.$

(x) $\dfrac{\cot^2\theta + \sec^2\theta}{\tan^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta} = (\sin\theta\cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta).$

4. $x = a\sec\theta + b\tan\theta$ மற்றும் $y = a\tan\theta + b\sec\theta$ எனில், $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ என நிறுவுக.

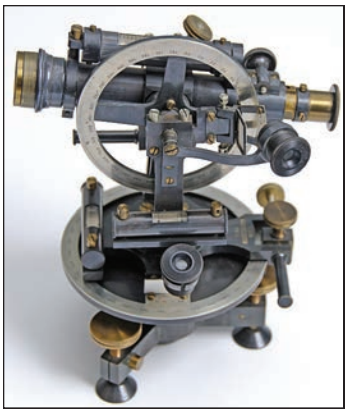
5. $\tan\theta = n\tan\alpha$ மற்றும் $\sin\theta = m\sin\alpha$ எனில், $\cos^2\theta = \dfrac{m^2 - 1}{n^2 - 1}$, $n \neq \pm 1$, என நிறுவுக.

6. $\sin\theta$, $\cos\theta$ மற்றும் $\tan\theta$ என்பன பெருக்குத் தொடரில் (G.P.) இருப்பின் $\cot^6\theta - \cot^2\theta = 1$ என நிறுவுக.

www.tntextbooks.in

7.3 உயரங்களும் தூரங்களும் (Heights and Distances)

கோள்களுக்குகிடையேயுள்ள தூரம், எவரெஸ்ட் சிகரத்தின் உயரம், மிகத் தொலைவில் உள்ள சூரியன், சந்திரன், ... போன்றவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தூரம் ஆகியன எவ்வாறு அளக்கப்படுகின்றன அல்லது கணக்கிடப்படுகின்றன என்பது நமக்கு வியப்பாக உள்ளது. இவற்றை அளவு நாடாவைக் கொண்டு அளவிட முடியுமா?



படம் 7.2

உண்மையில், அவ்வாறு அளத்தல் என்பது இயலாது. முக்கோணவியல் விகிதங்களைக் கொண்டு இந்த நீண்ட தூரங்களை கணக்கிட முடியும் என்பது நமக்கு ஆர்வத்தை அளிக்கிறது. மேலும் முக்கோணவியல் விகிதங்கள், தேசப்படங்களை வரையவும் மற்றும் அட்சரேகை, தீர்க்கரேகையைக் கொண்டு ஒரு தீவின் அமைவிடத்தை காணவும் பயன்படுகின்றன.

தியோடலைட் (Theodolite) என்ற கருவி (படம் 7.2) ஒரு பொருளை உற்றுநோக்குபவரின் கிடைநிலை பார்வைக்கோட்டிற்கும், அப்பொருளுக்கும் இடைப்பட்டக் கோணத்தை அளக்கப் பயன்படுகிறது. தியோடலைட் கருவியில், அளவுகள் குறிக்கப் பெற்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள இரண்டுச் சக்கரங்களும், ஒரு தொலைநோக்கியும் உள்ளன. இச்சக்கரங்கள், கிடைமட்டக்கோணங்கள் மற்றும் நேர்க்குத்துக் கோணங்கள் ஆகியவற்றை அளக்க உதவுகின்றன. தேவையான புள்ளியின் கோணத்தை அளப்பதற்கு, தொலைநோக்கியை அப்புள்ளியை நோக்கியவாறு வைக்கவேண்டும். அக்கோண அளவை தொலைநோக்கியின் அளவுகோலில் காணலாம்.

நம் பள்ளியின் கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தை நேரடியாக அளந்து பார்க்காமல், அதன் உயரத்தைக் காண்போம்.

கொடிக் கம்பத்தின் அடி B-யிலிருந்து 10 மீ தூரத்தில் தரையில் A என்ற புள்ளியில் ஒரு மாணவன் நின்று கொண்டிருக்கிறார் என்க. அவர் கொடிக்கம்பத்தின் உச்சி Dயை 60° கோணத்தில் பார்க்கிறார். அவருடைய கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டின் மட்டம் E ஆனது (Eye level) தரை மட்டத்திலிருந்து 1.2 மீ உயரத்தில் உள்ளது எனக்கொள்வோம். (படம்.7.3ஐ பார்க்க)

செங்கோண ΔDEC-ல் $\angle DEC = 60^\circ$

இப்பொழுது, $\tan 60^\circ = \dfrac{CD}{EC}$

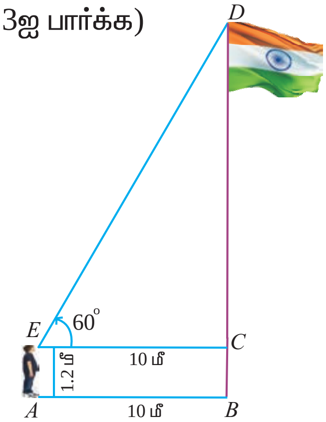
$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 60^\circ$

எனவே, $CD = 10\sqrt{3} = 10 \times 1.732$

$= 17.32$ மீ

கொடிக்கம்பத்தின் உயரம், $BD = BC + CD$

$= 1.2 + 17.32 = 18.52$ மீ



படம் 7.3

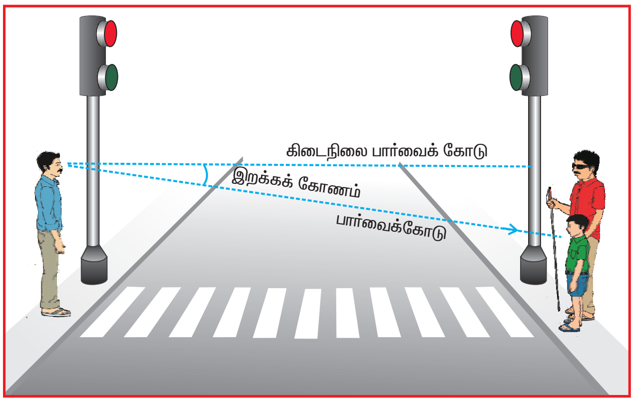
இவ்வாறு, நேரடியாக அளந்து பார்க்காமலேயே நம் பள்ளிக் கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தை நம்மால் காண முடிகிறது. எனவே, ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் ஒரு பக்கமும், ஒரு குறுங்கோணமும் தெரிந்தால், முக்கோணவியல் விகிதங்களை பயன்படுத்தி மற்ற பக்க அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்க இயலும். உயரங்களையும் மற்றும் தூரங்களையும் காண்பதில் அடிக்கடி நாம் பயன்படுத்தும் சில கலைச் சொற்களை இப்போழுது வரையறுப்போம்.

www.tntextbooks.in

பார்வைக் கோடு (Line of sight)

நாம் ஒரு பொருளைப் பார்க்கும் போது, நமது கண்ணிலிருந்து அப்பொருளுக்கு உள்ள நேர்க்கோடு பார்வைக்கோடு எனப்படும். இங்கு கணக்கிடும் தூரம் அல்லது சம்மந்தப்பட்ட தூரம் மிக அதிகமாக உள்ளதால், பொருளை ஒரு புள்ளியாகக் கருதுகிறோம்.

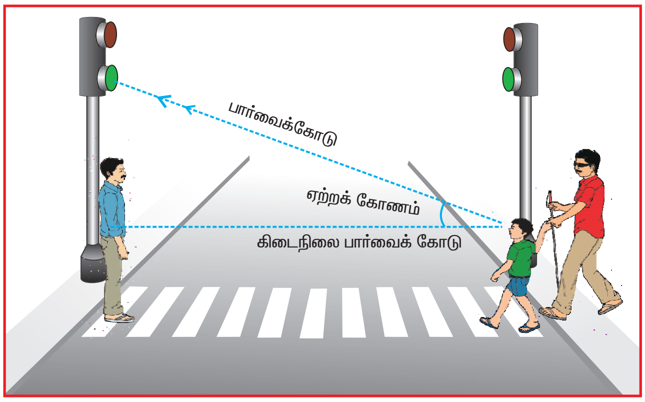
இறக்கக் கோணம் மற்றும் ஏற்றக் கோணம் (Angle of depression and angle of elevation)



படம் 7.4

ஒரு பொருள் கிடைநிலைப் பார்வை கோட்டிற்குக் கீழே இருப்பின், அப்பொருளைப் பார்க்க நாம் நம் தலையை தாழ்த்த வேண்டும். இந்த நிகழ்வின் போது நமது கண்கள் ஒரு கோணத்தில் கீழாக நகர்கின்றன. இவ்வாறு ஏற்படும் கோணம் இறக்கக் கோணம் எனப்படும். அதாவது, கிடைநிலை பார்வைக் கோட்டிற்குக் கீழே பொருள் இருக்கும்போது பார்வைக் கோட்டிற்கும் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் இறக்கக் கோணம் எனப்படும். (படம் 7.4).

ஒரு பொருள் நம் கிடைநிலை பார்வைக்கோட்டிற்கு மேலே இருந்தால், நாம் தலையை உயர்த்தி அப்பொருளைப் பார்க்க வேண்டியிருக்கும். இந்த நிகழ்வின்போது நம் கண்கள் ஒரு கோணத்தில் மேலாக நகர்கின்றன. இவ்வாறு ஏற்படும் கோணம் ஏற்றக் கோணம் எனப்படும். அதாவது, கிடைநிலை பார்வைக் கோட்டிற்கும் மேலேயுள்ள பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் ஏற்றக் கோணம் எனப்படும். (படம் 7.5).



படம் 7.5

குறிப்பு

(i) பார்வையாளரின் உயரம் தரப்படாவிடில் பார்வையாளரை ஒரு புள்ளியாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

(ii) பார்வையாளர் ஒரு பொருளைப் பார்க்கும் போது ஏற்படும் ஏற்றக் கோணமானது, அப்பொருளிலிருந்து பார்வையாளரைப் பார்க்கும் போது ஏற்படும் இறக்கக் கோணத்திற்குச் சமம்.

உயரங்கள் மற்றும் தூரங்கள் தொடர்பானக் கணக்குகளுக்குத் தீர்வுக் காண பின்வரும் படிகள் பயன்படும்.

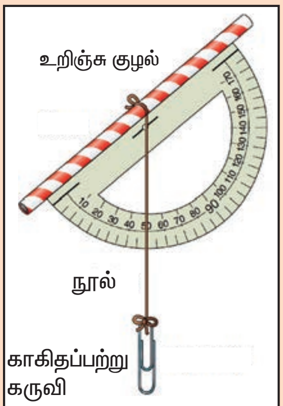
(i) வினாவினைக் கவனமாகப் படித்தபின் அதற்கேற்றவாறு ஒரு எளிய மாதிரி படத்தை வரைக.
(ii) படத்தில் தக்க அடையாளங்கள் கொடுத்து தரப்பட்ட மதிப்புகளைக் குறிக்கவும்.
(iii) கணக்கிட வேண்டிய உயரத்தை h எனக் கொள்க. தூரத்தை x எனக் கொள்க.
(iv) கணக்கிற்குத் தீர்வு காண உதவும் முக்கோணவியல் விகிதத்தை தேர்ந்தெடுக்கவும்.
(v) கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டு, தேவையான மதிப்பினைக் காண்க.

www.tntextbooks.in

பின்வரும் செயல்பாடு, மற்ற முறைகளை விட பொருளின் உயரத்தை, எளிய முறையில் கண்டறிய உதவும்.

செய்து பார்

- ஒரு உறிஞ்சுக் குழலின் (straw) மையத்தில் ஒரு நூலின் ஒரு முனையைக் கட்டவும். மற்றொரு முனையை காகிதப் பற்றுக் கருவியுடன் (paper clip) கட்டுக.
- இந்த உறிஞ்சுக் குழலின் மையத்தினை ஒரு கோணமானியின் (protractor) அடிப்புறத்தில் இறுக்கமாக ஒட்டவும். நூலானது எந்தவித தடங்கல் இல்லாமல் தொங்கி ஒரு குத்துக்கோட்டை, ஏற்படுத்துதலை உறுதி செய்க.
- நேரடியாக அளக்க இயலாத வெளியேயுள்ள ஒரு உயரமான பொருளை அதாவது, கூடைப்பந்து வளையம், கொடிக்கம்பம் அல்லது பள்ளிக் கட்டடத்தின் உயரம் இவற்றில் ஏதாவது ஒன்றினைத் தேர்வு செய்க.



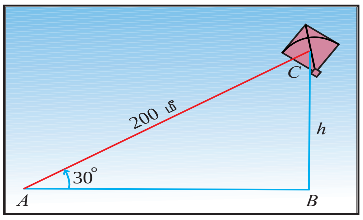
படம் 7.6

- உறிஞ்சுக் குழலின் மூலம் அப்பொருளின் உச்சியைப் பார்க்க. நூலானது கோணமானியின் அளவீடுகளை தொடும் இடத்தில் ஏற்படும் கோணத்தை அளக்கவும். ஏற்றக் கோணம் காண, அக்கோண அளவினை 90° - யிலிருந்து கழிக்கவும். இக்கோணத்தை θ என்க.
- கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும், தரைமட்டத்திற்கும் உள்ள தூரத்தை அளந்து அதை x என்க. உன் காலடியிலிருந்து அப்பொருளின் அடிப்பகுதிக்கு உள்ள தொலைவையும் அளந்து அதை y எனக் கொள்ளவும்.
- இவற்றின் அளவுகளை ஒரு படத்தில் குறிக்கவும்.
- பொருளின் உயரம் (h) காண, $h = x + y\tan\theta$ என்ற சமன்பாட்டை பயன்படுத்தவும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.14

200 மீ நீளமுள்ள நூலினால் ஒரு காற்றாடி கட்டப்பட்டு பறந்துக் கொண்டிருக்கிறது. அந்த நூல் தரைமட்டத்துடன் 30^0 கோணத்தை ஏற்படுத்தினால், காற்றாடி தரைமட்டத்திலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் பறக்கிறது எனக் காண்க. (இங்கு நூல் ஒரு நேர்க்கோட்டில் உள்ளதாகக் கருதுக)

தீர்வு தரைமட்டத்திலிருந்து காற்றாடிக்கு உள்ள தூரம் h என்க.



படம் 7.7

படத்தில் AC என்பது நூலின் நீளம் என்க.

$\angle CAB = 30^\circ$ மற்றும் $AC = 200$ மீ

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

செங்கோண $\triangle\ CAB$-ல் $\sin 30^\circ = \dfrac{h}{200}$

$$\Longrightarrow \quad h = 200\sin 30^\circ$$

$$\therefore \quad h = 200\times\frac{1}{2} = 100 \text{ மீ}$$

அதாவது தரை மட்டத்திலிருந்து காற்றாடியின் தூரம் 100 மீ.

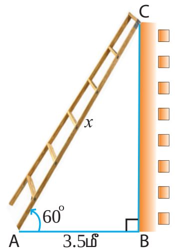
எடுத்துக்காட்டு 7.15

சுவரில் சாய்த்து வைக்கப்பட்ட ஒரு ஏணியானது தரையுடன் 60° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. ஏணியின் அடி சுவற்றிலிருந்து 3.5 மீ தூரத்தில் உள்ளது எனில், ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு AC என்பது ஏணியையும், B என்பது சுவற்றின் அடியையும் குறிக்கட்டும்.

ஏணியின் நீளம் $AC = x$ மீ என்க.

$\angle CAB = 60^\circ$ மற்றும் $AB = 3.5$ மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 7.8

செங்கோண $\triangle CAB$ -ல், $\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC}$

$$\implies \quad AC = \frac{AB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad x = 2 \times 3.5 = 7 \text{ மீ}$$

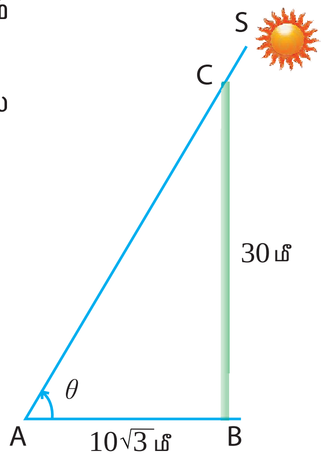
எனவே, ஏணியின் நீளம் 7 மீ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.16

30 மீ நீளமுள்ள ஒரு கம்பத்தின் நிழலின் நீளம் $10\sqrt{3}$ மீ எனில், சூரியனின் ஏற்றக் கோணத்தின் (தரை மட்டத்திலிருந்து ஏற்றக் கோணம்) அளவினைக் காண்க.

தீர்வு S என்பது சூரியனின் நிலை எனவும் BC என்பது கம்பம் எனவும் கொள்க.

$AB = 10\sqrt{3}$ என்பது கம்பத்தின் நிழலின் நீளம் என்க. புள்ளி A-ல் சூரியனின் ஏற்றக்கோணம் θ என்க.



படம் 7.9

$$BC = 30 \text{ மீ}$$

செங்கோண $\triangle$ CAB-ல், $\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

$$\implies \quad \tan\theta = \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \theta = 60^\circ$$

தரை மட்டத்திலிருந்து சூரியனின் ஏற்ற கோணம் 60°.

எடுத்துக்காட்டு 7.17

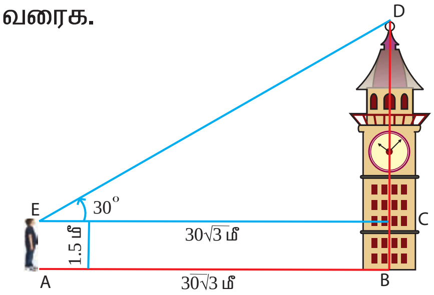
ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து $30\sqrt{3}$ மீ தொலைவில் நிற்கும் ஒரு பார்வையாளர், அக்கோபுரத்தின் உச்சியினை 30° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறார். தரைமட்டத்திலிருந்து அவருடைய கிடைநிலைப் பார்வைக்கோட்டிற்கு உள்ள தூரம் 1.5 மீ எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு BD என்பது கோபுரத்தின் உயரம் என்க. AE என்பது தரைமட்டத்திற்கும் பார்வையாளரின் கிடைநிலைப் பார்வைக்கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள தூரம் என்க.

$AB = EC$ என்றிருக்குமாறு AB-க்கு இணையாக EC-ஐ வரைக.

$AB = EC = 30\sqrt{3}$ மீ மற்றும்

$AE = BC = 1.5$ மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 7.10

செங்கோண $\triangle DEC$-ல்,

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{EC}$$

$$\Longrightarrow \quad CD = EC \tan 30^\circ = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad CD = 30 \text{மீ}$$

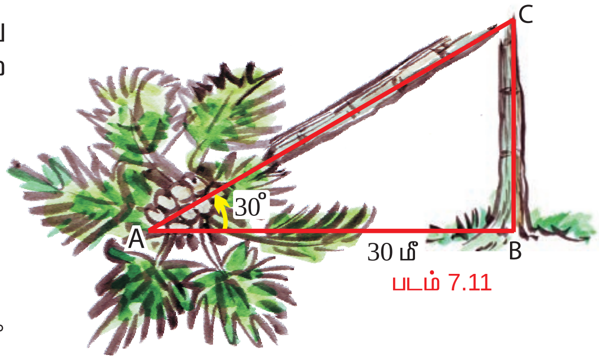
ஆதலால், கோபுரத்தின் உயரம், $BD = BC + CD$

$$= 1.5 + 30 = 31.5 \text{மீ}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.18

நேர்க்குத்தான ஒரு மரத்தின் மேல்பாகம் காற்றினால் முறிந்து, அம்முறிந்த பகுதி கீழே விழுந்துவிடாமல், மரத்தின் உச்சி தரையுடன் 30° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மரத்தின் உச்சி அதன் அடியிலிருந்து 30 மீ தொலைவில் தரையைத் தொடுகிறது எனில், மரத்தின் முழு உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு C என்ற புள்ளியில் மரம் முறிந்துள்ளது எனவும் மரத்தின் உச்சித் தரையைத் தொடும் புள்ளி A எனவும் கொள்க. மரதின் B அடி என்க. $AB = 30$ மீ மற்றும் $\angle CAB = 30^\circ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 7.11

செங்கோண $\triangle CAB$ -ல்,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 30^\circ$$

$$\therefore \quad BC = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$= 10\sqrt{3} \text{மீ} \qquad (1)$$

இப்பொழுது, $$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ}$$

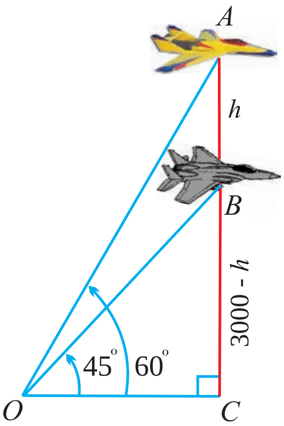
எனவே, $$AC = \frac{30 \times 2}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3} \times 2 = 20\sqrt{3} \text{மீ}. \qquad (2)$$

ஆகவே, மரத்தின் உயரம் $= BC + AC = 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

$$= 30\sqrt{3} \text{மீ}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7.19

ஓர் அதிவேகப் போர் விமானம், தரை மட்டத்திலிருந்து 3000 மீ உயரத்தில், மற்றொரு அதிவேகப் போர் விமானத்தை நேர் மேலாகக் கடக்கிறது. அவ்வாறு கடக்கும் போது தரை மட்டத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து அவற்றின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 60° மற்றும் 45° எனில், அந்த நேரத்தில் இரண்டாவது போர் விமானம் மற்றும் முதல் போர் விமானம் ஆகியவற்றிற்கு இடைப்பட்ட தூரத்தைக் கணக்கிடுக. $(\sqrt{3} = 1.732)$



படம் 7.12

தீர்வு O என்ற புள்ளியிலிருந் போர் விமானங்களை உற்று நோக்குவதாகக் கொள்வோம்.

குறிப்பிட்ட நேரத்தில் அதிவேகப் போர் விமானங்கள் இரண்டும் ஒன்றிற்கு மேலாக மற்றொன்று நேர்குத்தாக பறக்கும் போது அவற்றின் நிலைகள் A, B என்க.

$AC = 3000$ மீ என இருக்குமாறு தரையில் உள்ள புள்ளி C என்க.

தற்போது, $\angle AOC = 60^\circ$ மற்றும் $\angle BOC = 45^\circ$.

அதிவேகப் போர் விமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் h என்க.

செங்கோண $\triangle BOC$ -ல், $\tan 45^\circ = \dfrac{BC}{OC}$

$$\Longrightarrow \quad OC = BC \qquad (\because \tan 45^\circ = 1)$$

எனவே, $OC = 3000 - h$ (1)

செங்கோண $\triangle AOC$, $\tan 60^\circ = \dfrac{AC}{OC}$

$$\Longrightarrow \quad OC = \frac{AC}{\tan 60^\circ} = \frac{3000}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3000}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1000\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து நமக்கு கிடைப்பது,

$$3000 - h = 1000\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \quad h = 3000 - 1000 \times 1.732 = 1268 \text{ மீ}$$

இரண்டு அதிவேகப் போர் விமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 1268 மீ.

எடுத்துக்காட்டு 7.20

ஒரு கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து ஒரு குன்றின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 60° என்க. குன்றின் அடியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 30° மற்றும் கோபுரத்தின் உயரம் 50 மீ எனில், குன்றின் உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு AD என்பது கோபுரத்தின் உயரம் மற்றும் BC என்பது குன்றின் உயரம் என்க.

தற்போது, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$ மற்றும் $AD = 50$ மீ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

BC = h மீட்டர் என்க.

செங்கோண ΔDAB-ல் $\tan 30^\circ = \dfrac{AD}{AB}$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 30^\circ}$$

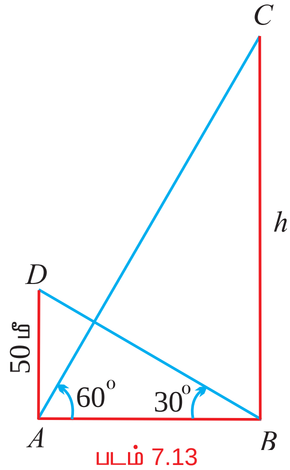
$$\therefore \quad AB = 50\sqrt{3} \text{ மீ} \qquad (1)$$

மேலும், செங்கோண $\triangle CAB$-ல் $\tan 60^\circ = \dfrac{BC}{AB}$

$$\Longrightarrow \quad BC = AB \tan 60^\circ$$

$$h = BC = (50\sqrt{3})\sqrt{3} = 150 \text{ மீ} \qquad ((1) \text{ -லிருந்து})$$

எனவே, குன்றின் உயரம் 150 மீ.



படம் 7.13

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 7.21

ஒரு செங்குத்தான சுவரும், ஒரு கோபுரமும் ஒரு குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் உள்ளன. கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கும் போது, சுவற்றின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 45° மற்றும் 60° ஆகும். கோபுரத்தின் உயரம் 90 மீ எனில், சுவற்றின் உயரத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

தீர்வு AE மற்றும் BD என்பன முறையே சுவரையும் கோபுரத்தையும் குறிக்கின்றன.

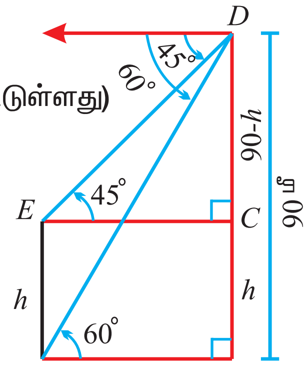
$AB=EC$ என்றவாறு AB-க்கு இணையாக EC-ஐ வரைக. எனவே, $AE = BC$.

$AB = x$ மீ மற்றும் $AE = h$ மீ என்க.

$BD = 90$ மீ , $\angle DAB = 60^\circ$ மற்றும் $\angle DEC = 45^\circ$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$AE = BC = h$ மீ

எனவே, $CD = BD - BC = 90 - h$.



படம் 7.14

செங்கோண $\triangle DAB$-ல், $\tan 60^\circ = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{90}{x}$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{90}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3} \qquad (1)$$

செங்கோண $\triangle DEC$ -ல், $\tan 45^\circ = \dfrac{DC}{EC} = \dfrac{90-h}{x}$

$$x = 90 - h \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, $90 - h = 30\sqrt{3}$

ஆகவே, சுவற்றின் உயரம் $h = 90 - 30\sqrt{3} = 38.04$ மீ.

எடுத்துக்காட்டு 7.22

கடற்கரையில் உள்ள செங்குத்தானப் பாறை ஒன்றின் மீது கட்டப்பட்டுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தில் நின்றுக்கொண்டிருக்கும் ஒரு சிறுமி, கிழக்குதிசையில் இரு படகுகளைப் பார்க்கிறாள். அப்படகுகளின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே 30°, 60° மற்றும் இரு படகுகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் 300மீ எனில், கடல் மட்டத்திலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியின் தூரத்தைக் காண்க. (படகுகளும், கலங்கரை விளக்கமும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன)

தீர்வு A மற்றும் D என்பன முறையே பாறையின் அடிப்பாகம் மற்றும் கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சி என்க. B மற்றும் C என்பன இரு படகுகள் என்க.

கடல் மட்டத்திலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சிக்கு உள்ள தூரம் h மீ என்க.

$AB = x$ மீ என்க.

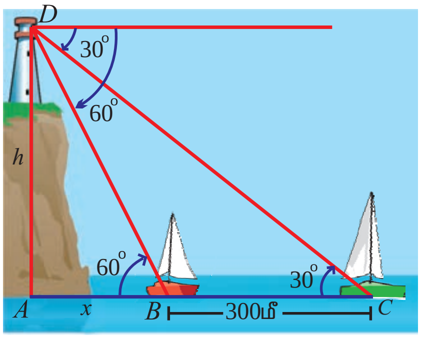
கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை :

$\angle ABD = 60^\circ, \angle ACD = 30^\circ$ மற்றும் $BC = 300$ மீ.

செங்கோண ΔABD-ல், $\tan 60^\circ = \dfrac{AD}{AB}$

$$\Longrightarrow \quad AB = \frac{AD}{\tan 60^\circ}$$

எனவே, $x = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ (1)



படம் 7.15

மேலும், செங்கோண $\triangle ACD$-ல்,

$$\tan 30^\circ = \frac{AD}{AC}$$

$$\Longrightarrow \quad AC = \frac{AD}{\tan 30^\circ} \Longrightarrow x + 300 = \frac{h}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$x + 300 = h\sqrt{3} \qquad (2)$$

(1)-ஐ (2)-ல் பிரதியிடக் கிடைப்பது $\frac{h}{\sqrt{3}} + 300 = h\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow \quad h\sqrt{3} - \frac{h}{\sqrt{3}} = 300$$

$\therefore \quad 2h = 300\sqrt{3}$. எனவே, $h = 150\sqrt{3}$.

கடல் மட்டத்திலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சிக்கு உள்ள தூரம் $= 150\sqrt{3}$ மீ.

எடுத்துக்காட்டு 7.23

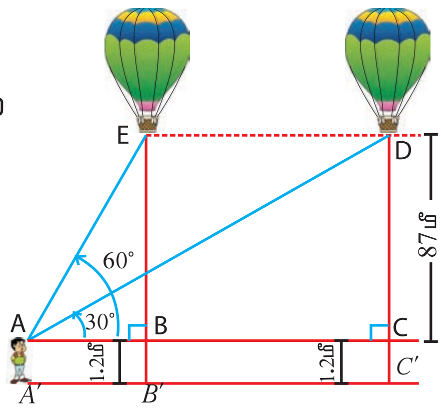
ஒரு சிறுவன், தரையிலிருந்து 88.2 மீ உயரத்தில் கிடைநிலைக் கோட்டில் காற்றில் நகரும் ஒரு பலூனை 60° ஏற்றக் கோணத்தில் பார்க்கிறான். தரைக்கும் அவனது கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிற்கும் இடையே உள்ள தூரம் 1.2 மீ. சிறிது நேரம் கழித்து, அதே இடத்திலிருந்து அவன் பலூனைப் பார்க்கும் போது ஏற்றக்கோணம் 30° ஆகக் குறைகிறது எனில், இக்கால இடைவெளியில் பலூன் நகர்ந்த தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு புள்ளி A-யிலிருந்து சிறுவன் பலூனைப் பார்ப்பதாகக் கொள்வோம்.

E, D என்பன பலூனானது A-ல் முறையே $60^\circ, 30^\circ$ ஏற்ற கோணத்தை ஏற்படுத்தும் பலூனின் நிலைகள் என்க.

B, C என்பன $BE = CD = 87$ மீ என அமையும் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் என்க.

A', B' மற்றும் C' என்பன $A'A = B'B = C'C = 1.2$ மீ என்றவாறு அமையும், தரையில் உள்ள புள்ளிகள் என்க.



படம் 7.16

$$\angle EAB = 60^\circ, \angle DAC = 30^\circ$$

$$C'D = 88.2 \text{ மீ}.$$

எனவே, $BE = CD = 87$ மீ.

மேலும், செங்கோண $\triangle EAB$-ல்,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$AB = \frac{87}{\tan 60^\circ} = \frac{87}{\sqrt{3}} = 29\sqrt{3}$$

செங்கோண $\triangle DAC$-ல் $\tan 30^\circ = \frac{DC}{AC}$

www.tntextbooks.in

எனவே, $AC = \dfrac{87}{\tan 30^\circ} = 87\sqrt{3}$.

ஆகவே, பலூன் நகர்ந்த தூரம் $ED = BC = AC - AB$

$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3}$ மீ

எடுத்துக்காட்டு 7.24

ஒரு கட்டடத்தின் மேல் ஒரு கொடிக் கம்பம் நிற்கிறது. தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கொடிக்கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 60° மற்றும் 45° என்க. மேலும் கொடிக் கம்பத்தின் உயரம் 10 மீ எனில், கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

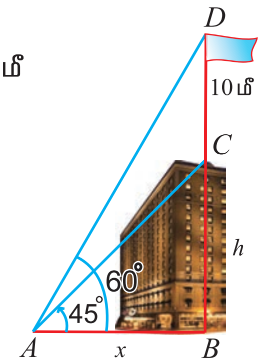
$(\sqrt{3} = 1.732)$

தீர்வு

A எனும் புள்ளியிலிருந்து கொடிக்கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 60° மற்றும் 45° என்க.

B என்பது கட்டடத்தின் அடி என்க.

BC மற்றும் CD என்பன முறையே கட்டடத்தின் உயரம் மற்றும் கொடிக்கம்பத்தின் உயரத்தைக் குறிக்கின்றன.



படம் 7.17

கொடுக்கப்பட்டவை: $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle DAB = 60^\circ$ மற்றும் $CD = 10$ மீ

தற்போது, $BC = h$ மீ மற்றும் $AB = x$ மீ என்க.

செங்கோண $\triangle CAB$-ல்,

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{AB}.$$

எனவே, $AB = BC$ அதாவது, $x = h$ ஆகும். (1)

மேலும், செங்கோண $\triangle DAB$-ல்,

$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB}$$

$$\implies AB = \frac{h+10}{\tan 60^\circ} \implies x = \frac{h+10}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து, $h = \dfrac{h+10}{\sqrt{3}}$

$$\implies \sqrt{3}h - h = 10$$

$$\implies h = \left(\frac{10}{\sqrt{3}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{3-1}$$

$$= 5(2.732) = 13.66 \text{ மீ}$$

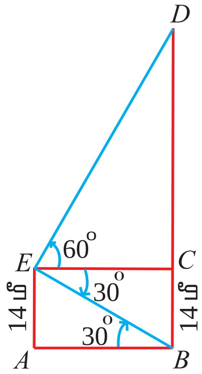
எனவே, கட்டடத்தின் உயரம் 13.66 மீ .

எடுத்துக்காட்டு 7.25

ஒருவர் கடல்மட்டத்திலிருந்து 14 மீ உயரமுள்ள உள்ள ஒரு கப்பலின் மேல் தளத்தில் நின்றுக் கொண்டு செங்குத்தான ஒரு பாறை முகட்டின் உச்சியினை 60° ஏற்றக் கோணத்திலும் அதன் அடியினை 30° இறக்கக் கோணத்திலும் காண்கிறார் எனில், செங்குத்தான பாறையின் உயரம் யாது?

www.tntextbooks.in

தீர்வு BD என்பது செங்குத்தான பாறையின் உயரம் என்க. A என்பது கப்பலின் அடி என்க. கப்பலின் மேல் தளத்தில் E என்னும் புள்ளியிலிருந்து பாறை பார்க்கப்படுகிறது என்க. $AE = 14$ மீ. AB-க்கு இணையாக $AB = EC$ என்றவாறு EC-ஐ வரைக.



படம் 7.18

கொடுக்கப்பட்டவை: $\angle ABE = 30^\circ, \angle DEC = 60^\circ$ மற்றும் $AE = 14$ மீ.

செங்கோண $\triangle ABE$ -ல், $\tan 30^\circ = \frac{AE}{AB}$

$$\therefore \quad AB = \frac{AE}{\tan 30^\circ} \implies AB = 14\sqrt{3}$$

எனவே, $EC = 14\sqrt{3}$ $\quad (\because AB = EC)$

செங்கோண $\triangle DEC$ -யில், $\tan 60^\circ = \frac{CD}{EC}$

$$\therefore \quad CD = EC \tan 60^\circ \implies CD = (14\sqrt{3})\sqrt{3} = 42 \text{ மீ}$$

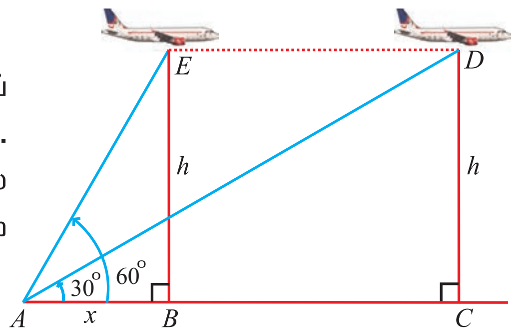
ஆகவே, பாறையின் உயரம் $BD = BC + CD = 14 + 42 = 56$ மீ.

எடுத்துக்காட்டு 7.26

கிடைநிலையில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு ஆகாய விமானத்தை A என்னும் புள்ளியிலிருந்து பார்க்கும்போது அதன் ஏற்றக் கோணம் 60°. அவ்விமானம் கிடைநிலையில் 15 வினாடிகள் பறந்த பின் அதேப் புள்ளியிலிருந்து அந்த ஆகாய விமானத்தின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆக மாறுகிறது. இவ்விமானம் 200 மீ/வி வேகத்தில் பறந்து கொண்டிருந்தால், விமானம் பறந்து கொண்டிருக்கும் மாறாத கிடைநிலை உயரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

A என்னும் புள்ளியிலிருந்து ஆகாய விமானத்தைப் பார்ப்பதாகக் கொள்வோம். அதன் ஆரம்பநிலை E என்க. 15 வினாடிகளுக்குப் பின் ஆகாய விமானத்தின் நிலை D என்க. BE மற்றும் CD என்பன ஆகாய விமானம் பறக்கும் மாறாத உயரம் என்க.



படம் 7.19

$\angle DAC = 30^\circ$ மற்றும் $\angle EAB = 60^\circ$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$BE = CD = h$ மீ என்க.

$AB = x$ மீ என்க.

15 வினாடிகளில் விமானம் சென்ற தூரம்,

$$ED = 200 \times 15 = 3000 \text{ மீ} \qquad (\text{தூரம்} = \text{வேகம்} \times \text{காலம்})$$

அதாவது, $BC = 3000$ மீ.

செங்கோண $\triangle DAC$ -ல்,

$$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\implies \quad CD = AC \tan 30^\circ$$

www.tntextbooks.in

அதாவது, $h = (x + 3000)\frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

செங்கோண $\triangle EAB$ -ல்,

$$\tan 60^\circ = \frac{BE}{AB}$$

$$\Longrightarrow \quad BE = AB \tan 60^\circ \Longrightarrow h = \sqrt{3}\, x \quad (2)$$

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து $\sqrt{3}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 3000)$

$\Longrightarrow \quad 3x = x + 3000 \quad \Longrightarrow \quad x = 1500$ மீ.

(2)-லிருந்து $h = 1500\sqrt{3}$ மீ.

ஆகாய விமானம் பறக்கும் மாறாத கிடைநிலை உயரம் = $1500\sqrt{3}$ மீ.

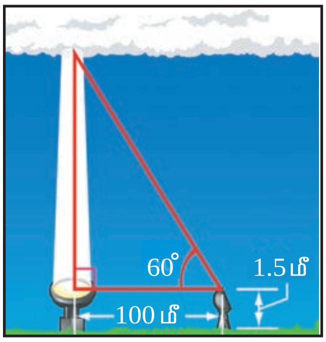
பயிற்சி 7.2

1. ஒரு சுமை ஊர்தியிலிருந்து (truck) சுமையை இறக்க ஏதுவாக 30° ஏற்றக் கோணத்தில் ஒரு சாய்வுத் தளம் (ramp) உள்ளது. சாய்வுத் தளத்தின், உச்சி தரையிலிருந்து 0.9 மீ உயரத்தில் உள்ளது எனில், சாய்வுத் தளத்தின் நீளம் யாது?

2. உயரம் 150 செ.மீ உள்ள ஒரு சிறுமி ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் முன் நின்றவாறு $150\sqrt{3}$ செ.மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறாள் எனில், விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணத்தைக் காண்க.

3. A மற்றும் B என்ற பூச்சிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 2 மீ இருக்கும் வரையில், ஒன்று எழுப்பும் ஒலியை மற்றது கேட்க இயலும். சுவற்றிலிருந்து 1 மீ தூரத்தில் தரையிலுள்ள பூச்சி A ஆனது ஒரு சிலந்தியால் உண்ணப்படும் நிலையில் உள்ள பூச்சி B-யை சுவற்றில் காண்கிறது. A-யிலிருந்து B-க்கு ஏற்றக் கோணம் 30° ஆக இருக்கும்போது A ஆனது B-க்கு எச்சரிக்கை ஒலி விடுத்தால், சிலந்திக்கு இரை கிடைக்குமா அல்லது கிடைக்காதா? (A-யின் எச்சரிக்கை ஒலியை B கேட்கும்போது அது தப்பிவிடும் எனக் கொள்க)

4. இரவு நேரத்தில் ஒருவர் அடர் மேகமூட்டத் தளத்தினைக் (cloud ceiling) காண பிரகாசமான ஒரு விளக்கின் ஒளியினை மேகத்தை நோக்கி செங்குத்தாகச் செலுத்துகிறார். அவ்விளக்கிலிருந்து 100மீ தூரத்தில், தரையிலிருந்து 1.5மீ உயரத்தில் பொருத்தப்பட்ட தியோடலைட் (Theodolite) மூலம் மேகமூட்டத்தைப் பார்க்கும்போது ஏற்றக்கோணம் 60° எனில், அடர் மேகமூட்டத் தளம் எவ்வளவு உயரத்தில் உள்ளது? (படம் 7.20).



படம் 7.20

(குறிப்பு: அடர் மேகமூட்டத் தளம் என்பது மிகக் குறைந்த உயரத்தில் நிலவக்கூடிய அடர் மேகமூட்டமாகும். ஆகாய விமானம் பாதுகாப்பாக மேலே உயரவும், தரை இறங்கவும் போதுமான உயரத்தில் அடர் மேகமூட்டத்தளம் அமைய வேண்டும். இரவில் விளக்கின் ஒளியினைச் செங்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செலுத்தி அடர் மேகமூட்டத் தளத்தினை ஒளிரச் செய்து தளத்தின் உயரத்தை காண்கிறார்கள்).

5. 40 செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு ஊசலானது (pendulum), ஒரு முழு அலைவின் போது, அதன் உச்சியில் 60° கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அந்த அலைவில், ஊசல் குண்டின் துவக்க நிலைக்கும், இறுதி நிலைக்கும் இடையே உள்ள மிகக் குறைந்த தூரத்தைக் காண்க.

6. ஒன்றுக்கொன்று நேரெதிராக உள்ள இரு மரங்களின் மீது A, B என்ற இரு காக்கைகள் 15 மீ மற்றும் 10 மீ உயரங்களில் அமர்ந்துக் கொண்டிருந்தன. அவை தரையிலிருக்கும் ஒரு வடையினை முறையே 45° மற்றும் 60° இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கின்றன. அவை ஒரே நேரத்தில் கிளம்பிக் குறைவான நீளமுள்ளப் பாதையில் சமவேகத்தில் பறந்து, அவ்வடையை எடுக்க முயற்சித்தால் எந்த பறவை வெற்றி பெறும்? (இரு மரங்களின் அடி, வடை ஆகியன ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளன)

7. வட்ட வடிவில் உள்ள ஒரு பூங்காவின் மையத்தில் ஒரு விளக்குக் கம்பம் நிற்கிறது. வட்டப் பரிதியில் அமைந்த P, Q என்னும் இரு புள்ளிகள் விளக்குக் கம்பத்தினடியில் 90° கோணத்தை ஏற்படுத்துகின்றன. மேலும், P-யிலிருந்து விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆகும். $PQ = 30$ மீ எனில், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

8. 700 மீ உயரத்தில் பறந்துக் கொண்டிருக்கும் ஒரு ஹெலிகாப்டரிலிருந்து ஒருவர் ஓர் ஆற்றின் இரு கரைகளில் நேரெதிராக உள்ள இரு பொருட்களை 30°, 45° இறக்கக் கோணங்களில் காண்கிறார் எனில், ஆற்றின் அகலத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

9. சமதளத்தில் நின்று கொண்டிருக்கும் X என்பவர், அவரிடமிருந்து 100 மீ தூரத்தில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு பறவையினை 30° ஏற்றக் கோணத்தில் பார்க்கிறார். அதே நேரத்தில், Y என்பவர் 20 மீ உயரமுள்ள ஒரு கட்டடத்தின் உச்சியில் நின்று கொண்டு அதே பறவையை 45° ஏற்றக் கோணத்தில் பார்க்கிறார். இருவரும் நின்று கொண்டு அவர்களுக்கிடையேயுள்ள பறவையை எதிரெதிராகப் பார்க்கின்றனர் எனில், Y-யிலிருந்து பறவை உள்ள தூரத்தைக் காண்க.

10. வகுப்பறையில் அமர்ந்துக் கொண்டிருக்கும் ஒரு மாணவன் கரும்பலகையில் கிடைநிலைப் பார்வைக் கோட்டிலிருந்து 1.5 மீ உயரத்தில் உள்ள ஓவியத்தை 30° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறான். ஓவியம் அவனுக்குத் தெளிவாகத் தெரியாததால் நேராகக் கரும்பலகையை நோக்கி நகர்ந்து மீண்டும் அந்த ஓவியத்தை 45° ஏற்றக் கோணத்தில் தெளிவாகக் காண்கிறான் எனில், அவன் நகர்ந்த தூரத்தைக் காண்க.

11. ஒரு சிறுவன் 30 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்திற்கு எதிரே குறிப்பிட்ட தூரத்தில் நிற்கிறான். அவனுடையக் கிடைநிலைப் பார்வைக்கோடு தரைமட்டத்திலிருந்து 1.5மீ உயரத்தில் உள்ளது. அவன் கட்டடத்தை நோக்கி நடந்து செல்லும் போது, அக்கட்டடத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 30°-லிருந்து 60° ஆக உயர்கிறது. அவன் கட்டடத்தை நோக்கி நடந்து சென்றத் தூரத்தைக் காண்க.

12. 200 அடி உயரமுள்ள கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து, அதன் காப்பாளர் ஒரு தோணி மற்றும் ஒரு படகு ஆகியவற்றை பார்க்கிறார். கலங்கரை விளக்கத்தின் அடி, தோணி மற்றும் ஒரு படகு ஆகியன ஒரே திசையில் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைகின்றன. தோணி, படகு ஆகியவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 45° மற்றும் 30° என்க. இவ்விரண்டும் பாதுகாப்பாக இருக்க வேண்டுமெனில், அவைகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் குறைந்தது 300 அடியாக இருக்க வேண்டும். இடைவெளி குறைந்தால் காப்பாளர் எச்சரிக்கை ஒலி எழுப்ப வேண்டும். அவர் எச்சரிக்கை ஒலி எழுப்ப வேண்டுமா?

13. தரையில் நின்றுகொண்டிருக்கும் ஒரு சிறுவன் காற்றில், கிடைநிலைக் கோட்டில் மாறாத உயரத்தில் நகர்ந்துக் கொண்டிருக்கும் ஒரு பலூனைக் காண்கிறான். ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் சிறுவன் 60° ஏற்றக் கோணத்தில் பலூனைக் காண்கிறான். 2 நிமிடங்கள் கழிந்த பின்னர் அதே நிலையிலிருந்து சிறுவன் மீண்டும் பலூனைப் பார்க்கும்போது ஏற்றக்கோணம் 30° ஆகக் குறைகிறது. காற்றின் வேகம் $29\sqrt{3}$ மீ/நிமிடம் எனில், தரையிலிருந்து பலூனின் உயரம் காண்க.

14. ஒரு நேரான நெடுஞ்சாலை ஒரு கோபுரத்தை நோக்கிச் செல்கிறது. கோபுரத்தின் உச்சியில் நின்றுக் கொண்டிருக்கும் ஒருவர் சீரான வேகத்தில் வந்துக்கொண்டிருக்கும் ஒரு ஊர்தியை 30° இறக்கக் கோணத்தில் காண்கிறார். 6 நிமிடங்கள் கழிந்த பின்னர் அந்த ஊர்தியின் இறக்கக் கோணம் 60°எனில், கோபுரத்தை அடைய ஊர்தி மேலும் எத்தனை நிமிடங்கள் எடுத்துக் கொள்ளும்?

15. ஒரு செயற்கைக் கோளுக்கு ஒரே திசையில் பூமியில் அமைந்துள்ள இரு கட்டுப்பாட்டு நிலையங்களிலிருந்து அச்செயற்கைக் கோளின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 60° என உள்ளன. அவ்விரு நிலையங்கள், செயற்கைக்கோள் ஆகிய இவை மூன்றும் ஒரே செங்குத்துத் தளத்தில் அமைகின்றன. இரு நிலையங்களுக்கும் இடையே உள்ள தூரம் 4000 கி.மீ எனில், செயற்கைக்கோளுக்கும், பூமிக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தைக் காண்க. ($\sqrt{3} = 1.732$)

16. 60மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்திலிருந்து ஒரு கட்டடத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 60° எனில், கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

17. 40 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றிலிருந்து ஒரு கலங்கரை விளக்கின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே 30°மற்றும் 60° எனில், கலங்கரை விளக்கின் உயரத்தைக் காண்க. கலங்கரை விளக்கின் உச்சியிலிருந்து கோபுரத்தின் அடிக்கு உள்ள தூரத்தையும் காண்க.

18. ஒரு ஏரியின் மேற்பரப்பில் ஒரு புள்ளியிலிருந்து காணும்போது, 45 மீ உயரத்தில் பறந்து கொண்டிருக்கும் ஒரு ஹெலிகாப்டரின் ஏற்றக் கோணம் 30° ஆக உள்ளது. அப்புள்ளியிலிருந்து அதே நேரத்தில் தண்ணீரில் ஹெலிகாப்டரின் நிழலின் இறக்கக் கோணம் 60° எனில், ஹெலிகாப்டருக்கும் ஏரியின் மேற்பரப்பிற்கும் இடைப்பட்டத் தூரத்தைக் காண்க.

பயிற்சி 7.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. $(1-\sin^2\theta)\sec^2\theta =$

   (A) 0 (B) 1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta$

2. $(1+\tan^2\theta)\sin^2\theta =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) $\cos^2\theta$ (C) $\tan^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

3. $(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) =$

   (A) $\sin^2\theta$ (B) 0 (C) 1 (D) $\tan^2\theta$

4. $\sin(90^\circ-\theta)\cos\theta+\cos(90^\circ-\theta)\sin\theta =$

   (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) –1

5. $1-\frac{\sin^2\theta}{1+\cos\theta}=$

(A) $\cos\theta$ (B) $\tan\theta$

(C) $\cot\theta$ (D) $\operatorname{cosec}\theta$

6. $\cos^4 x-\sin^4 x=$

(A) $2\sin^2 x-1$ (B) $2\cos^2 x-1$

(C) $1+2\sin^2 x$ (D) $1-2\cos^2 x$.

7. $\tan\theta=\frac{a}{x}$ எனில், $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ -ன் மதிப்பு

(A) $\cos\theta$ (B) $\sin\theta$

(C) $\operatorname{cosec}\theta$ (D) $\sec\theta$

8. $x=a\sec\theta,\ y=b\tan\theta$ எனில், $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ -ன் மதிப்பு

(A) 1 (B) –1 (C) $\tan^2\theta$ (D) $\operatorname{cosec}^2\theta$

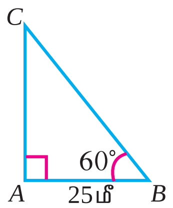
9. $\frac{\sec\theta}{\cot\theta+\tan\theta}=$

(A) $\cot\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\sin\theta$ (D) $-\cot\theta$

10. $\frac{\sin(90^\circ-\theta)\sin\theta}{\tan\theta}+\frac{\cos(90^\circ-\theta)\cos\theta}{\cot\theta}=$

(A) $\tan\theta$ (B) 1 (C) –1 (D) $\sin\theta$

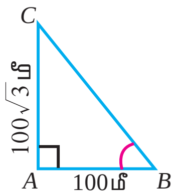
11. படத்தில், $AC=$



(A) 25 மீ (B) $25\sqrt{3}$ மீ

(C) $\frac{25}{\sqrt{3}}$ மீ (D) $25\sqrt{2}$ மீ

12. படத்தில் $\angle ABC=$



(A) 45° (B) 30°

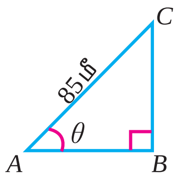
(C) 60° (D) 50°

13. ஒரு கோபுரத்திலிருந்து 28.5 மீ தூரத்தில் நின்று கொண்டிருக்கும் ஒருவர் கோபுரத்தின் உச்சியை 45° ஏற்றக் கோணத்தில் காண்கிறார். அவருடைய கிடைநிலைப் பார்வைக் கோடு தரையிலிருந்து 1.5 மீ உயரத்தில் உள்ளது எனில், கோபுரத்தின் உயரம்

(A) 30மீ (B) 27.5மீ

(C) 28.5மீ (D) 27மீ

14. படத்தில், $\sin\theta = \frac{15}{17}$ எனில், $BC =$



(A) 85 மீ (B) 65 மீ

(C) 95 மீ (D) 75 மீ

15. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) =$

(A) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ (D) 0

16. $(1+\cot^2\theta)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) =$

(A) $\tan^2\theta - \sec^2\theta$ (B) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

(C) $\sec^2\theta - \tan^2\theta$ (D) $\cos^2\theta - \sin^2\theta$

17. $(\cos^2\theta - 1)(\cot^2\theta + 1) + 1 =$

(A) 1 (B) –1 (C) 2 (D) 0

18. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta} =$

(A) $\cos^2\theta$ (B) $\tan^2\theta$ (C) $\sin^2\theta$ (D) $\cot^2\theta$

19. $\sin^2\theta + \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} =$

(A) $\text{cosec}^2\theta + \cot^2\theta$ (B) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta$

(C) $\cot^2\theta - \text{cosec}^2\theta$ (D) $\sin^2\theta - \cos^2\theta$

20. $9\tan^2\theta - 9\sec^2\theta =$

(A) 1 (B) 0 (C) 9 (D) –9

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

பால் எர்டோஸ் (Paul Erdos) (மார்ச் 26, 1913 – செப்டம்பர் 20, 1996) என்பவர் ஹங்கேரி நாட்டைச் சேர்ந்த கணிதவியல் அறிஞர் ஆவார். கணிதவியல் வரலாற்றில் அதிக எண்ணிக்கையில் ஆய்வுக் கட்டுரைகளை வெளியிட்ட அறிஞர் பெருமக்களில் முதன்மையானவராக இவர் கருதப்படுகிறார். இந்த வகையில் கணித மேதை லியோனார்டு ஆய்லர் (Leanhard Euler) என்பவர் மட்டுமே இவருடன் ஒப்பிடத்தக்கவர். எர்டோஸ் 1475 ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளையும், லியோனார்டு ஆய்லர் 800 ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளையும் கணிதத்தில் எழுதியுள்ளனர். எர்டோஸ் தன் வாழ்நாளில் 511 கணிதவியல் அறிஞர்களோடு சேர்ந்து ஆய்வு செய்துள்ளார். மேலும், கணிதத்தில் ஆய்வு செய்வதை ஒரு சமூக சேவையாகக் கருதினார்.

www.tntextbooks.in

8

அளவியல்

Measure what is measurable, and make measurable what is not so

-Galileo Galilei

- முன்னுரை
- வளைபரப்பு மற்றும் கன அளவு
  - ❖ உருளை
  - ❖ கூம்பு
  - ❖ கோளம்
- இணைந்த கன உருவங்கள் மற்றும் மாறா கனஅளவுகள்

ஆர்க்கிமெடிஸ்
(Archimedes)
(287 கி.மு. - 212 கி.மு.)
கிரீஸ்

பண்டைக்கால கணிதவியல் அறிஞர்களில் புகழ் மிக்க கணித மேதையாக ஆர்க்கிமெடிஸ் கருதப் படுகிறார்.

வடிவியலில் தளவடிவங்கள், அவற்றின் பரப்பு மற்றும் முப்பரிமாண திண்மப் பொருட்களின் புறப்பரப்புகள் மற்றும் கனஅளவுகள் தொடர்பாக அவர் குறிப்பிடத்தக்க வகையில் பங்காற்றியுள்ளார்.

8.1 அறிமுகம்

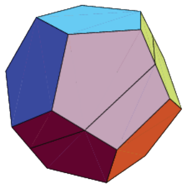
நேர்கோட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள், தள வடிவங்களின் சுற்றளவுகள் மற்றும் பரப்புகள், திண்மப்பொருட்களின் வளைபரப்புகள் மற்றும் கன அளவுகள் ஆகியனவற்றைப் பற்றி விவரிக்கும் வடிவியலின் ஒரு பகுதியை அளவியல் (Mensuration) என்கிறோம். அன்றாட வாழ்வில் பல நிலைகளிலும் அளவியல் பயன்படுவதால் பொருட்களின் அளவுகளைப் பற்றி கற்பது மிகவும் அவசியமாகிறது. அடிப்படை வடிவியலில் தளம், பன்முகப் புறப்பரப்புகள் மற்றும் திண்ம உருவங்களின் (எ.கா. கோளங்களின்) வளைபரப்புகள் மற்றும் அவைகளின் கன அளவுகள் ஆகியனவற்றை கருத்தில் கொள்கிறோம்.

புறப்பரப்பிற்கும் கனஅளவிற்கும் உள்ள விகிதம் ஆனது நானோ அறிவியலின் (Nano Science) முக்கிய கோட்பாடுகளில் ஒன்றாக கருதப்படுகிறது. ஏனெனில், அவ்விகிதம் நானோ அறிவியலின் அளவு மற்றும் தொழில் நுணுக்கத்தை பயன்படுத்தும் அளவு சார்ந்த பண்புகளை அறிந்து கொள்ள அடிப்படையாய் அமைகிறது.

நாம் இந்த அத்தியாயத்தில் உருளை, கூம்பு, கோளம் மற்றும் இணைந்த கன உருவங்களின் புறப்பரப்புகள் மற்றும் கனஅளவுகள் ஆகியனவற்றை எவ்வாறு காண்பது எனக் கற்க உள்ளோம்.

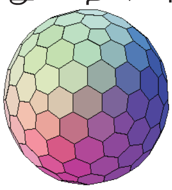
8.2 புறப்பரப்பு அல்லது மேற்பரப்பு (Surface Area)

சிசிலியில் சிராகஸ் நகரத்தைச் சார்ந்த மிகச்சிறந்த கணிதவியல் அறிஞரான ஆர்க்கிமெடிஸ் (Archimedes) என்பவர் உருளை ஒன்றினுள் அனைத்து புறங்களையும் தொடுமாறு மிகச் சரியாக உள்ளடக்கிய கோளத்தின் கனஅளவானது, அந்த சுற்று உருளையின் கனஅளவில் மூன்றில் இரண்டு பங்காக இருக்குமென நிரூபித்தார். இதனை தன்னுடைய மிகச் சிறந்த சாதனை எனக் கருதினார். அவர் நிறைவு செய்யும் முறையை பயன்படுத்தி ஒரு பரவளைய வில்லின் கீழ் அமைந்த பகுதியின் பரப்பைக் கண்டறிந்தார்.



படம் 8.1

ஒரு திண்ம உருவத்தின் புறப்பரப்பு அல்லது மேற்பரப்பு என்பது அதனுடைய வெளிப்புறப் பரப்பு ஆகும். ஆகவே, ஒரு முப்பரிமாணப் பொருளின் வெளிப்பக்கப் பரப்புகள் சேர்ந்து கிடைப்பது அதன் புறப்பரப்பு ஆகும். சில கன உருவங்களின் புறப்பரப்பினை அருகில் உள்ள படங்கள் 8.1 மற்றும் 8.2 ஆகியன விளக்குகின்றன.

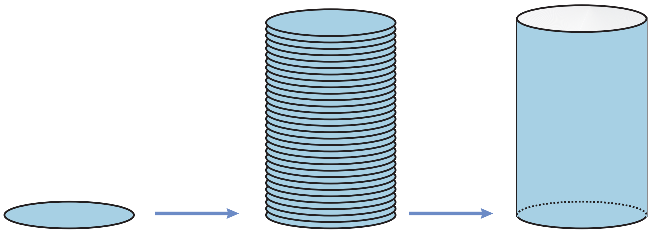


படம் 8.2

www.tntextbooks.in

8.2.1 நேர் வட்ட உருளை (Right Circular Cylinder)

ஒரே வடிவம் மற்றும் ஒரே அளவைக் கொண்ட வட்டவடிவ தாட்களையோ அல்லது அட்டைகளையோ ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையில் எடுத்துக் கொண்டு செங்குத்தாக ஒன்றின்மீது ஒன்று சரியாக பொருந்தும்படி அடுக்கும் போது கிடைக்கும் கனஉருவம் நேர்வட்ட உருளை எனப்படும். இவற்றை வட்டவடிவ அடிப்பக்கத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட வேண்டும் என்பதை நினைவில் கொள்க. (பார்க்க படம் 8.3)



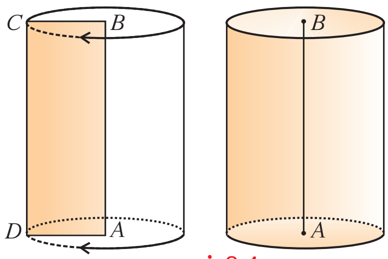
படம் 8.3

வரையறை

ஒரு செவ்வகத்தை அதன் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு ஒரு முழுச்சுற்று சுழற்றும்போது உண்டாகும் திண்ம உருவம் நேர் வட்ட உருளை எனப்படும்.

செய்துபார்

$ABCD$ ஒரு செவ்வகம் என்க. இச் செவ்வகமானது AB என்ற பக்கத்தைப் பொருத்து ஒரு முழுச்சுற்று சுழற்றப்படுவதாக கருதுவோம் இச்சுழற்சியானது படத்தில் காட்டியது போன்ற ஓர் நேர்வட்ட உருளையை உருவாக்குகிறது. இங்கு AB என்பது உருளையின் அச்சு எனப்படும். AB-ன் நீளம் உருளையின் நீளம் (உயரம்) எனவும் $AD(= BC)$-ன் நீளம் உருளையின் ஆரம் எனவும் அழைக்கப்படும்.



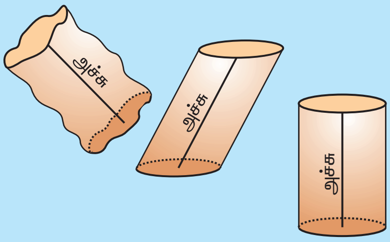
படம் 8.4

குறிப்பு

(i) உருளையின் அடிப்பாகம் வட்டவடிவில் இல்லையெனில், அது சாய்வு உருளை (Oblique cylinder) எனப்படும்.

(ii) உருளையின் அச்சானது அதன் வட்டவடிவ அடிப்பாகத்திற்கு செங்குத்தாக இல்லையெனில், அது வட்ட உருளை (Circular cylinder) எனப்படும்.

(iii) உருளையின் அச்சானது அதன் வட்ட வடிவ அடிப்பாகத்திற்கு செங்குத்தாக இருப்பின் அது நேர்வட்ட உருளை (Right circular cylinder) எனப்படும்.



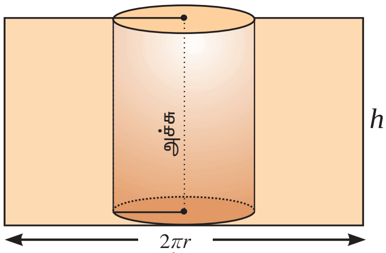
படம் 8.5

(i) நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு (Curved Surface area of a right circular cylinder)

அருகிலுள்ள படத்தில், நேர்வட்ட உருளையின் அடி மற்றும் உச்சியிலமைந்த ஒரே அளவான வட்டப் பகுதிகள் ஒன்றுக்கொன்று இணையாக உள்ளன. மேலும், உருளையின் நேர்க்குத்து மேற்பரப்பு வளைவாக உள்ளதால், அதன் பரப்பு உருளையின் வளைபரப்பு (lateral surface area or curved surface area (CSA)) அல்லது புறப்பரப்பு எனப்படும்.

உருளையின் வளைபரப்பு = அடிச்சுற்றளவு $\times$ உயரம்

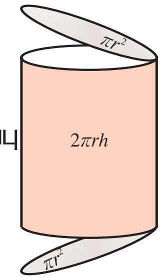
$$\text{CSA} = 2\pi r \times h = 2\pi rh \text{ ச. அலகுகள்.}$$



படம் 8.6

(ii) திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

(Total surface area of a solid right circular cylinder)



படம் 8.7

மொத்தப் புறப்பரப்பு (TSA) = வளைபரப்பு + அடிப்பக்கப் பரப்பு + மேல் பக்கப் பரப்பு

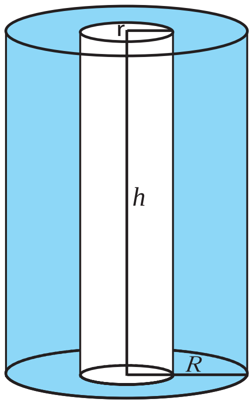
= வளைபரப்பு + 2 (அடிப்பக்கப் பரப்பு)

$= 2\pi rh + 2\times\pi r^2$

ஆகவே, மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi r(h+r)$ ச. அலகுகள்.

(iii) நேர்வட்ட உள்ளீடற்ற உருளை (Right circular hollow cylinder)

இரும்புக் குழாய், இரப்பர்குழாய் போன்ற திண்ம உருவங்கள் உள்ளீடற்ற நேர்வட்ட உருளை வடிவில் உள்ளன. h உயரம் கொண்ட உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளி ஆரம் மற்றும் உள் ஆரம் முறையே R மற்றும் r என்க.



படம் 8.8

இதன் வளைபரப்பு = வெளிப்புற வளைபரப்பு + உட்புற வளைபரப்பு

$= 2\pi Rh + 2\pi rh$

ஆகவே, வளைபரப்பு $= 2\pi h(R+r)$ ச.அலகுகள்

மொத்தப் புறப்பரப்பு = வளைபரப்பு + 2 × அடிப்பக்கப் பரப்பு

$= 2\pi h(R+r) + 2\times[\pi R^2 - \pi r^2]$

$= 2\pi h(R+r) + 2\pi(R+r)(R-r)$

எனவே, உள்ளீடற்ற உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$= 2\pi(R+r)(R-r+h)$ ச. அலகுகள்

மேலும், உள்ளீடற்ற உருளையின் தடிமன், $w = R-r$ ஆகும்.

குறிப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் தேவைப்படும்போது π -ன் தோராய மதிப்பாக $\frac{22}{7}$ எனக் கொள்வோம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.1

ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் (solid right circular cylinder) ஆரம் 7செமீ மற்றும் உயரம் 20 செமீ எனில், அதன் (i) வளைபரப்பு (ii) மொத்தப் புறப்பரப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க).

தீர்வு r மற்றும் h என்பன முறையே நேர்வட்ட திண்ம உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

இங்கு, $r = 7$ செ.மீ, $h = 20$ செ.மீ

தற்போது, வளைபரப்பு $= 2\pi rh$

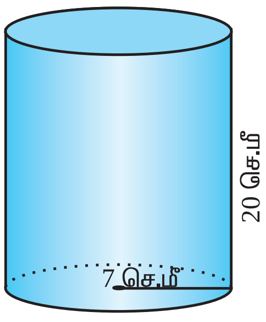
$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 20$

நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு = 880 ச.செ.மீ

மேலும், மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi r(h+r)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times[20+7] = 44\times 27$

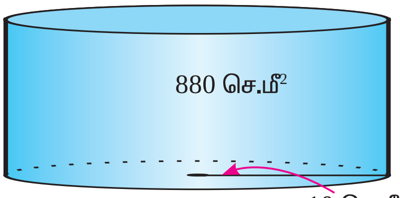
எனவே, மொத்தப் புறப்பரப்பு = 1188 ச. செ.மீ.



படம் 8.9

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 8.2



படம் 8.10

ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 880ச.செ.மீ மற்றும் அதன் ஆரம் 10செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் வளைபரப்பைக் காண்க ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க).

தீர்வு r மற்றும் h என்பன முறையே திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க. S என்பது திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு என்க.

இங்கு, $r = 10$ செ.மீ. மேலும் $S = 880$ ச. செ.மீ

இப்போது, $S = 880 \implies 2\pi r[h + r] = 880$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times 10[h + 10] = 880$$

$$\implies h + 10 = \frac{880 \times 7}{2 \times 22 \times 10}$$

$$\implies h + 10 = 14$$

எனவே, உருளையின் உயரம், $h = 4$செ.மீ

மேலும் உருளையின் வளைபரப்பு,

$$2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 4 = \frac{1760}{7}$$

ஆகவே, உருளையின் வளைபரப்பு $= 251\frac{3}{7}$ச.செ.மீ.

மாற்று முறை :

வளைபரப்பு

= மொத்தப் புறப்பரப்பு – 2×அடிப்பக்கத்தின் பரப்பு

$= 880 - 2 \times \pi r^2$

$= 880 - 2 \times \frac{22}{7} \times 10^2$

$= \frac{1760}{7}$

$= 251\frac{3}{7}$ ச.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.3

ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் ஆரமும் உயரமும் 2 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அதன் வளைப்பரப்பு $\frac{3960}{7}$ ச.செ.மீ எனில், உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு: r மற்றும் h என்பன முறையே ஒரு திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

$$r : h = 2 : 5 \implies \frac{r}{h} = \frac{2}{5}. \text{ எனவே, } r = \frac{2}{5}h.$$

நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh$

$$\implies 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{2}{5} \times h \times h = \frac{3960}{7}$$

$$\implies h^2 = \frac{3960 \times 7 \times 5}{2 \times 22 \times 2 \times 7} = 225$$

$$h = 15 \implies r = \frac{2}{5}h = 6.$$

ஆகவே, உருளையின் உயரம் 15செ.மீ மற்றும் ஆரம் 6செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.4

120செ.மீ நீளமும், 84செ.மீ விட்டமும் கொண்ட ஒரு சாலையை சமப்படுத்தும் உருளையைக் (road roller) கொண்டு ஒரு விளையாட்டுத்திடல் சமப்படுத்தப்படுகிறது. விளையாட்டுத் திடலை சமப்படுத்த இவ்வுருளை 500 முழுச் சுற்றுக்கள் சுழல வேண்டும். விளையாட்டுத்திடலை சமப்படுத்த ஒரு ச. மீட்டருக்கு 75 பைசா வீதம், திடலைச் சமப்படுத்த ஆகும் செலவைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

www.tntextbooks.in

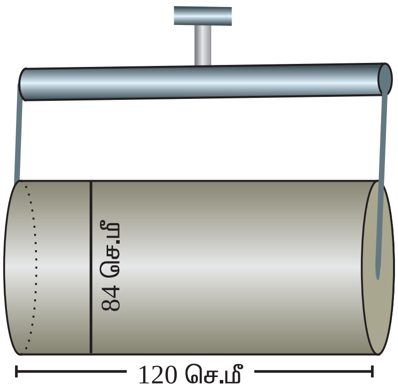
தீர்வு: சாலையை சமப்படுத்தும் உருளையின் ஆரம் $r = 42$ செ.மீ மற்றும் நீளம் $h = 120$ செ.மீ.

உருளையின் ஒரு முழுச்சுற்றினால் சமப்படுத்தப்படும் திடலின் பரப்பு } = உருளையின் வளைபரப்பு

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 42 \times 120$

$= 31680$ செ.மீ ^{2}.



படம் 8.11

500 முழுச் சுற்றுகளில் சமப்படுத்தப்படும் திடலின் பரப்பு } $= 31680 \times 500$

$= 15840000$ செ. மீ^{2}

$= \frac{15840000}{10000} = 1584$ மீ ^{2} (10,000 செ. மீ^{2} = 1 ச.மீ)

1 ச. மீட்டருக்கு சமப்படுத்த ஆகும் செலவு = ₹ $\frac{75}{100}$

எனவே, விளையாட்டுத்திடலை சமப்படுத்த ஆகும் மொத்தச் செலவு $= \frac{1584 \times 75}{100}$ = ₹ 1188.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

ஒரு உள்ளீடற்ற உருளையின் உள் மற்றும் வெளி ஆரங்கள் முறையே 12 செ.மீ. மற்றும் 18செ.மீ. என்க. மேலும் அதன் உயரம் 14செ.மீ எனில் அவ்வுருளையின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)

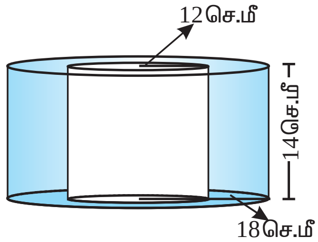
தீர்வு : r, R மற்றும் h என்பன முறையே உள்ளீடற்ற உருளையின் உள்ஆரம், வெளிஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

ஆகவே, $r = 12$ செ.மீ, $R = 18$ செ.மீ, $h = 14$ செ.மீ,

வளைபரப்பு $= 2\pi h(R+r)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times (18 + 12)$

$= 2640$ ச.செ.மீ



படம் 8.12

மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi(R + r)(R - r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (18 + 12)(18 - 12 + 14)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times 20 = \frac{26400}{7}$.

ஆகவே, மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 3771\frac{3}{7}$ ச.செ.மீ.

8.2.2 நேர் வட்டக் கூம்பு (Right circular cone)

பனிக்கூழ் (ice cream) நிரம்பிய கூம்பு வடிவ கூடு, கோயில் தேரின் உச்சிப்பகுதி, சர்க்கஸ் கோமாளியின் தொப்பி, மருதாணி வைக்கும் கூம்பு வடிவ கலன் (mehandi container) போன்ற திண்மங்களை அல்லது பொருட்களை நாம் அன்றாட வாழ்வில் பார்க்கிறோம். மேற்கண்ட கனஉருவங்கள் யாவும் அநேகமாக நேர்வட்டக் கூம்பு வடிவில் உள்ளன.

www.tntextbooks.in

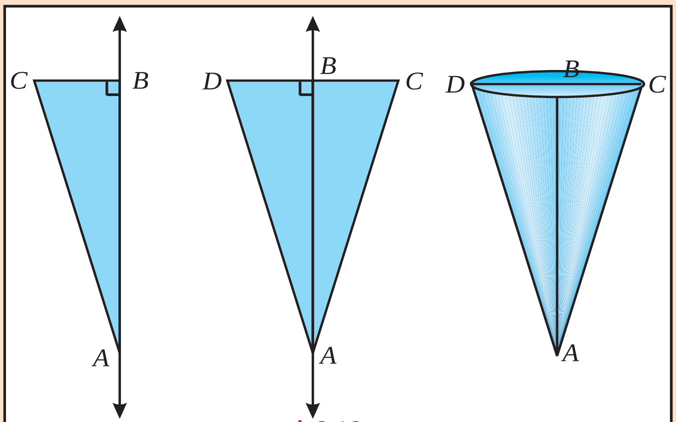
ஒரு திண்மப் பொருளின் அடிப்பாகம் சமதள வட்டப்பகுதியாக இருந்து, அப்பகுதியின் பரப்பு சீராகவும் சாய்வாகவும் குறைந்து கொண்டே வரும்போது இறுதியில் ஒரு புள்ளியில் முடியுமானால், அப்புள்ளி உச்சி எனவும் அத்திண்மப் பொருள் கூம்பு எனவும் அழைக்கப்படும். நேர்வட்டக் கூம்பு எனக் கூறும்போது கூம்பின் அடிப்பகுதி வட்ட வடிவில் உள்ளது எனவும், நேர் என்பது வட்ட வடிவிலான அடிப்பக்கத்தின் மையத்தின் வழியேச் செல்லும் அச்சு, அடிப்பக்கத் தளத்திற்கு செங்குத்தாக உள்ளது எனவும் பொருள்படும். இப்பாடப் பகுதியில், நேர்வட்டக் கூம்பை வரையறுத்து அதன் புறப்பரப்பைக் காண்போம். கீழ்க்காணும் செயல்மூலம் ஒருவர் கூம்பினை நேரடியாக செய்து பார்க்கலாம்.

செய்துபார்

B-ல் செங்கோணமுடைய ஒரு செங்கோண $\triangle ABC$-ஐ தடித்த ஒரு தாளிலிருந்து வெட்டியெடுக்கவும். ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான பக்கங்களில் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தில் கெட்டியான நூலை ஒட்டுக. நூலை கையில் பிடித்துக் கொண்டு நூலை அச்சாகக் கொண்டு முக்கோணத்தை ஏதேனும் ஒரு திசையில் சுழற்றுக.

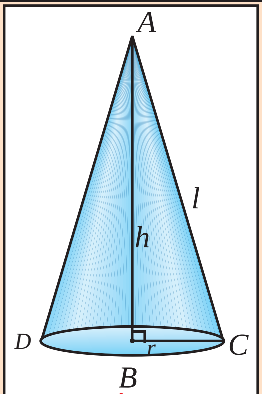
என்ன நிகழ்கிறது? இம்முக் கோணத்தை சுழற்றுவதால் ஏற்படும் உருவத்தை காண முடிகிறதா? இவ்வாறு சுழற்றும்போது உருவாகும் உருவம் ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு ஆகும்.

செங்கோண $\triangle ABC$ ஆனது, செங்கோணத்தை உள்ளடக்கிய AB என்ற பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு 360° சுழலும் போது ஏற்படும் கனஉருவம் நேர் வட்டக் கூம்பு எனப்படும்.



படம் 8.13

இங்கு AB-ன் நீளத்தை கூம்பின் உயரம் (h) எனவும் BC-ன் நீளத்தை கூம்பின் ஆரம் (r) எனவும் AC-ன் நீளத்தை கூம்பின் சாயுயரம் l எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. படத்திலிருந்து ($BC = BD = r$) மற்றும் ($AD = AC = l$) எனவும் அறியலாம்.



படம் 8.14

செங்கோண $\triangle ABC$-ல்

சாயுயரம், $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ (பிதாகரஸ் தேற்றப்படி)

செங்குத்துயரம், $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

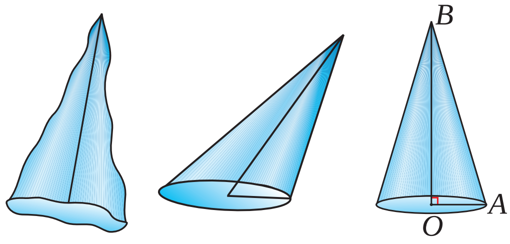
ஆரம், $r = \sqrt{l^2 - h^2}$ எனக் காணலாம்.

குறிப்பு

(i) கூம்பின் அடிப்பாகம் வட்டவடிவில் இல்லை எனில், அது சாய்வுக்கூம்பு (oblique cone) ஆகும்.

(ii) கூம்பின் அச்சானது அதன் வட்ட வடிவ அடிப்பாகத்திற்கு செங்குத்தாக இல்லை எனில், அது வட்டக் கூம்பு (circular cone) எனப்படும்.

(iii) கூம்பின் வட்ட வடிவ அடிப்பாகத்தின் மையத்திற்கு செங்குத்தாக உச்சி அமைந்தால் அது நேர் வட்டக் கூம்பு (right circular cone) எனப்படும்.



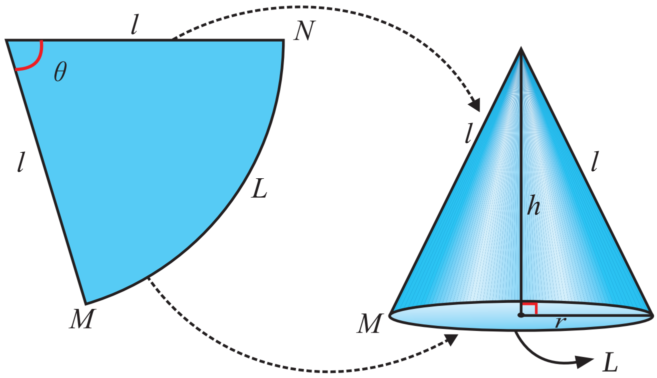
படம் 8.15

உள்ளீடற்றக் கூம்பின் வளைபரப்பு (Curved surface area of a hollow cone)

ஒரு வட்டக் கோணப்பகுதியின் ஆரம் l எனவும் அதன் மையக் கோணம் θ எனவும் கொள்க.

L என்பது வில்லின் நீளம் என்க. எனவே,

$$\frac{2\pi l}{L} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \implies L = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \quad (1)$$



படம் 8.16

இப்போது, நாம் வட்டக் கோணப்பகுதியின் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்து ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பினை பெறுவோம்.

வில்லின் நீளம் $L = 2\pi r$. இங்கு r என்பது கூம்பின் ஆரம்.

(1)-லிருந்து நாம் பெறுவது,

$$2\pi r = 2\pi l \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

$$\implies \quad r = l\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

$$\implies \quad \frac{r}{l} = \left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) \quad (2)$$

குறிப்புரை

ஒருவட்ட கோணப் பகுதியின் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்து கூம்பு உருவாக்கும்போது கீழ்க் காணும் மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றன.

வட்டகோணப்பகுதி	கூம்பு
ஆரம் (l) →	சாயுயரம் (l)
வில்லின் நீளம் (L) →	அடிச்சுற்றளவு $2\pi r$
பரப்பு →	வளைப்பரப்பு πrl

A என்பது வட்டக் கோணப்பகுதியின் பரப்பு எனில்,

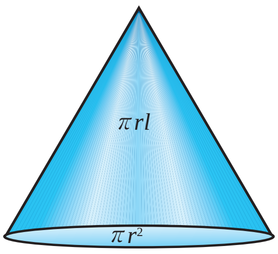
$$\frac{\pi l^2}{A} = \frac{360^\circ}{\theta^\circ} \implies A = \pi l^2\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right)$$

கூம்பின் வளைபரப்பு = வட்ட கோணப்பகுதியின் பரப்பு $= A$

எனவே, கூம்பின் வளைபரப்பு $A = \pi l^2\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ}\right) = \pi l^2\left(\frac{r}{l}\right)$. (சமன் (2)-லிருந்து)

ஆகவே, கூம்பின் வளைபரப்பு$= \pi rl$ ச. அலகுகள்.

(ii) திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு (Total surface area of a solid cone)



படம் 8.17

திண்மக் கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = { கூம்பின் வளைபரப்பு + வட்ட அடிப்பகுதியின் பரப்பு

$$= \pi rl + \pi r^2$$

திண்மக் கூம்பின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi r(l + r)$ ச. அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.6

ஒரு திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் சாயுயரம் முறையே 35செ.மீ மற்றும் 37செ.மீ. எனில் கூம்பின் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு r மற்றும் l என்பன முறையே நேர் வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் சாயுயரம் என்க.

எனவே, $r = 35$ செ.மீ, $l = 37$ செ.மீ

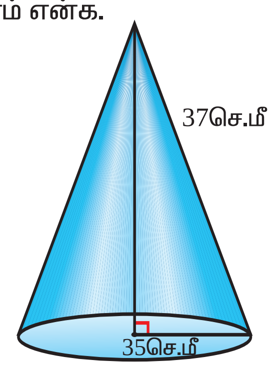
ஆகவே, வளைபரப்பு $= \pi rl = \pi(35)(37)$

$= 4070$ ச.செ.மீ

மேலும், மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \pi r[l + r]$

$= \frac{22}{7} \times 35 \times [37 + 35]$

ஆகவே, மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 7920$ ச.செ.மீ



படம் 8.18

எடுத்துக்காட்டு 8.7

O மற்றும் C என்பன முறையே ஒரு நேர்வட்டக்கூம்பின் அடிப்பகுதியின் மையம் மற்றும் உச்சி என்க. B என்பது அடிப்பகுதியின் வட்டச் சுற்று விளிம்பில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி என்க. கூம்பின் அடிப்பகுதியின் ஆரம் 6 செ.மீ மற்றும் $\angle OBC = 60^o$ எனில், கூம்பின் உயரம் மற்றும் வளைபரப்பைக் காண்க.

தீர்வு ஆரம் OB = 6 செ.மீ மற்றும் $\angle OBC = 60^o$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

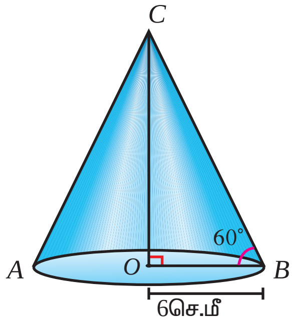
செங்கோண $\triangle OBC$-ல்

$$\cos 60^o = \frac{OB}{BC}$$

$$\Longrightarrow \quad BC = \frac{OB}{\cos 60^\circ}$$

$$\therefore \quad BC = \frac{6}{(\frac{1}{2})} = 12 \text{ செ.மீ}$$

எனவே, கூம்பின் சாயுயரம் $l = 12$ செ.மீ



படம் 8.19

மேலும், செங்கோண $\triangle OBC$-ல்

$$\tan 60^o = \frac{OC}{OB}$$

$$\Longrightarrow \quad OC = OB \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

ஆகவே, கூம்பின் உயரம் $OC = 6\sqrt{3}$ செ.மீ

எனவே, கூம்பின் வளைபரப்பு $\pi rl = \pi \times 6 \times 12 = 72\pi$ ச.செ.மீ.

(குறிப்பு $OC = 6\sqrt{3}$ -ஐ $OC^2 = BC^2 - OB^2$ லிருந்தும் பெறலாம்)

எடுத்துக்காட்டு 8.8

21 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டத்திலிருந்து 120° மையக் கோணம் கொண்ட ஒரு வட்டக் கோணப்பகுதியை வெட்டியெடுத்து, அதன் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்து ஒரு கூம்பாக்கினால், கிடைக்கும் கூம்பின் வளைபரப்பைக் காண்க $(\pi = \frac{22}{7})$.

தீர்வு கூம்பின் ஆரம் r என்க

வட்ட கோணப்பகுதியின் கோணம், $\theta = 120^\circ$

வட்ட கோணப்பகுதியின் ஆரம், $R = 21$ செ.மீ

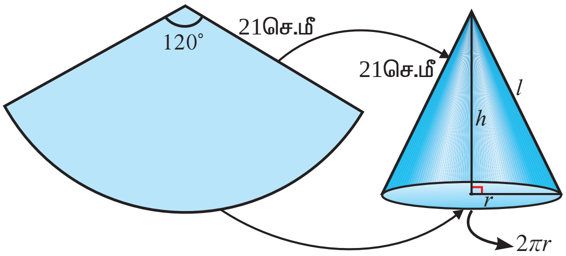
வட்டக்கோணப்பகுதியின் ஆரங்களை ஒன்றிணைத்து அதனை ஒரு கூம்பாக மாற்றலாம்.

எனவே, கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு = வட்டவில்லின் நீளம்

$$\Longrightarrow \quad 2\pi r = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times 2\pi R$$

$$\Longrightarrow \quad r = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times R$$

எனவே, கூம்பின் ஆரம் $r = \frac{120}{360} \times 21 = 7$ செ.மீ



படம் 8.20

மேலும், கூம்பின் சாயுயரம் = வட்டக் கோணப்பகுதியின் ஆரம்

$$l = R \Longrightarrow l = 21 \text{ செ.மீ}$$

எனவே, கூம்பின் வளைபரப்பு= πrl

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 21 = 462 \text{ ச.செ.மீ.}$$

மாற்று முறை :

கூம்பின் வளைபரப்பு

= வட்டக் கோணப்பகுதியின் பரப்பு

$$= \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi R^2$$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 = 462 \text{ ச.செ.மீ.}$$

8.2.3 கோளம் (Sphere)

ஒரு வட்ட வடிவத் தகட்டினை அதன் ஏதேனும் ஒரு விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றும் போது உருவாகும் கன உருவம் கோளம் எனப்படும். மேலும், கோளமானது ஒரு முப்பரிமாணப் பொருளாகும். அதற்கு வளைபரப்பு மற்றும் கன அளவு உண்டு.

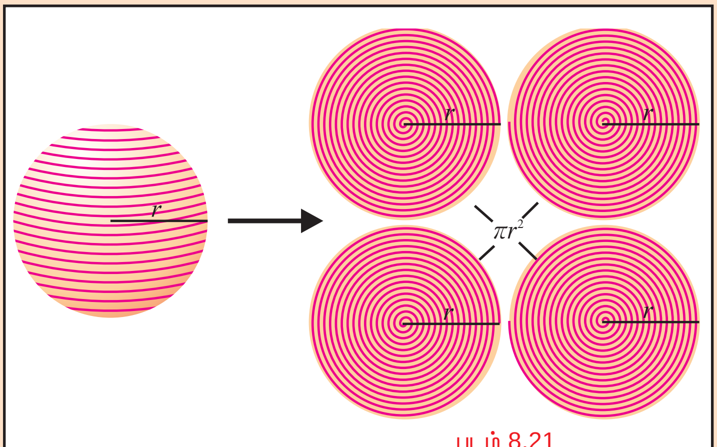
(i) ஒரு திண்மக் கோளத்தின் வளைபரப்பு (Curved surface area of a solid sphere)

செய்துபார்

ஒரு வட்ட வடிவ தகட்டை எடுத்துக் கொண்டு, அதன் ஒரு விட்டத்தின் வழியே ஒரு நூலை ஒட்டுக. பின்பு விட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு தகட்டினை 360° சுழற்றுக. அப்போது தோன்றும் பொருள் பந்து போன்று காணப்படும். இப்புதிய வடிவம் கோளம் எனப்படும்.

கீழ்க்காணும் செயலானது ஒரு கோளத்தின் வளைபரப்பு அதன் ஆரத்திற்குச் சமமான ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் பரப்பின் நான்கு மடங்கிற்குச் சமமாகும் என்பதை அறிய உதவும்.

- ஒரு நெகிழிப் (Plastic) பந்தை எடுத்துக் கொள்.
- அதன் உச்சியில் ஒரு ஊசியைப் பொருத்து.
- பந்தின் முழுபுறப் பரப்பையும் ஒரு சீரான நூலால் இடை வெளியின்றி சுற்றுக.
- இந்நூலை வெளியே எடுத்து சுற்றுவதற்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட நூலின் நீளத்தை அளக்க.
- அந்த நூலை நான்கு சமபாகங்களாக பிரிக்க.



படம் 8.21

- படத்தில் காட்டியது போல் நான்கு நூல் துண்டுகளையும் தனித்தனி வட்டவடிவில் வைக்கவும்
- கிடைத்த இவ்வட்டத்தின் ஆரங்களை அளக்க.

தற்போது, கோளத்தின் ஆரம் = சம வட்டங்களின் ஆரம் .

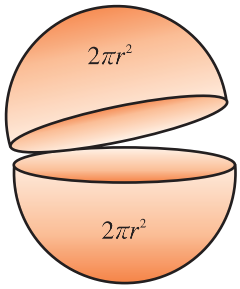
கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 4 \times$ வட்டத்தின் பரப்பு $= 4 \times \pi r^2$

எனவே, கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 4\pi r^2$ ச. அலகுகள்.

www.tntextbooks.in

(ii) திண்ம அரைக்கோளம் (Solid hemisphere)

ஒரு திண்மக் கோளத்தின் மையம் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தளம் அக்கோளத்தை இரு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும். ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு அரைக்கோளம் எனப்படும்.



படம் 8.22

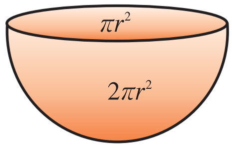
ஆகவே, அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு $= \frac{\text{கோளத்தின் வளைபரப்பு}}{2}$

$= \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$ ச. அலகுகள்.

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு + வட்டப்பகுதி பரப்பு

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 3\pi r^2$ ச. அலகுகள்.



படம் 8.23

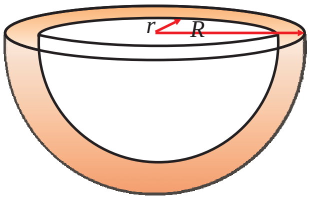
(iii) உள்ளீடற்ற அரைக்கோளம் (Hollow hemisphere)

R மற்றும் r என்பன முறையே உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் என்க.

உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் வளைபரப்பு

$= \left\{\begin{matrix}\text{உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின்} \\ \text{வெளிப்புற வளைபரப்பு}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின்} \\ \text{உட்புற வளைபரப்பு}\end{matrix}\right.$

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 = 2\pi(R^2 + r^2)$ ச.அலகுகள்.



படம் 8.24

மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \left\{\begin{matrix}\text{வெளிப்புற வளைபரப்பு + உட்புற வளைபரப்பு} \\ \text{+ விளிம்புப் பகுதியின் பரப்பு}\end{matrix}\right.$

$= 2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi(R^2 - r^2)$

$= 2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)(R - r)$

$= \pi(3R^2 + r^2)$ ச. அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.9

7 மீ உள்விட்டமுள்ள ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தினுள் உட்புறமாக ஒரு சர்க்கஸ் வீரர் மோட்டார் சைக்கிளில் சாகசம் செய்கிறார். அந்த சாகச வீரர் சாகசம் செய்யக் கிடைத்திடும் உள்ளீடற்றக் கோளத்தின் உட் புறப்பரப்பைக் காண்க. (($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் உட்புற விட்டம் $2r = 7$ மீ

மோட்டார் சைக்கிள் வீரர், சாகசம் செய்யக் கிடைத்திடும் பரப்பு

= கோளத்தின் உட்புற வளைபரப்பு

$= 4\pi r^2 = \pi(2r)^2$

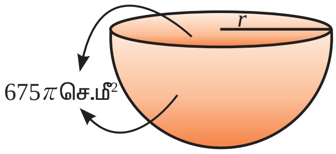
$= \frac{22}{7} \times 7^2$

ஆகவே, மோட்டார் சைக்கிள் வீரர் சாகசம் செய்திடும் இடத்தின் பரப்பு = 154 ச.மீ.

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 8.10

ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பு 675π ச.செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பைக் காண்க.



படம் 8.25

தீர்வு திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$$3\pi r^2 = 675\pi \text{ ச.செ.மீ}$$

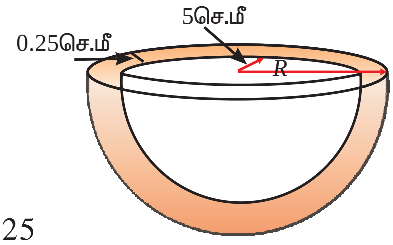
$$\Longrightarrow \quad r^2 = 225$$

திண்ம அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 2\pi r^2 = 2\pi \times 225 = 450\pi$ ச.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.11

அரைக்கோள வடிவ கிண்ணத்தின் தடிமன் 0.25 செ.மீ. அதன் உட்புற ஆரம் 5 செ.மீ எனில் அக்கிண்ணத்தின் வெளிப்புற வளைபரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு r, R மற்றும் w என்பன முறையே அரைக்கோள வடிவ கிண்ணத்தின் உள் ஆரம், வெளி ஆரம் மற்றும் தடிமன் என்க.



படம் 8.26

எனவே, $r = 5$ செ.மீ, $w = 0.25$ செ.மீ

$\therefore$ வெளி ஆரம் $R = r + w = 5 + 0.25 = 5.25$ செ.மீ

வெளிப்புற வளைபரப்பு $= 2\pi R^2$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 5.25 \times 5.25$$

ஆகவே, கிண்ணத்தின் வெளிப்புற வளைபரப்பு $= 173.25$ ச.செ.மீ.

பயிற்சி 8.1

1. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் ஆரம் 14 செ.மீ மற்றும் உயரம் 8 செ.மீ. எனில், அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.
2. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 660 ச. செ.மீ. அதன் விட்டம் 14 செ.மீ. எனில், அவ்வுருளையின் உயரத்தையும், வளைபரப்பையும் காண்க.
3. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு மற்றும் அடிச்சுற்றளவு முறையே 4400 ச.செ.மீ மற்றும் 110 செ.மீ. எனில், அவ்வுருளையின் உயரத்தையும், விட்டத்தையும் காண்க.
4. ஒரு மாளிகையில், ஒவ்வொன்றும் 50 செ.மீ. ஆரமும், 3.5 மீ உயரமும் கொண்ட 12 நேர் வட்ட உருளை வடிவத் தூண்கள் உள்ளன. அத்தூண்களுக்கு வர்ணம் பூச ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 20 வீதம் என்ன செலவாகும் ?
5. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 231 ச. செ.மீ. அதன் வளைபரப்பு மொத்த புறப்பரப்பில் மூன்றில் இரண்டு பங்கு எனில், அதன் ஆரம் மற்றும் உயரத்தைக் காண்க.
6. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் மொத்த புறப்பரப்பு 1540 செ.மீ ^{2}. அதன் உயரமானது, அடிப்பக்க ஆரத்தைப்போல் நான்கு மடங்கு எனில், உருளையின் உயரத்தைக் காண்க.
7. இரண்டு நேர் வட்ட உருளைகளின் ஆரங்களின் விகிதம் 3 : 2 என்க. மேலும் அவற்றின் உயரங்களின் விகிதம் 5 : 3 எனில், அவற்றின் வளைபரப்புகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

www.tntextbooks.in

8. ஒரு உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளிப்புற வளைபரப்பு 540π ச.செ.மீ. அதன் உள்விட்டம் 16 செ.மீ மற்றும் உயரம் 15 செ.மீ. எனில், அதன் மொத்த புறப்பரப்பைக் காண்க.

9. ஒரு உருளை வடிவ இரும்புக்குழாயின் வெளிப்புற விட்டம் 25 செ.மீ, அதன் நீளம் 20 செ.மீ. மற்றும் அதன் தடிமன் 1 செ.மீ எனில், அக்குழாயின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

10. ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் முறையே 7 செ.மீ மற்றும் 24 செ.மீ. எனில், அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

11. ஒரு திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் உச்சிக்கோணம் மற்றும் ஆரம் முறையே 60° மற்றும் 15 செ.மீ எனில், அதன் உயரம் மற்றும் சாயுயரத்தைக் காண்க.

12. ஒரு திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு 236 செ.மீ . மற்றும் அதன் சாயுயரம் 12 செ.மீ எனில், அக்கூம்பின் வளைபரப்பைக் காண்க.

13. நேர்வட்ட கூம்பு வடிவில் குவிக்கப்பட்ட நெற்குவியலின் விட்டம் 4.2 மீ மற்றும் அதன் உயரம் 2.8மீ. என்க. இந்நெற்குவியலை மழையிலிருந்து பாதுகாக்க கித்தான் துணியால் மிகச்சரியாக மூடப்படுகிறது எனில், தேவையான கித்தான் துணியின் பரப்பைக் காண்.

14. 180° மையக் கோணமும் 21 செ.மீ. ஆரமும் கொண்ட வட்டகோண வடிவிலான இரும்புத் தகட்டின் ஆரங்களை இணைத்து ஒரு கூம்பு உருவாக்கப்படுகிறது எனில், அக்கூம்பின் ஆரத்தைக் காண்க.

15. ஒரு நேர்வட்ட திண்மக் கூம்பின் ஆரமும் சாயுயரமும் 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அக்கூம்பின் வளைபரப்பு 60π ச.செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

16. 98.56 ச.செ.மீ புறப்பரப்பு கொண்ட ஒரு திண்மக் கோளத்தின் ஆரத்தைக் காண்க.

17. ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு 2772 ச.செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

18. இரண்டு திண்ம அரைக்கோளங்களின் ஆரங்கள் 3 : 5 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. அக்கோளங்களின் வளைபரப்புகளின் விகிதம் மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்புகளின் விகிதம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

19. ஒரு உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் வெளி ஆரம் மற்றும் உள் ஆரம் முறையே 4.2 செ.மீ மற்றும் 2.1 செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்த புறப்பரப்பைக் காண்க.

20. அரைக்கோள வடிவ மேற்கூரையின் உட்புற வளைபரப்பிற்கு வர்ணம் பூச வேண்டியுள்ளது. அதன் உட்புற அடிச்சுற்றளவு 17.6 மீ எனில், ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 5 வீதம், வர்ணம் பூச ஆகும் மொத்த செலவைக் காண்க.

8.3 கன அளவு (Volume)

இதுவரை சில திண்மப் பொருட்களின் புறப்பரப்பு தொடர்பான கணக்குகளைக் கண்டோம். இப்போது நாம், சில நன்கறிந்த கன உருவங்களின் கனஅளவுகளை எவ்வாறு கணக்கிடுவது எனக் காண்போம். கனஅளவு என்பது இடத்தை அடைத்துக் கொள்ளும் அளவு ஆகும். ஒரு திண்மப் பொருளின் கனஅளவு என்பது திண்மப் பொருளின் எண்சார்ந்த சிறப்பியல்பு ஆகும்.

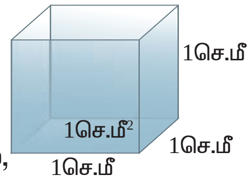
எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு திண்மப் பொருளை ஓரலகுபக்கம் கொண்ட முடிவுறு எண்ணிக்கையில் கனச் சதுரங்களாகப் பிரிக்க முடியுமானால், அக்கனச்சதுரங்களின் எண்ணிக்கையே அப்பொருளின் கனஅளவு ஆகும்.

www.tntextbooks.in

படம் 8.27-ல் உள்ள கனச்சதுரத்தின் கனஅளவு

$= $ பக்கம் $\times$ பக்கம் $\times$ பக்கம்

$= 1$ செ.மீ $\times 1$ செ.மீ $\times 1$ செ.மீ $= 1$ க. செ.மீ.



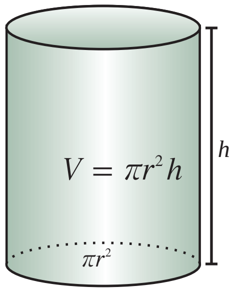
படம் 8.27

ஒரு பொருளின் கனஅளவு 100 க.செ.மீ எனக் கூறுவோமானால், அப்பொருளை முழுவதும் நிரப்ப நமக்கு 1 க.செ.மீ கனஅளவு கொண்ட 100 கனச்சதுரங்கள் தேவை என்பதை உணர்த்துகிறது.

வளைபரப்பைப் போலவே கனஅளவும் ஒரு மிகை மதிப்பாகும். மேலும் திண்மப் பொருட்களின் இடப்பெயர்வினால் அவற்றின் கனஅளவில் மாற்றம் ஏற்படுவதில்லை. சில கன உருவங்களின் கனஅளவுகள் கீழே விவரமாக தரப்பட்டுள்ளன.

8.3.1 நேர்வட்ட உருளையின் கனஅளவு (Volume of a right circular cylinder)

(i) திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் கனஅளவு (Volume of a solid right circular cylinder)



படம் 8.28

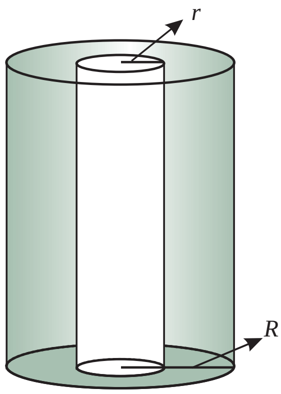
நேர்வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பு மற்றும் உயரம் ஆகியவற்றின் பெருக்கற்பலன் அவ்வுருளையின் கனஅளவு எனப்படும்.

எனவே, உருளையின் கனஅளவு, $V =$ அடிப்பக்கப்பரப்பு $\times$ உயரம்

$= \pi r^2 \times h$

ஆகவே, நேர்வட்ட உருளையின் கனஅளவு, $V = \pi r^2 h$ க. அலகுகள் ஆகும்.

(ii) உள்ளீடற்ற உருளையின் கனஅளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு) (Volume of a hollow cylinder)



படம் 8.29

R மற்றும் r என்பன முறையே உள்ளீடற்ற உருளையின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் என்க. மேலும் h என்பது உருளையின் உயரம் என்க.

கனஅளவு, V $=$ {வெளிப்பக்க உருளையின் கனஅளவு} $-$ {உள்பக்க உருளையின் கனஅளவு}

$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$

ஆகவே, உள்ளீடற்ற உருளையின் கனஅளவு,

$V = \pi h(R^2 - r^2)$ க.அலகுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு 704 ச.செ.மீ மற்றும் அதன் உயரம் 8 செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் கனஅளவை லிட்டரில் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)

தீர்வு r மற்றும் h என்பன முறையே ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

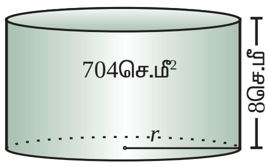
$h = 8$ செ.மீ, வளைபரப்பு $= 704$ ச.செ.மீ

வளைபரப்பு $= 704$

$\Longrightarrow \quad 2\pi r h = 704$

$\Longrightarrow \quad 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 8 = 704$

$\therefore \quad r = \frac{704 \times 7}{2 \times 22 \times 8} = 14$ செ.மீ



படம் 8.30

உருளையின் கனஅளவு, $V = \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 8$

$= 4928$ க.செ.மீ

உருளையின் கன அளவு $= 4.928$ லிட்டர். (1000 க.செ.மீ = 1 லிட்டர்)

எடுத்துக்காட்டு 8.13

ஒரு உள்ளீடற்ற இரும்பு குழாயின் நீளம் 28 செ.மீ., அதன் வெளி மற்றும் உள்விட்டங்கள் முறையே 8 செ.மீ மற்றும் 6 செ.மீ. எனில், இரும்புக் குழாயின் கனஅளவைக் காண்க. மேலும் 1 க.செ.மீ இரும்பின் எடை 7 கிராம் எனில், இரும்புக் குழாயின் எடையைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)

தீர்வு r, R மற்றும் h என்பன முறையே இரும்புக்குழாயின் உள் ஆரம், வெளி ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

$2r = 6$ செ.மீ, $2R = 8$ செ.மீ , $h = 28$ செ.மீ

எனவே, $r = 3$ செ.மீ மற்றும் $R = 4$ செ.மீ

இரும்புக் குழாயின் கனஅளவு, $V = \pi \times h \times (R + r)(R - r)$

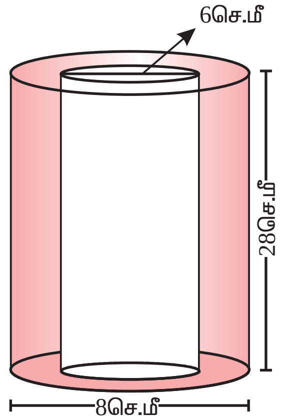
$= \frac{22}{7} \times 28 \times (4 + 3)(4 - 3)$

$\therefore$ கனஅளவு, $V = 616$ க.செ.மீ

1 க.செ.மீ இரும்பின் எடை $= 7$ கிராம்

616 க.செ.மீ இரும்புக் குழாயின் எடை $= 7 \times 616$ கிராம்

ஆகவே, இரும்புக் குழாயின் எடை $= 4.312$ கி.கி.



படம் 8.31

எடுத்துக்காட்டு 8.14

ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பு மற்றும் கனஅளவு முறையே 13.86 ச.செ.மீ மற்றும் 69.3 க.செ.மீ. எனில், அவ்வுருளையின் உயரம் மற்றும் வளைபரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)

தீர்வு A மற்றும் V என்பன முறையே நேர்வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பு மற்றும் கனஅளவு என்க.

எனவே, அடிப்பக்கப் பரப்பு $A = \pi r^2 = 13.86$ ச.செ.மீ

மேலும், கனஅளவு, $V = \pi r^2 h = 69.3$ க.செ.மீ

ஆகவே, $\pi r^2 h = 69.3$

$\Longrightarrow 13.86 \times h = 69.3$

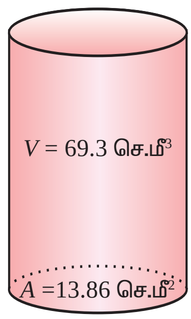
$\therefore h = \frac{69.3}{13.86} = 5$ செ.மீ

மேலும், அடிப்பக்கப் பரப்பு $= \pi r^2 = 13.86$

$\frac{22}{7} \times r^2 = 13.86$

$r^2 = 13.86 \times \frac{7}{22} = 4.41$

$\therefore r = \sqrt{4.41} = 2.1$ செ.மீ.



படம் 8.32

www.tntextbooks.in

உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 2.1\times 5$

எனவே, வளைபரப்பு $= 66$ ச.செ.மீ.

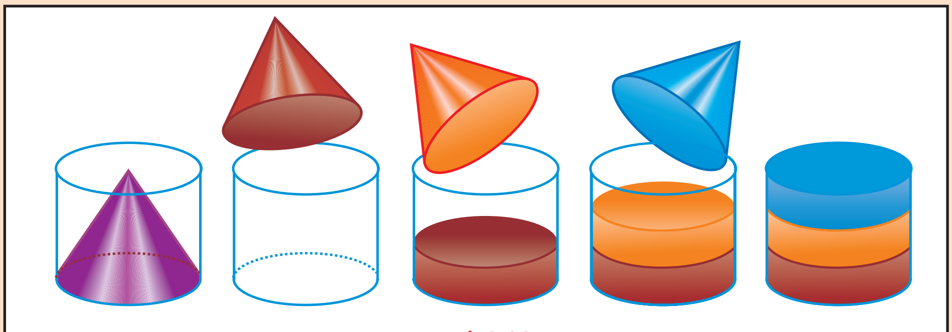
8.3.2 நேர்வட்டக் கூம்பின் கனஅளவு (Volume of a right circular cone)

r மற்றும் h என்பன முறையே நேர்வட்டக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க.

கூம்பின் கனஅளவு $V=\frac{1}{3}\times\pi r^2 h$ க. அலகுகள். இச்சூத்திரத்தை கீழ்க்காணும் செயல்மூலம் நியாயப்படுத்தலாம்.

செய்துபார்

கீழ்கண்ட படத்தில் காட்டியவாறு சம அளவு ஆரம் மற்றும் உயரம் கொண்ட உள்ளீடற்ற கூம்பு மற்றும் உள்ளீடற்ற உருளையை தயாரிக்கவும். இப்போது நாம் கீழ்கண்ட செயல்மூலம் கூம்பின் கனஅளவினைக் கண்டறியலாம். மணல் அல்லது திரவத்தினால் கூம்பினை நிரப்பு. பிறகு அதனை உருளையினுள் கொட்டுக. இச்சோதனையை தொடர்ந்து செய்யும் போது மூன்றாவது முறையின் இறுதியில் உருளையானது மணல் / திரவத்தால் முழுவதும் நிரம்பும்.



படம் 8.33

இந்த எளிய செயலிலிருந்து r மற்றும் h என்பன முறையே உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் எனில், $3\times$(கூம்பின் கனஅளவு) $=$ உருளையின் கனஅளவு $= \pi r^2 h$ என அறியலாம். எனவே, கூம்பின் கனஅளவு $= \frac{1}{3}\times\pi r^2 h$ க. அலகுகள் என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் கனஅளவு 4928 க.செ.மீ. மற்றும் அதன் உயரம் 24 செ. மீ எனில், அக்கூம்பின் ஆரத்தைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

தீர்வு r, h மற்றும் V என்பன முறையே கூம்பின் ஆரம், உயரம் மற்றும் கனஅளவு என்க.

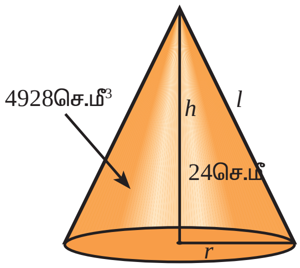
எனவே, $V =$ 4928 க.செ.மீ மற்றும் $h = 24$ செ.மீ

ஆகவே, $\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4928$

$\Longrightarrow \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times r^2\times 24 = 4928$

$\Longrightarrow r^2 = \frac{4928\times 3\times 7}{22\times 24} = 196.$

ஆகவே, கூம்பின் ஆரம் $r = \sqrt{196} = 14$ செ.மீ.



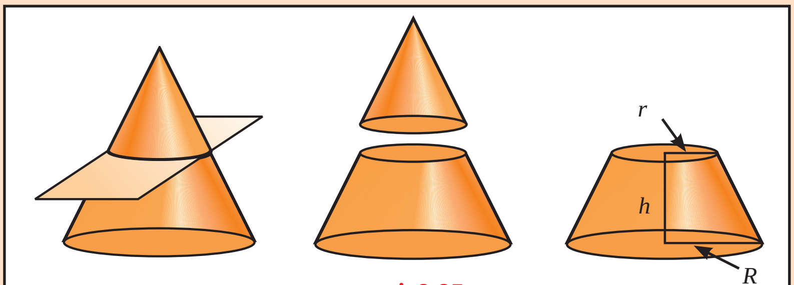
படம் 8.34

8.3.3 ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் கனஅளவு (Volume of a frustum of a cone)

நாம் ஏதேனும் ஒரு திண்ம நேர் வட்டக்கூம்பை எடுத்துக் கொண்டு, அதனை ஒரு சிறிய நேர்வட்டக் கூம்பு கிடைக்குமாறு இரு பாகங்களாக வெட்டினால் கிடைக்கும் எஞ்சிய பகுதியை கூம்பின் இடைக்கண்டம் (frustum of a cone) என்போம். இதனை கீழ்கண்ட செயல் மூலம் அறிந்து கொள்ளலாம்.

செய்துபார்

களிமண் அல்லது மெழுகை எடுத்துக்கொண்டு, அதிலிருந்து ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பினை உருவாக்குக. அதன் அடிப்பாகத்திற்கு இணையாக ஒரு கத்தியால் அதனை வெட்டவும். அப்போது கிடைக்கும் சிறிய கூம்பு பாகத்தினை நீக்கு. உன்னிடம் எஞ்சியுள்ள பகுதி எது? திண்மக் கூம்பின் எஞ்சியுள்ள பகுதி கூம்பின் இடைக் கண்டம் (frustum) எனப்படும். இலத்தீன் மொழியில் frustum என்பதன் பொருள் “வெட்டியெடுக்கப்பட்ட ஒரு துண்டு” எனப் பொருள்படும். frustum என்ற சொல்லின் பன்மை frusta என்பதாகும்.



படம் 8.35

ஆகவே, ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பினை அதன் அடிப்பாகத்திற்கு இணையாக ஒரு தளத்தால் வெட்டும்போது கிடைக்கும் கூம்பின் அடிப்பாகத்தோடு இணைந்த பகுதி கூம்பின் இடைக்கண்டம் எனப்படும். இவ்விடைக்கண்டத்திற்கு இரண்டு வட்டப்பகுதிகள் உண்டு. ஒன்று அடிப்பாகத்திலும் மற்றொன்று மேற்பகுதியிலும் இருக்கும்.

நாம் கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் கன அளவை இப்போது காண்போம்.

ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் கனஅளவு என்பது இரண்டு கூம்புகளின் கன அளவுகளின் வேறுபாட்டைத் தவிர வேறொன்றுமல்ல.

ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக் கண்டத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். R என்பது கொடுக்கப்பட்ட கூம்பின் ஆரம் என்க. r மற்றும் x என்பன முறையே இடைக்கண்டத்தை நீக்கிய பிறகு கிடைத்த சிறிய கூம்பின் ஆரம் மற்றும் உயரம் என்க. h என்பது இடைக்கண்டத்தின் உயரம் என்க.

தற்போது,

$$\text{இடைக்கண்டத்தின் கன அளவு, } V = \left\{\begin{array}{l}\text{கொடுக்கப்பட்ட}\\ \text{கூம்பின் கன அளவு}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{சிறிய கூம்பின்}\\ \text{கனஅளவு}\end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{3}\times\pi\times R^2\times(x+h) - \frac{1}{3}\times\pi\times r^2\times x$$

$$V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2h]. \qquad (1)$$

www.tntextbooks.in

படம் 8.36-லிருந்து $\Delta BFE \sim \Delta DGE$

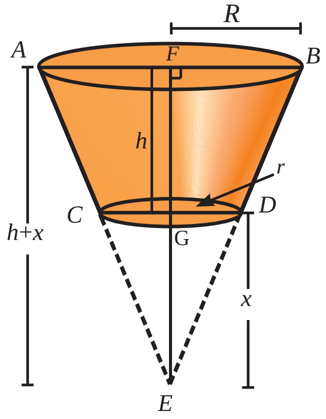
$$\therefore \quad \frac{BF}{DG} = \frac{FE}{GE}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{x+h}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad Rx - rx = rh$$

$$\Longrightarrow \quad x(R-r) = rh \qquad (2)$$

இவ்வாறு, நாம் பெறுவது $x = \dfrac{rh}{R-r}$



படம் 8.36

இப்போது (1)-லிருந்து $\Longrightarrow \quad V = \frac{1}{3}\pi[x(R^2 - r^2) + R^2 h]$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[x(R-r)(R+r) + R^2 h]$$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi[rh(R+r) + R^2 h] \qquad \text{((2)-லிருந்து)}$$

இடைக்கண்டத்தின் கனஅளவு, $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ க.அலகுகள்.

குறிப்பு

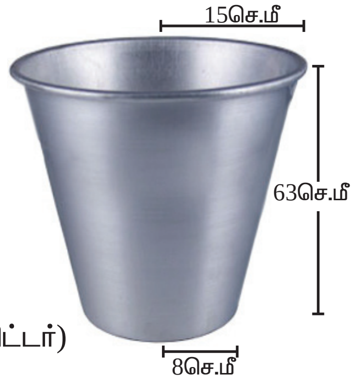
* இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு $= \pi(R+r)l$, இங்கு $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$
* இடைக்கண்டத்தின் மொத்தப் பரப்பு $= \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$, இங்கு $l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

* (தேர்வுக்குரியவை அல்ல)

எடுத்துக்காட்டு 8.16

ஒரு இடைக்கண்ட வடிவிலான வாளியின் மேற்புற மற்றும் அடிப்புற ஆரங்கள் முறையே 15செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ. மேலும், ஆழம் 63 செ.மீ எனில், அதன் கொள்ளளவை லிட்டரில் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)

தீர்வு R மற்றும் r என்பது முறையயே வாளியின் மேற்புற மற்றும் அடிப்புற பகுதிகளின் ஆரங்கள் எனவும் h என்பது அதன் உயரம் (ஆழம்) எனவும் கொள்க.



படம் 8.37

ஆகவே, $R = 15$ செ.மீ, $r = 8$ செ.மீ மற்றும் $h = 63$ செ.மீ.

வாளியின் கனஅளவு $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 63 \times (15^2 + 8^2 + 15 \times 8)$

$= 26994$ க.செ.மீ

$= \frac{26994}{1000}$ லிட்டர் (1000 க.செ.மீ = 1 லிட்டர்)

எனவே, வாளியின் கனஅளவு = 26.994 லிட்டர்.

8.3.4 கோளத்தின் கனஅளவு (Volume of a sphere)

(i) ஒரு திண்மக் கோளத்தின் கனஅளவு (Volume of a solid sphere)

கீழ்காணும் எளிய சோதனையின் மூலம் ஒரு கோளத்தின் கனஅளவினை

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ க.அலகுகள் என அறியலாம்.

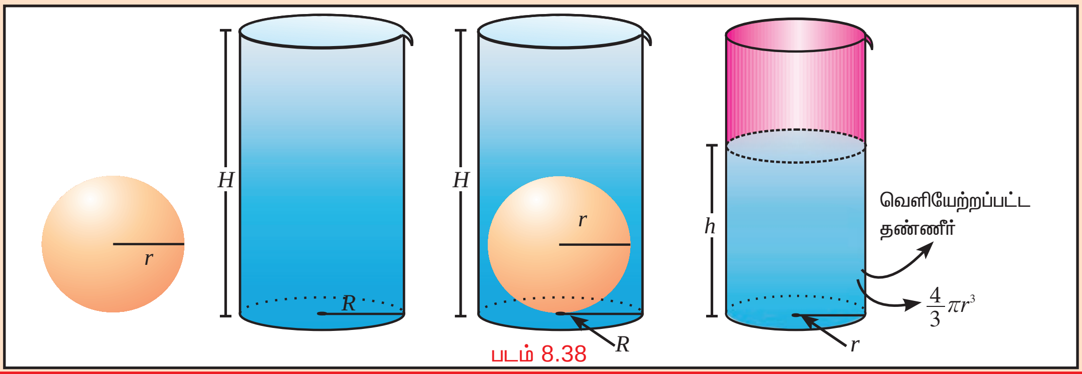
செய்துபார் R அலகு ஆரமும், H அலகு உயரமுள்ள ஒரு உருளை வடிவப் பாத்திரத்தை எடுத்துக் கொள்க. அதனை முழுவதும் தண்ணீரால் நிரப்பு. r அலகு ஆரம் கொண்ட (இங்கு $R > r$) கோளத்தை, உருளைப்பாத்திரத்தில் மூழ்கச் செய்து வெளியேறிய தண்ணீரை r அலகு ஆரமும், H அலகு உயரமும் கொண்ட மற்றொரு உருளை வடிவ பாத்திரத்தில் நிரப்புக. தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரமானது அதன் ஆரத்தைப் போன்று $\frac{4}{3}$ மடங்கிற்கு சமமாக இருக்கும் ($h = \frac{4}{3}r$). இப்போது கோளத்தின் கனஅளவு வெளியேற்றப்பட்ட தண்ணீரின் கனஅளவிற்கு சமம் ஆகும்.

வெளியேற்றப்பட்ட தண்ணீரின் கன அளவு V = அடிப்பரப்பு x உயரம்

$= \pi r^2 \times \frac{4}{3}r$ (இங்கு தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரம் $h = \frac{4}{3}r$)

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

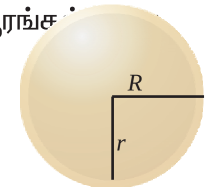
$\therefore$ கோளத்தின் கனஅளவு, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ க. அலகுகள் என அறிந்து கொள்ளலாம்.



படம் 8.38

(ii) உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு) (Volume of a hollow sphere)

r மற்றும் R என்பன முறையே ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் உள் மற்றும் வெளி ஆரங்கள்.



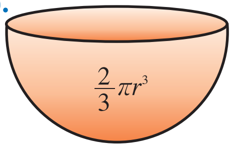
படம் 8.39

உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு = வெளிக்கோளத்தின் கனஅளவு − உள்கோளத்தின் கன அளவு

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$$

$\therefore$ உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ க.அலகுகள்.

(iii) திண்ம அரைக் கோளத்தின் கனஅளவு (Volume of a solid hemisphere).



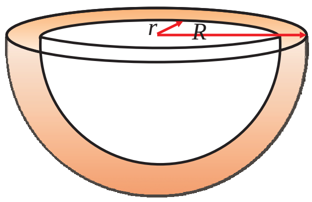
படம் 8.40

திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{1}{2} \times$ திண்மக் கோளத்தின் கனஅளவு

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$ க.அலகுகள்.

(iv) உள்ளீடற்ற திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு (பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு) (Volume of a solid hollow hemisphere)



படம் 8.41

உள்ளீடற்ற அரைக் கோளத்தின் கனஅளவு = வெளி அரைக் கோளத்தின் கனஅளவு − உள் அரைக் கோளத்தின் கன அளவு

$$= \frac{2}{3} \times \pi \times R^3 - \frac{2}{3} \times \pi \times r^3$$

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு $= \frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$ க.அலகுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.17

8.4 செ.மீ விட்டம் கொண்ட ஒரு கோளவடிவ திண்ம உலோக எறிகுண்டின் கன அளவைக் காண்க.($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)

படம் 8.42

தீர்வு r என்பது திண்ம கோள வடிவ உலோக எறி குண்டின் ஆரம் என்க.

ஆகவே, $2r = 8.4$ செ. $\Longrightarrow r = 4.2$ செ.மீ

உலோக எறிகுண்டின் கன அளவு $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10} \times \frac{42}{10}$$

எனவே, உலோக எறிகுண்டின் கன அளவு = 310.464 க.செ.மீ.

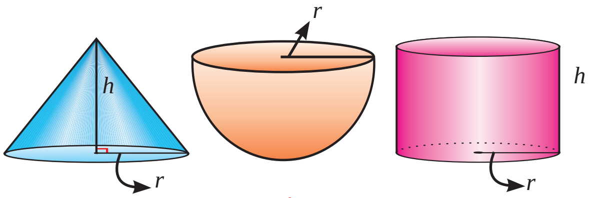
எடுத்துக்காட்டு 8.18

ஒரு கூம்பு, ஒரு அரைக்கோளம், மற்றும் ஒரு உருளை ஆகியன சம அடிப்பரப்பினைக் கொண்டுள்ளன. கூம்பின் உயரம், உருளையின் உயரத்திற்கு சமமாகவும், மேலும் இவ்வுயரம், அவற்றின் ஆரத்திற்கு சமமாகவும் இருந்தால் இம்மூன்றின் கன அளவுகளுக்கிடையே உள்ள விகிதத்தைக் காண்க.

தீர்வு r என்பது கூம்பு, அரைக்கோளம் மற்றும் உருளையின் பொதுவான ஆரம் என்க.

h என்பது கூம்பு மற்றும் உருளையின் உயரம் என்க. எனவே, $r = h$ ஆகும்.

V_1, V_2 மற்றும் V_3 என்பன முறையே கூம்பு, அரைக்கோளம் மற்றும் உருளையின் கனஅளவுகளை குறிக்கட்டும்.



படம் 8.43

இப்போது, $V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^2 h$

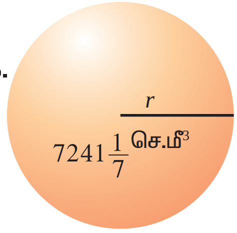
$$\Longrightarrow \quad = \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3 \qquad (r = h)$$

$$\Longrightarrow \quad V_1 : V_2 : V_3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1$$

ஆகவே, கனஅளவுகளின் விகிதம் $1 : 2 : 3$.

எடுத்துக்காட்டு 8.19

ஒரு திண்மக் கோளத்தின் கனஅளவு $7241\frac{1}{7}$ க.செ.மீ எனில், அதன் ஆரத்தைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க)



படம் 8.44

தீர்வு r மற்றும் V என்பன முறையே கோளத்தின் ஆரம் மற்றும் கனஅளவு என்க.

$$V = 7241\frac{1}{7} \text{ க.செ.மீ}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{50688}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3 = \frac{50688}{7}$$

www.tntextbooks.in

$$r^3 = \frac{50688}{7} \times \frac{3 \times 7}{4 \times 22}$$

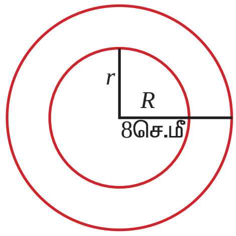
$$= 1728 = 4^3 \times 3^3$$

ஆகவே, கோளத்தின் ஆரம், $r = 12$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.20

ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கனஅளவு $\frac{11352}{7}$ க.செ.மீ. மற்றும் அதன் வெளி ஆரம் 8 செ.மீ. எனில், அக்கோளத்தின் உள்ஆரத்தைக் காண்க ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க).

தீர்வு R மற்றும் r என்பன முறையே உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் என்க. V என்பது அக்கோளத்தின் கனஅளவு என்க.



படம் 8.45

ஆகவே, கனஅளவு $V = \frac{11352}{7}$ க.செ.மீ.

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{4}{3} \times \frac{22}{7}(8^3 - r^3) = \frac{11352}{7}$$

$$512 - r^3 = 387 \Longrightarrow r^3 = 125 = 5^3$$

எனவே, உள் ஆரம் $r = 5$ செ.மீ.

பயிற்சி 8.2

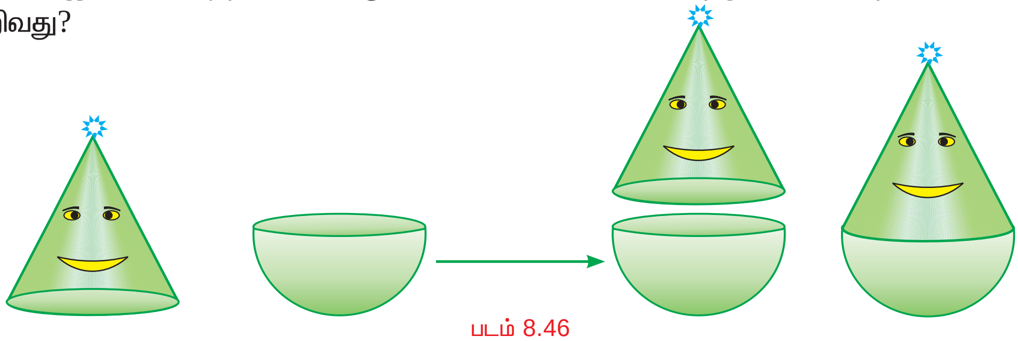
1. ஒரு திண்ம உருளையின் ஆரம் 14 செ.மீ. அதன் உயரம் 30 செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் கனஅளவைக் காண்க.
2. ஒரு மருத்துவமனையிலுள்ள நோயாளி ஒருவருக்கு தினமும் 7 செ.மீ விட்டமுள்ள உருளை வடிவ கிண்ணத்தில் வடிச்சாறு (Soup) வழங்கப்படுகிறது. அப்பாத்திரத்தில் 4செ.மீ உயரத்திற்கு வடிச்சாறு ஒரு நோயாளிக்கு வழங்கப்பட்டால், 250 நோயாளிகளுக்கு வழங்கத் தேவையான வடிச்சாறின் கனஅளவினைக் காண்க.
3. ஒரு திண்ம உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரத்தின் கூடுதல் 37 செ.மீ. என்க. மேலும், அதன் மொத்த புறப்பரப்பு 1628 ச.செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் கனஅளவைக் காண்க.
4. 62.37 க.செ.மீ. கனஅளவு கொண்ட ஒரு திண்ம நேர்வட்ட உருளையின் உயரம் 4.5 செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் ஆரத்தைக் காண்க.
5. இரண்டு நேர் வட்ட உருளைகளின் ஆரங்களின் விகிதம் 2 : 3. மேலும் உயரங்களின் விகிதம் 5 : 3 எனில், அவற்றின் கனஅளவுகளின் விகிதத்தைக் காண்க.
6. ஒரு உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரத்தின் விகிதம் 5 : 7. மேலும் அதன் கனஅளவு 4400 க.செ.மீ எனில், அவ்வுருளையின் ஆரத்தைக் காண்க.
7. 66 செ.மீ $\times$ 12 செ.மீ எனும் அளவுக் கொண்ட ஒரு உலோகத் தகட்டினை 12 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு உருளையாக மாற்றினால் கிடைக்கும் உருளையின் கனஅளவைக் காண்க.
8. ஒரு பென்சிலானது ஒரு நேர் வட்ட உருளை வடிவில் உள்ளது. பென்சிலின் நீளம் 28 செ.மீ மற்றும் அதன் ஆரம் 3 மி.மீ. பென்சிலினுள் அமைந்த மையின் (கிராஃபைட்)-ன் ஆரம் 1 மி.மீ எனில், பென்சில் தயாரிக்க பயன்படுத்தப்பட்ட மரப்பலகையின் கனஅளவைக் காண்க.

9. ஒரு திண்மக் கூம்பின் ஆரம் மற்றும் சாயுயரம் முறையே 20 செ.மீ மற்றும் 29 செ.மீ. எனில் அத்திண்மக் கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.
10. மரத்தினாலான ஒரு திண்மக் கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு 44 செ.மீ. மற்றும் அதன் உயரம் 12 செ.மீ எனில் அத்திண்மக் கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.
11. ஒரு பாத்திரம் இடைக்கண்டம் வடிவில் உள்ளது. அதன் மேற்புற ஆரம் மற்றும் உயரம் முறையே 8 செ.மீ மற்றும் 14 செ.மீ என்க. அப்பாத்திரத்தின் கனஅளவு $\frac{5676}{3}$ க.செ.மீ எனில், அடிப்பக்கத்திலுள்ள வட்டத்தின் ஆரத்தினைக் காண்க.
12. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் இருபுறமும் அமைந்த வட்ட விளிம்புகளின் சுற்றளவுகள் முறையே 44 செ.மீ மற்றும் 8.4π செ.மீ என்க. அதன் உயரம் 14 செ.மீ எனில்,அவ்விடைக்கண்டத்தின் கனஅளவைக் காண்க.
13. 5 செ.மீ, 12 செ.மீ. மற்றும் 13 செ.மீ. பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு செங்கோண $\triangle ABC$ ஆனது 12 செ.மீ. நீளமுள்ள அதன் ஒரு பக்கத்தை அச்சாகக் கொண்டு சுழற்றப்படும்போது உருவாகும் கூம்பின் கனஅளவைக் கண்டுபிடி.
14. ஒரு திண்ம நேர் வட்டக் கூம்பின் ஆரமும் உயரமும் 2 : 3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளது. அதன் கனஅளவு 100.48 க.செ.மீ எனில், அக்கூம்பின் சாயுயரத்தைக் கண்டுபிடி. ($\pi = 3.14$ என்க)
15. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கனஅளவு 216π க.செ.மீ மற்றும் அக்கூம்பின் ஆரம் 9 செ.மீ எனில், அதன் உயரத்தைக் காண்க.
16. கோள வடிவிலமைந்த 200 இரும்பு குண்டுகள் (ball bearings) ஒவ்வொன்றும் 0.7 செ.மீ ஆரம் கொண்டது. இரும்பின் அடர்த்தி 7.95 கிராம் /செ.மீ^{3} எனில் இரும்புக் குண்டுகளின் நிறையைக் காண்க. (நிறை = கனஅளவு × அடர்த்தி)
17. ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் முறையே 12 செ.மீ மற்றும் 10 செ. மீ எனில், அக்கோளத்தின் கன அளவைக் காண்க.
18. ஓர் அரைக்கோளத்தின் கன அளவு 1152π க.செ. மீ. எனில், அதன் வளைபரப்பு காண்க.
19. 14 செ.மீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு கனச்சதுரத்தில் இருந்து வெட்டியெடுக்கப்படும் மிகப்பெரிய கூம்பின் கனஅளவைக் காண்க.
20. 7 செ.மீ ஆரம் கொண்ட கோள வடிவ பலூனில் காற்று செலுத்தப்படும்போது அதன் ஆரம் 14 செ.மீ ஆக அதிகரித்தால், அவ்விரு நிலைகளில் பலூனின் கனஅளவுகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

8.4 இணைந்த கனஉருவங்கள் (Combination of Solids)

நம்முடைய அன்றாட வாழ்வில், இரண்டு அல்லது அதற்குமேல் இணைந்த கன உருவங்களால் ஆன விளையாட்டுப் பொம்மைகள், வாகனங்கள், பாத்திரங்கள், கருவிகள் போன்றவற்றினைக் காண்கிறோம்.

நாம் இவ்விணைந்த கன உருவங்களின் வளைபரப்பு மற்றும் கன அளவினை எவ்வாறு கண்டறிவது?



படம் 8.46

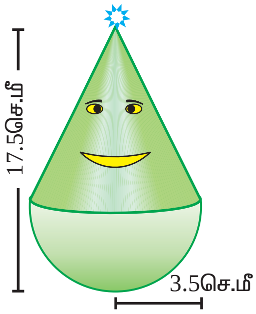
இணைந்த கன உருவத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பானது அவ்விணைந்த உருவத்தில் இணைந்துள்ள கனஉருவங்களின் மொத்தப் புறப்பரப்புகளின் கூடுதலுக்கு சமமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. இருந்த போதிலும், படம் 8.46-ல் இணைந்த கன உருவத்தின் மொத்த புறப்பரப்பானது அவ்வுருவத்தில் இணைந்துள்ள கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளத்தின் புறப்பரப்புகளின் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். மேலும் அவ்விணைந்த உருவத்தின் கன அளவு ஆனது இணைந்துள்ள அவ்விரண்டு கன உருவங்களின் கன அளவுகளின் கூடுதலுக்குச் சமம் ஆகும். படத்திலிருந்து,

கன உருவத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பளவு = அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு + கூம்பின் வளைபரப்பு

கன உருவத்தின் கன அளவு = அரைக்கோளத்தின் கன அளவு + கூம்பின் கன அளவு

எடுத்துக்காட்டு 8.21

ஒரு திண்ம மரப்பொம்மையானது அரைக்கோளத்தின் மேல் கூம்பு இணைந்த வடிவில் உள்ளது. அரைக்கோளம் மற்றும் கூம்பு ஆகியவற்றின் ஆரம் 3.5செ.மீ. மேலும் பொம்மையின் மொத்த உயரம் 17.5செ.மீ எனில் அப்பொம்மை தயாரிக்கப் பயன்படுத்தப்பட்ட மரத்தின் கன அளவைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)



படம் 8.47

தீர்வு

அரைக்கோளப் பகுதி :

ஆரம் $r = 3.5$ செ.மீ

கூம்புப் பகுதி :

ஆரம் $r = 3.5$ செ.மீ

உயரம் $h = 17.5 - 3.5 = 14$ செ.மீ

பொம்மை தயாரிக்கப் பயன்படுத்தப்பட்ட மரத்தின் கனஅளவு = {அரைக் கோளப்பகுதியின் கனஅளவு} + {கூம்புப்பகுதியின் கன அளவு}

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

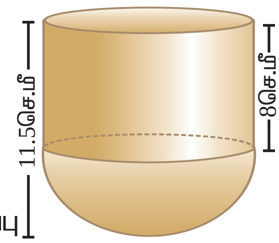
$$= \frac{\pi r^2}{3}(2r + h)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5 \times 3.5}{3} \times (2 \times 3.5 + 14) = 269.5$$

ஆகவே, மரப்பொம்மை தயாரிக்கப் பயன்படுத்தப்பட்ட மரத்தின் கன அளவு = 269.5 க.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.22

ஒரு கோப்பையானது அரைக்கோளத்தின் மீது உருளை இணைந்த வடிவில் உள்ளது. உருளைப் பகுதியின் உயரம் 8 செ.மீ மற்றும் கோப்பையின் மொத்த உயரம் 11.5 செ.மீ. எனில் அக்கோப்பையின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)



படம் 8.48

தீர்வு

அரைக்கோளப் பகுதி :

ஆரம், r = மொத்த உயரம் -8 செ.மீ.

$\Longrightarrow \quad r = 11.5 - 8 = 3.5$ செ.மீ

உருளைப் பகுதி :

உயரம், $h = 8$ செ.மீ.

ஆரம், $r = 3.5$ செ.மீ $= \frac{7}{2}$ செ.மீ

கோப்பையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = {அரைக்கோளப் பகுதியின் வளைபரப்பு + உருளைப் பகுதியின் வளைபரப்பு}

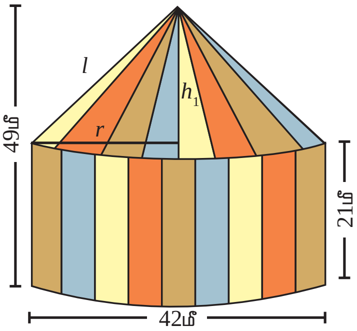
$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2}\left(\frac{7}{2} + 8\right)$$

எனவே, கோப்பையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = 253 ச.செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.23

ஒரு சர்க்கஸ் கூடாரமானது உருளையின் மீது கூம்பு இணைந்த வடிவில் அமைந்துள்ளது. கூடாரத்தின் மொத்த உயரம் 49 மீ. அதன் அடிப்பாகத்தின் விட்டம் 42 மீ. உருளைப்பாகத்தின் உயரம் 21 மீ. மேலும் 1 ச.மீ கித்தான் துணியின் விலை ₹12.50 எனில், கூடாரம் அமைக்கத் தேவையான கித்தான் துணியின் விலையைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$)



படம் 8.49

தீர்வு

உருளைப் பகுதி	கூம்புப் பகுதி
விட்டம், $2r = 42$ மீ	ஆரம், $r = 21$ மீ
ஆரம், $r = 21$ மீ	உயரம், $h_1 = 49 - 21 = 28$ மீ
உயரம், $h = 21$ மீ	சாயுயரம், $l = \sqrt{h_1^2 + r^2}$

$$= \sqrt{28^2 + 21^2}$$

$$= 7\sqrt{4^2 + 3^2} = 35 \text{ மீ}$$

தேவையான கித்தான் துணியின் மொத்தப் புறப்பரப்பு = உருளைப் பகுதியின் வளைபரப்பு + கூம்புப் பகுதியின் வளைபரப்பு

$$= 2\pi rh + \pi rl = \pi r(2h + l)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21(2 \times 21 + 35) = 5082$$

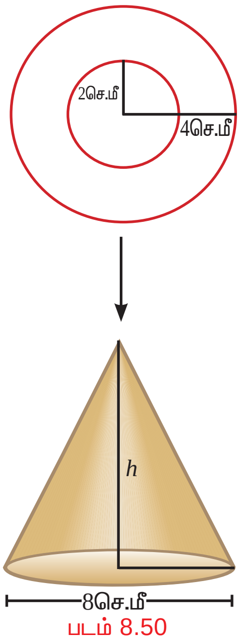
எனவே, கித்தான் துணியின் பரப்பு = 5082 ச.மீ

1 ச.மீ கித்தான் துணியின் விலை = ₹12.50

எனவே, தேவையான கித்தான் துணியின் மொத்த விலை = 5082×12.5 = ₹63525.

எடுத்துக்காட்டு 8.24

ஒரு உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் விட்டங்கள் முறையே 8 செ.மீ மற்றும் 4 செ.மீ. இக்கோளமானது உருக்கப்பட்டு 8 செ.மீ விட்டமுள்ள நேர் வட்ட திண்மக் கூம்பாக மாற்றப்பட்டால் கூம்பின் உயரத்தைக் காண்க.



படம் 8.50

தீர்வு R மற்றும் r என்பன முறையே உள்ளீடற்ற கோளத்தின் வெளி மற்றும் உள் ஆரம் என்க.

h மற்றும் r_1 என்பன முறையே நேர் வட்டக் கூம்பின் உயரம் மற்றும் ஆரம் என்க.

உள்ளீடற்ற கோளம்		கூம்பு
வெளிவிட்டம்	உள்விட்டம்	
$2R = 8$ செ.மீ	$2r = 4$ செ.மீ	$2r_1 = 8$ செ.மீ
$\Longrightarrow R = 4$ செ.மீ	$\Longrightarrow r = 2$ செ.மீ	$\Longrightarrow r_1 = 4$ செ.மீ

உள்ளீடற்ற கோளம் உருக்கப்பட்டு ஒரு திண்மக் கூம்பாக வார்க்கப்பட்டால்

திண்மக் கூம்பின் கன அளவு = உள்ளீடற்றக் கோளத்தின் கன அளவு

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{4}{3}\pi[R^3 - r^3]$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times h = \frac{4}{3}\times\pi\times(4^3-2^3)$$

$$\Longrightarrow \qquad h = \frac{64-8}{4} = 14$$

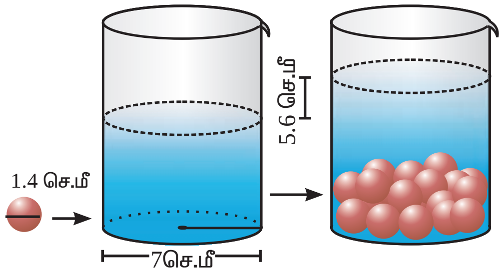
ஆகவே, கூம்பின் உயரம் $h = 14$ செ.மீ.

எடுத்துக்காட்டு 8.25

7 செ.மீ விட்டமுள்ள உருளை வடிவ முகவையில் சிறிதளவு தண்ணீர் உள்ளது. அதில் ஒவ்வொன்றும் 1.4 செ.மீ விட்டமுள்ள சில கோள வடிவ பளிங்குக் கற்கள் போடப்படுகிறது. உருளையிலுள்ள நீரின் மட்டம் 5.6 செ.மீ உயர எத்தனை பளிங்கு கற்களை முகவையினுள் போடவேண்டும் எனக் காண்க ?

தீர்வு தேவையான பளிங்கு கற்களின் எண்ணிக்கையை n என்க. பளிங்கு கற்கள் மற்றும் உருளை வடிவ முகவையின் ஆரங்கள் முறையே r_1, r_2 என்க.

பளிங்குக் கற்கள்	உருளை வடிவ முகவை
விட்டம், $2r_1 = 1.4$ செ.மீ	விட்டம், $2r_2 = 7$ செ.மீ
ஆரம், $r_1 = 0.7$ செ.மீ	ஆரம், $r_2 = \frac{7}{2}$ செ.மீ



படம் 8.51

h என்பது கற்களைப் போட்ட பின்னர் தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரம் என்க.

$h = 5.6$ செ.மீ

பளிங்குக் கற்களை முகவையில் போட்ட பின்பு

உயர்ந்த தண்ணீர் மட்டத்தின் கனஅளவு = n பளிங்கு கற்களின் கன அளவு

$$\Longrightarrow \qquad \pi r_2^2 h = n\times\frac{4}{3}\pi r_1^3$$

$$n = \frac{3r_2^2 h}{4r_1^3}$$

$$n = \frac{3\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\times5.6}{4\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}} = 150.$$

எனவே, தேவையான பளிங்குக் கற்களின் எண்ணிக்கை = 150.

எடுத்துக்காட்டு 8.26

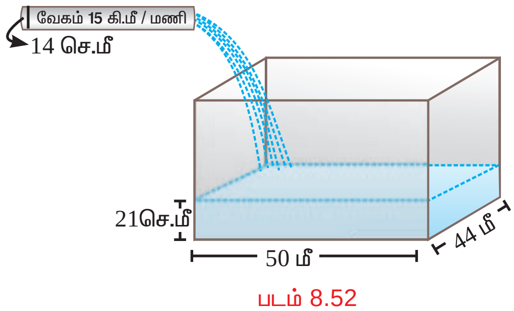
14 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு உருளை வடிவ குழாய் வழியாக, தண்ணீரை மணிக்கு **15** கி.மீ வேகத்தில் 50 மீ நீளமும் மற்றும் 44 மீ அகலமுள்ள ஒரு செவ்வக வடிவ தொட்டிக்குள் செலுத்தினால், தொட்டியில் 21 செ.மீ உயரத்திற்கு தண்ணீர் நிரம்ப எத்தனை மணி நேரமாகும் ? ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)

தீர்வு தண்ணீரின் வேகம் = 15 கி.மீ / மணி

= 15000 மீ / மணி

குழாயின் விட்டம், $2r = 14$ செ.மீ

$$r = \frac{7}{100} \text{ மீ}$$



படம் 8.52

h என்பது தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரம் என்க

$$h = 21 \text{ செ.மீ} = \frac{21}{100} \text{ மீ}$$

தற்போது 1 மணி நேரத்தில் குழாய் வழியே வெளியேறிய தண்ணீரின் கன அளவு

$= $ குழாயின் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு $\times$ நேரம் $\times$ வேகம்

$= \pi r^2 \times 1 \times 15000$

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{100} \times \frac{7}{100} \times 15000$ க.செ.மீ

தொட்டியில் பாய்ச்சப்பட்ட தண்ணீரின் கன அளவு

$$lbh = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

தொட்டியில் T மணி நேரம் தண்ணீர் பாய்ச்சப்பட்டது எனக் கொள்வோம்

ஆகவே, T மணி நேரத்தில் குழாய் வழியே வெளியேற்றப்பட்ட தண்ணீரின் கன அளவு $=$ தொட்டியில் பாய்ச்சப்பட்ட தண்ணீரின் கனஅளவு

$$\Longrightarrow \quad \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{100}\right)^2 \times T \times 15000 = 50 \times 44 \times \frac{21}{100}$$

ஆகவே $T = 2$ மணி

எனவே, நீர் மட்டம் 21 செ.மீ உயர 2 மணி நேரமாகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.27

55செ.மீ$\times$40செ.மீ$\times$15செ.மீ என்ற அளவுகள் கொண்ட கனச்செவ்வக வடிவ திண்ம இரும்புப் பலகை உருக்கப்பட்டு ஒரு குழாயாக வார்க்கப்படுகிறது. அக்குழாயின் வெளி விட்டம் மற்றும் தடிமன் முறையே 8 செ.மீ மற்றும் 1 செ.மீ எனில், அக்குழாயின் நீளத்தைக் காண்க. ($\pi = \frac{22}{7}$ என்க.)

தீர்வு h_1 என்பது குழாயின் நீளம் என்க.

இரும்புக் குழாயின் வெளி மற்றும் உள் ஆரங்கள் முறையே R மற்றும் r என்க.

இரும்புப்பலகையின் கனஅளவு $= l\,b\,h = 55 \times 40 \times 15$ என்க.

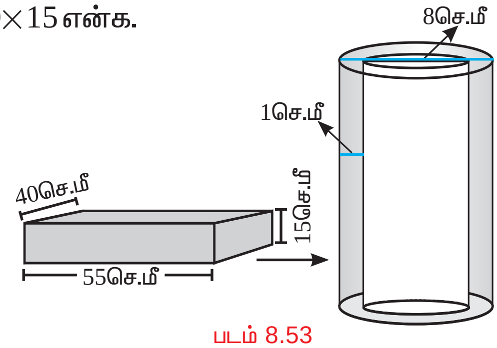
இரும்புக் குழாய் :

வெளி விட்டம், $2R = 8$ செ.மீ

எனவே,வெளி ஆரம், $R = 4$ செ.மீ

தடிமன், $w = 1$ செ.மீ

எனவே, உள் ஆரம் $r = R - w = 4 - 1 = 3$ செ.மீ



படம் 8.53

தற்போது, இரும்புக்குழாயின் கன அளவு $=$ இரும்புப் பலகையின் கன அளவு

$$\Longrightarrow \quad \pi h_1 (R + r)(R - r) = lbh$$

$$\frac{22}{7} \times h_1 (4 + 3)(4 - 3) = 55 \times 40 \times 15$$

ஆகவே, குழாயின் நீளம், $h_1 = 1500$ செ.மீ $= 15$ மீ.

www.tntextbooks.in

பயிற்சி 8.3

1. ஒரு விளையாட்டு பம்பரமானது (Top) கூம்பின் மீது அரைக்கோளம் இணைந்த வடிவில் உள்ளது. அரைக்கோளத்தின் விட்டம் 3.6 செ.மீ மற்றும் பம்பரத்தின் மொத்த உயரம் 4.2செ.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

2. ஒரு கன உருவம், அரைக்கோளத்தின் மீது உருளை இணைந்த வடிவில் உள்ளது. அக்கனவுருவத்தின் விட்டம் மற்றும் மொத்த உயரம் முறையே 21 செ.மீ மற்றும் 25.5 செ.மீ எனில், அதன் கன அளவைக் காண்க.

3. ஒரு மருந்துக் குப்பியானது ஒரு உருளையின் இருபுறமும் அரைக்கோளங்கள் இணைந்த வடிவில் உள்ளது. மருந்துக் குப்பியின் மொத்த நீளம் 14 மி.மீ மற்றும் விட்டம் 5 மி.மீ எனில் அம்மருந்துக் குப்பியின் புறப்பரப்பைக் காண்க.

4. ஒரு கூடாரமானது உருளையின் மீது கூம்பு இணைந்த வடிவில் உள்ளது. கூடாரத்தின் மொத்த உயரம் 13.5 மீ மற்றும் விட்டம் 28 மீ. மேலும் உருளைப் பாகத்தின் உயரம் 3 மீ எனில், கூடாரத்தின் மொத்த புறப்பரப்பைக் காண்க.

5. களிமண்ணைப் பயன்படுத்தி ஒரு மாணவன் 48 செ.மீ உயரமும் 12 செ.மீ ஆரமும் கொண்ட நேர் வட்டதிண்மக் கூம்பைச் செய்தார். அக்கூம்பை மற்றொரு மாணவர் ஒரு திண்மக் கோளமாக மாற்றினார். அவ்வாறு மாற்றப்பட்ட புதிய கோளத்தின் ஆரத்தைக் காண்க.

6. 24 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு திண்ம உலோக கோளமானது உருக்கப்பட்டு 1.2 மி.மீ ஆரமுள்ள சீரான உருளைக் கம்பியாக மாற்றப்பட்டால், அக்கம்பியின் நீளத்தைக் காண்க.

7. 5 செ.மீ உள்வட்டஆரமும் 24 செ.மீ உயரமும் கொண்ட கூம்பு வடிவ பாத்திரத்தில் முழு அளவில் தண்ணீர் உள்ளது. இத்தண்ணீரானது 10 செ.மீ உள்ஆரமுள்ள உருளை வடிவ காலிப் பாத்திரத்திற்குப் மாற்றப்படும்போது, உருளைப் பாத்திரத்தில் உள்ள நீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

8. சிறிதளவு தண்ணீர் நிரப்பப்பட்ட 12 செ.மீ விட்டமுள்ள உருளை வடிவப் பாத்திரத்தில் 6 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு திண்மக் கோளத்தை முழுவதுமாக மூழ்கச் செய்தால், உருளை வடிவப் பாத்திரத்தில் உயர்ந்த நீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

9. 7 செ.மீ உள் ஆரம் கொண்ட உருளை வடிவ குழாயின் வழியே 5 செ.மீ / வினாடி வேகத்தில் தண்ணீர் பாய்கிறது. அரை மணி நேரத்தில் அக்குழாய் வழியே பாய்ந்த தண்ணீரின் கன அளவைக் (லிட்டரில்) காண்க.

10. 4 மீ விட்டமும் 10 மீ உயரமுள்ள உருளை வடிவத் தொட்டியிலுள்ள தண்ணீரானது 10 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு உருளை வடிவ குழாய் வழியே மணிக்கு 2.5 கி.மீ வேகத்தில் வெளியேற்றப்படுகிறது. தொட்டியில் பாதியளவு தண்ணீர் வெளியேற்றப்பட ஆகும் நேரத்தைக் காண்க. (ஆரம்ப நிலையில் தொட்டி முழுவதும் தண்ணீர் நிரப்பப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்க.)

11. 18 செ.மீ ஆரமுள்ள திண்ம உலோகக் கோளமானது உருக்கப்பட்டு மூன்று சிறிய வெவ்வேறு அளவுள்ள கோளங்களாக வார்க்கப்படுகிறது. அவ்வாறு வார்க்கப்பட்ட இரண்டு திண்மக் கோளங்களின் ஆரங்கள் முறையே 2 செ.மீ மற்றும் 12 செ.மீ எனில் மூன்றாவது கோளத்தின் ஆரத்தைக் காண்க.

12. ஒரு உள்ளீடற்ற உருளை வடிவக் குழாயின் நீளம் 40 செ.மீ. அதன் உள் மற்றும் வெளி ஆரங்கள் முறையே 4 செ.மீ மற்றும் 12 செ.மீ. அவ்வுள்ளீடற்ற உருளைக் குழாய் உருக்கப்பட்டு 20 செ.மீ நீளமுள்ள திண்ம நேர் வட்ட உருளையாக மாற்றும்போது கிடைக்கும் புதிய உருளையின் ஆரத்தைக் காண்க.

www.tntextbooks.in

13. 8 செ.மீ விட்டமும் 12 செ.மீ உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்ட திண்ம இரும்புக் கூம்பானது உருக்கப்பட்டு 4 மி.மீ ஆரமுள்ள திண்மக் கோள வடிவ குண்டுகளாக வார்க்கப்பட்டால் கிடைக்கும் கோள வடிவ குண்டுகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

14. 12செ.மீ விட்டமும் 15செ.மீ உயரமும் கொண்ட நேர்வட்ட உருளை முழுவதும் பனிக்கூழினால் (ice cream) நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இப்பனிக்கூழானது 6 செ.மீ விட்டமும், 12 செ.மீ உயரமும் கொண்ட மேற்புறம் அரைக்கோளம் இணைந்த வடிவிலமைந்த கூம்பில் நிரப்பப்படுகிறது. எத்தனை கூம்புகளில் பனிக்கூழினை முழுவதுமாக நிரப்பலாம் எனக் காண்க.

15. 4.4 மீ நீளமும் 2 மீ அகலமும் கொண்ட ஒரு கனச் செவ்வக வடிவத் தொட்டியில் மழைநீர் சேகரிக்கப் படுகிறது. இத்தொட்டியில் 4 செ.மீ உயரத்திற்கு சேகரிக்கப்பட்ட மழை நீரானது 40செ.மீ ஆரமுள்ள உருளை வடிவ காலிப் பாத்திரத்திற்கு மாற்றப்படும்போது அப்பாத்திரத்தில் உள்ள தண்ணீர் மட்டத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

16. மணலால் நிரப்பப்பட்ட ஒரு உருளை வடிவ வாளியின் உயரம் 32 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 18 செ.மீ. அம்மணல் முழுவதும் தரையில் ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு வடிவில் கொட்டப்படுகிறது. அவ்வாறு கொட்டப்பட்ட மணற் கூம்பின் உயரம் 24 செ.மீ எனில், அக்கூம்பின் ஆரம் மற்றும் சாயுயரத்தைக் காண்க.

17. 14 மீ விட்டமும் மற்றும் 20 மீ ஆழமுள்ள ஒரு கிணறு உருளை வடிவில் வெட்டப்படுகிறது. அவ்வாறு வெட்டும்போது தோண்டியெடுக்கப்பட்ட மண் சீராக பரப்பப்பட்டு 20 மீ $\times$ 14 மீ அளவுகளில் அடிப்பக்கமாகக் கொண்ட ஒரு மேடையாக அமைக்கப்பட்டால், அம்மேடையின் உயரம் காண்க.

பயிற்சி 8.4

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. 1செ.மீ ஆரமும் மற்றும் 1 செ.மீ உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு
   (A) π செ.மீ ^{2} (B) 2π செ.மீ ^{2} (C) 3π செ.மீ ^{3} (D) 2 செ.மீ ^{2}

2. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் ஆரமானது அதன் உயரத்தில் பாதி எனில் அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பு
   (A) $\frac{3}{2}\pi h$ ச.அ (B) $\frac{2}{3}\pi h^2$ ச.அ (C) $\frac{3}{2}\pi h^2$ ச.அ (D) $\frac{2}{3}\pi h$ ச.அ

3. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் அடிப்பக்கப் பரப்பு 80 ச. செ.மீ. அதன் உயரம் 5 செ.மீ எனில், அதன் கன அளவு
   (A) 400 செ.மீ ^{3} (B) 16 செ.மீ ^{3} (C) 200 செ.மீ ^{3} (D) $\frac{400}{3}$ செ.மீ ^{3}

4. ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் மொத்த புறப்பரப்பு 200 π ச. செ.மீ. மற்றும் அதன் ஆரம் 5 செ.மீ எனில் அதன் உயரம் மற்றும் ஆரத்தின் கூடுதல்
   (A) 20 செ.மீ (B) 25 செ.மீ (C) 30 செ.மீ (D) 15 செ.மீ

5. a அலகுகள் ஆரமும், b அலகுகள் உயரமும் கொண்ட ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் வளைபரப்பு
   (A) $\pi a^2 b$ ச.செ.மீ (B) $2\pi ab$ ச.செ.மீ (C) 2π ச.செ.மீ (D) 2 ச.செ.மீ

6. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பு மற்றும் நேர்வட்ட உருளையின் ஆரமும் உயரமும் முறையே சமம் உருளையின் கன அளவு 120 செ.மீ ^{3} எனில், கூம்பின் கன அளவு
   (A) 1200 செ.மீ ^{3} (B) 360 செ.மீ ^{3} (C) 40 செ.மீ ^{3} (D) 90 செ.மீ ^{3}

www.tntextbooks.in

7. நேர் வட்டக் கூம்பின் விட்டம் மற்றும் உயரம் முறையே 12 செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ எனில் அதன் சாயுயரம்

(A) 10 செ.மீ (B) 20 செ.மீ (C) 30 செ.மீ (D) 96 செ.மீ

8. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு மற்றும் சாயுயரம் முறையே 120π செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பு

(A) 1200π செ.மீ ^{2} (B) 600π செ.மீ ^{2} (C) 300π செ.மீ ^{2} (D) 600 செ.மீ ^{2}

9. ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கன அளவு மற்றும் அடிப்பக்கப் பரப்பு முறையே 48π செ.மீ ^{3} மற்றும் 12π செ.மீ ^{2} எனில், அதன் உயரம்

(A) 6 செ.மீ (B) 8 செ.மீ (C) 10 செ.மீ (D) 12 செ.மீ

10. 5 செ.மீ உயரமும், 48 ச.செ.மீ அடிப்பக்கப் பரப்பும் கொண்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கன அளவு

(A) 240 செ.மீ ^{3} (B) 120 செ.மீ ^{3} (C) 80 செ.மீ ^{3} (D) 480 செ.மீ ^{3}

11. இரண்டு உருளைகளின் உயரங்கள் முறையே 1:2 மற்றும் அவற்றின் ஆரங்கள் முறையே 2:1 ஆகிய விகிதங்களிலிருப்பின், அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(A) 4 : 1 (B) 1 : 4 (C) 2 : 1 (D) 1 : 2

12. 2 செ.மீ ஆரம் உள்ள ஒரு கோளத்தின் வளைபரப்பு

(A) 8π செ.மீ ^{2} (B) 16 செ.மீ ^{2} (C) 12π செ.மீ ^{2} (D) 16π செ.மீ ^{2}.

13. ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் விட்டம் 2 செ.மீ எனில் அதன் மொத்த புறப்பரப்பு

(A) 12 செ.மீ ^{2} (B) 12π செ.மீ ^{2} (C) 4π செ.மீ ^{2} (D) 3π செ.மீ ^{2}.

14. $\frac{9}{16}\pi$ க.செ.மீ. கன அளவு கொண்ட கோளத்தின் ஆரம்

(A) $\frac{4}{3}$ செ.மீ (B) $\frac{3}{4}$ செ.மீ (C) $\frac{3}{2}$ செ.மீ (D) $\frac{2}{3}$ செ.மீ.

15. இரண்டு கோளங்களின் வளைபரப்புகளின் விகிதம் 9 : 25. அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(A) 81 : 625 (B) 729 : 15625 (C) 27 : 75 (D) 27 : 125.

16. a அலகுகள் ஆரம் கொண்ட திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

(A) $2\pi a^2$ ச.அ (B) $3\pi a^2$ ச.அ (C) $3\pi a$ ச.அ (D) $3a^2$ ச.அ.

17. 100π ச.செ.மீ வளைபரப்பு கொண்ட கோளத்தின் ஆரம்

(A) 25 செ.மீ (B) 100 செ.மீ (C) 5 செ.மீ (D) 10 செ.மீ.

18. ஒரு கோளத்தின் வளைபரப்பு 36π ச.செ.மீ எனில், அதன் கன அளவு

(A) 12π செ.மீ ^{3} (B) 36π செ.மீ ^{3} (C) 72π செ.மீ ^{3} (D) 108π செ.மீ ^{3}

19. 12π செ.மீ ^{2} மொத்தப்பரப்பு கொண்ட திண்ம அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு

(A) 6π செ.மீ ^{2} (B) 24π செ.மீ ^{2} (C) 36π செ.மீ ^{2} (D) 8π செ.மீ ^{2}.

20. ஒரு கோளத்தின் ஆரமானது மற்றொரு கோளத்தின் ஆரத்தில் பாதி எனில் அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம்

(A) 1 : 8 (B) 2: 1 (C) 1 : 2 (D) 8 : 1

21. ஒருதிண்மகோளத்தின்வளைபரப்பு 24செ.மீ.^{2} அந்தகோளத்தைஇரண்டுஅரைக்கோளங்களாகப் பிரித்தால் கிடைக்கும் அரைக்கோளங்களில் ஒன்றின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

(A) 12 செ.மீ ^{2} (B) 8 செ.மீ ^{2} (C) 16 செ.மீ ^{2} (D) 18 செ.மீ ^{2}

22. இரண்டு கூம்புகள் சம ஆரங்கள் கொண்டுள்ளன. மேலும் அவற்றின் சாயுயரங்களின் விகிதம் 4 : 3 எனில், வளைபரப்புகளின் விகிதம்

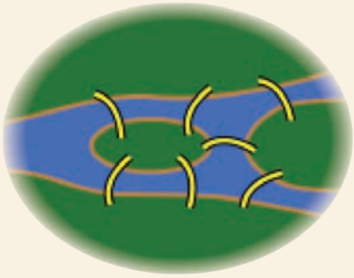
(A) 16 : 9 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

கோனிங்ஸ்பெர்க்கின் ஏழு பாலங்கள் (The Seven Bridges of Königsberg) என்ற புதிர் கணிதத்தில் ஒரு வரலாற்று சிறப்புப்பெற்ற கணக்காகும். புருஷ்யாவிலுள்ள கோனிங்ஸ் பெர்க் (தற்போதைய ருஷ்யாவில் காலிங்கிராடு) (The city of Königsberg in Prussia, now Kaliningrad, Russia) நகரமானது பிரிஜெல் ஆற்றின் (Pregel river) இறுபுறமும் அமைந்திருந்தது. மேலும் இரு பெரும் தீவுகளையும் கொண்டிருந்தது. இந்நகரம், இருபெரும் தீவுகள் மற்றும் அதன் நிலப்பரப்பு ஆகியன ஏழு பாலங்களால் இணைக்கப்பட்டிருந்தது.

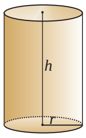
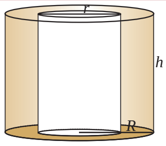
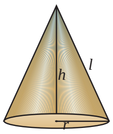
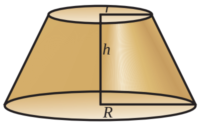
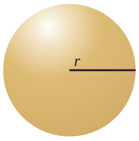
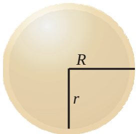
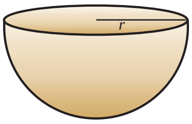
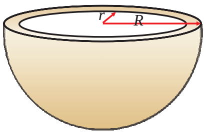
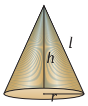
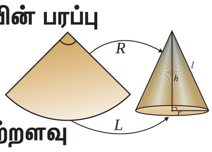
ஒரே ஒரு முறை மட்டுமே அப்பாலங்களை கடந்து நகரத்தின் அனைத்துப் பகுதிகளுக்கும் செல்வதற்கான வழிகாணுதலில் ஒரு சிக்கல் எழுந்தது. பாலங்கள் அல்லாது வேறு வழியில் தீவுகளை அடைய முடியாது. ஒவ்வொரு பாலத்தையும் ஒரே ஒரு முறை மட்டுமே முழுவதுமாக பயன்படுத்த வேண்டும் என்ற நிபந்தனையும் விதிக்கப்பட்டிருந்தது. (ஒருவர் பாலத்தினை பாதிதூரம் கடந்து சென்று, பின்னர் திரும்பச் சென்று வேறு வழியில் மீதி பாதி தூரத்தை கடக்க கூடாது).

1735-ல் லியோன்னார்டு ஆய்லர் (Leonhard Euler) இவ்வினாவிற்கு தீர்வு இல்லை என நிரூபித்தார். இத் தீர்வில் ஆய்லர் பயன்படுத்திய எதிர்மறையான முடிவுகள் கோல இயலுக்கு (Graph theory) வழிகோலியது. மேலும் அம்முடிவுகள் திணைய இயலுக்கும் (Topology) அடிப்படையாக அமைந்தன.

$\Longleftrightarrow$



நினைவிற்கொள்க

வ.எண்	பெயர்	படம்	வளைபரப்பு (Curved Surface area)	மொத்தப் புறப்பரப்பு (Total surface area)	கனஅளவு (Volume)
1	**நேர்வட்ட திண்ம உருளை** (Right circular cylinder)		$2\pi rh$	$2\pi r(h+r)$	$\pi r^2 h$
2	**நேர்வட்ட உள்ளீடற்ற உருளை** (Right circular hollow cylinder)		$2\pi h(R+r)$	$2\pi(R+r)(R-r+h)$	$\pi R^2 h - \pi r^2 h$ $= \pi h(R^2 - r^2)$ $= \pi h(R+r)(R-r)$
3	**நேர்வட்ட திண்மக் கூம்பு** (Right circular cone)		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
4	**இடைக்கண்டம்** (Frustum of a cone)		- - - - - - - -	- - - - - - - -	$\frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$
5	**திண்மக்கோளம்** (Solid sphere)		$4\pi r^2$	- - -	$\frac{4}{3}\pi r^3$
6	**உள்ளீடற்ற கோளம்** (Hollow sphere)		- - -	- - -	$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$
7	**திண்ம அரைக்கோளம்** (Solid hemisphere)		$2\pi r^2$	$3\pi r^2$	$\frac{2}{3}\pi r^3$
8	**உள்ளீடற்ற அரைக்கோளம்** (Hollow hemisphere)		$2\pi(R^2 + r^2)$	$2\pi(R^2 + r^2) + \pi(R^2 - r^2)$ $= \pi(3R^2 + r^2)$	பயன்படுத்தப்பட்ட உலோகத்தின் கனஅளவு = $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)$
9	**கூம்பு**  $l = \sqrt{h^2 + r^2}$, $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, $r = \sqrt{l^2 - h^2}$ **வளைபரப்பு = வட்டக்கோணப்பகுதியின் பரப்பு** $\pi rl = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$  **வில்லின் நீளம் = கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு** $L = 2\pi r$			**10. குழாய் வழியே பாயும் தண்ணீரின் கனஅளவு** **= {குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பு × வேகம் × நேரம்}** **11. உருக்கி தயாரிக்கப்படும் புதிய கன உருவங்களின் எண்ணிக்கை** $= \frac{\text{உருக்கப்பட்ட கன உருவத்தின் கனஅளவு}}{\text{உருவாக்கப்பட்ட ஒரு கன உருவத்தின் கனஅளவு}}$		
12	1 மீ ^{3} = 1000 லிட்டர், 1 டெசி மீ ^{3} = 1 லிட்டர், 1000 செ.மீ ^{3} = 1 லிட்டர், 1000 லிட்டர் = 1 கி.லி				

9

செய்முறை வடிவியல்

Give me a place to stand, and I shall move the earth
-Archimedes

- அறிமுகம்
- தொடுகோடுகள்
- முக்கோணங்கள்
- வட்டநாற்கரங்கள்

பிரம்ம குப்தர்
(598-668 கி.பி.)
இந்தியா

பழங்கால இந்தியாவின்
மிகச்சிறந்த கணித அறிஞர்

“பிரம்மாஸ்புத்தா சித்தாநந்தா” என்ற நூலை பிரம்ம குப்தர் எழுதினார். வடிவியிலில், வட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு காணும் சூத்திரம் இவரின் மிகச் சிறந்த கண்டுபிடிப்பு ஆகும்.

p, q, r மற்றும் s என்பன வட்டநாற்கரத்தின் பக்கங்கள் எனில், அதன் பரப்பு காணும் சூத்திரத்தை தோராயமாகவும் மற்றும் சரியாகவும் பின்வருமாறு கண்டறிந்தார்.

வட்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு

$=\left(\frac{p+r}{2}\right)\left(\frac{q+s}{2}\right)$ (தோராயமாக)

$=\sqrt{(t-p)(t-q)(t-r)(t-s)}$

(சரியாக)

இங்கு, $2t = p+q+r+s$.

9.1 அறிமுகம்

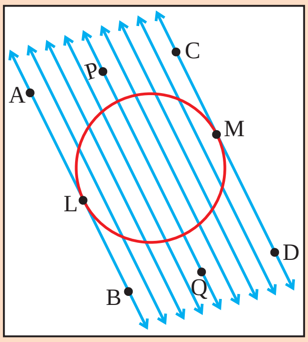
கி.மு.3000 துவக்கத்தில் எகிப்தில், தோன்றிய வடிவியல் நிலங்களை அளவிடப் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆரம்பகால வடிவியல் என்பது அனுபவத்தின் மூலமாக கண்டறியப்பட்ட, நீளம், கோணம், பரப்பு மற்றும் கனம் பற்றிய கோட்பாடுகளைக் கொண்டு வளர்ச்சியடைந்தது. நில அளவை, கட்டுமானம், வானியல் மற்றும் பிற பல்வகைத் தொழில்கள் போன்ற வற்றிலுள்ள நடைமுறைத் தேவைகளை நிறைவு செய்யும் பொருட்டு வடிவியல் கோட்பாடுகள் உருவாயின.

இயற்கணிதம், பகுப்பாய்வு போன்ற பாடப்பிரிவுகளை விட வடிவியலுக்கான முக்கியத்துவத்தைக் குறைக்கும் வகையில் பாடத்திட்டத்தில் மாற்றங்களை கொண்டுவர சிலர் சமீப காலத்தில் பல புதிய முயற்சிகளை மேற்கொண்டுள்ளனர். ஆனால் பல கணிதவியலறிஞர்கள் உறுதியாக இம்மாற்றத்தை எதிர்க்கின்றனர். உண்மையில் வடிவியல் கணிதத்தின் பிற பகுதிகளில் உள்ள பல கணித யுத்திகளை புரிந்து கொள்ள உதவுகிறது. இப்பாடப்பகுதியில் நாம் வட்டத்தின் தொடுகோடுகள், முக்கோணங்கள் மற்றும் வட்டநாற்கரங்களை கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு எவ்வாறு வரைவது எனக் காண்போம்.

நாம் ஒன்பதாம் வகுப்பில் வட்டத்தோடு தொடர்புடைய நாண் (chord), வட்டத்துண்டு (segment), வட்ட கோணப்பகுதி (sector) போன்றவற்றின் பொருளை அறிந்துள்ளோம். கீழ்க்காணும் செயல்கள் மூலம் வெட்டுக்கோடு (Secant), தொடுகோடு (Tangent) ஆகியனவற்றை நினைவு கூறுவோம்.

செய்து பார்

ஒரு காகிதத்தில் ஏதேனும் ஒரு ஆரம் கொண்ட வட்டம் வரைக. அவ்வட்டத்திற்கு PQ என்ற வெட்டுக்கோடு வரைக. PQ-க்கு இணையாகவும் அதன் இரு புறங்களிலும் பல இணை கோடுகளை வரைக. வெட்டுக் கோடுகள், வட்டத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் ஒன்றையொன்று

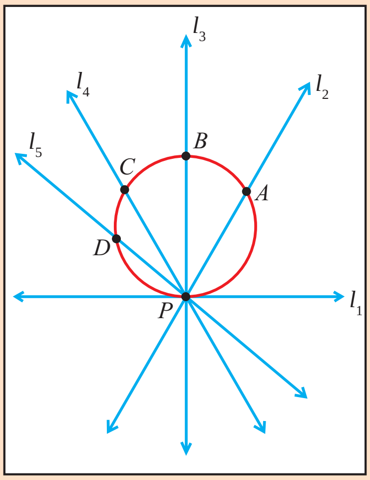


www.tntextbooks.in

நெருங்கி வருவதோடு, ஒரு நிலையில் அவ்விரு புள்ளிகளும் ஒன்றோடொன்று பொருந்துவதைக் காணலாம். PQ-க்கு இணையாக அமைந்த வெட்டுக்கோடுகளில் AB மற்றும் CD ஆகியன வட்டத்தை முறையே L மற்றும் M என்ற புள்ளிகளில் தொடுகின்றன. இங்கு கோடுகள் AB மற்றும் CD என்பன வட்டத்தின் மேல் முறையே L மற்றும் M-ல் அமைந்த தொடுகோடுகள் எனப்படும். மேலும் AB ஆனது CD-க்கு இணையாக அமைவதையும் நாம் காணலாம்.

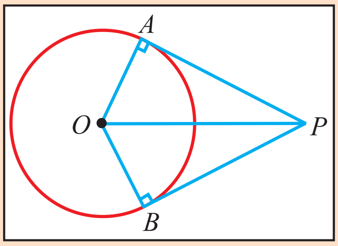
செய்துபார்

ஒரு வட்டம் வரைந்து அவ்வட்டத்தின் மேல் P என்ற புள்ளியை குறிக்கவும். படத்தில் காட்டியது போல் புள்ளி P வழியே பல கோடுகளை வரைக. P வழிச்செல்லும் இக்கோடுகள் வட்டத்தில் இரண்டு புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன. நேர்க்கோடுகள் l_2, l_3, l_4 மற்றும் l_5 ஆகியன வட்டத்தை முறையே A, B, C மற்றும் D என்ற மற்றொரு புள்ளியிலும் சந்திக்கின்றன. இக்கோடுகள் (l_2, l_3, l_4 மற்றும் l_5 ஆகியன) வட்டத்திலமைந்த வெட்டுக்கோடுகள் ஆகும். ஆனால் l_1 என்ற கோடு மட்டும் P என்ற ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே வட்டத்தை தொட்டுச் செல்கிறது. இக்கோடு l_1 ஆனது புள்ளி P-யில் அவ்வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடு எனப்படும்.



ஒரு வட்டத்தில், தொடுகோடும், அத்தொடு புள்ளியில் வரையப்பட்ட ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என்பதை நாம் அறிவோம்.

AP ஆனது வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்த P என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்தின் மேல் அமைந்த A என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு என்போம்.



செங்கோண ΔOPA -ல், $OA \perp AP$

$$OP^2 = OA^2 + AP^2 \quad \text{(பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் படி)}$$

$$AP = \sqrt{OP^2 - OA^2}\,.$$

9.2 ஒரு வட்டத்திற்கு தொடுகோடு வரைதல் (Construction of a tangent to a circle)

நாம் இப்போது கீழ்க்கண்ட முறைகளில் தொடுகோடுகள் வரைதல் பற்றி கற்போம்

(i) மையத்தைப் பயன்படுத்தி வரைதல்

(ii) தொடுகோடு - நாண் தேற்றத்தை (using tangent-chord theorem) பயன்படுத்தி வரைதல்.

9.2.1 வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரைதல் (மையத்தைப் பயன்படுத்தல்) (Construction of a tangent to a circle using the centre)

முடிவு

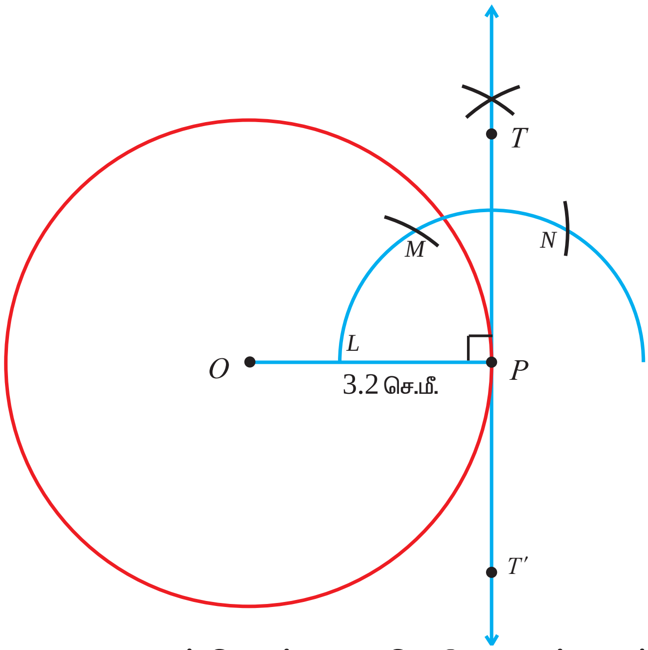
ஒரு வட்டத்தில் தொடுகோடும், அத்தொடுகோடு வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியின் வழியே செல்லும் ஆரமும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

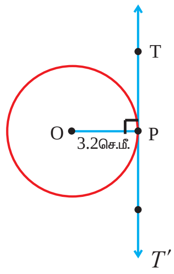
www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 9.1

3.2 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மேல் P என்ற ஒரு புள்ளியை குறித்து அப்புள்ளி வழியே ஒரு தொடுகோடு வரைக. (மையத்தை பயன்படுத்துக)

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்டத்தின் ஆரம் = 3.2 செ.மீ.





வரைமுறை:

(i) O-வை மையமாகக் கொண்டு 3.2 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

(ii) வட்டத்தின் மேல் P என்ற புள்ளியைக் குறித்து OP ஐ இணைக்க.

(iii) P-யை மையமாகக் கொண்டு OP-ல் L என்ற இடத்தில் வெட்டும்படி ஒரு வட்டவில் வரைக.

(iv) அவ்வில்லின் மேல் $\overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{MN} = LP$ என்றவாறு M, N என்ற புள்ளிகளை குறி.

(v) $\angle MPN$-ன் கோண இருசமவெட்டி PT வரைக.

(vi) TP ஐ T' வரை நீட்டி தேவையான தொடுகோடு $T'PT$ வரைக.

குறிப்புரை

P என்ற புள்ளி வழியாக OP-க்குச் செங்குத்தாக நேர்க்கோடு PT வரைந்தும் தொடுகோடு வரையலாம். இங்கு PT என்பது புள்ளி P-யில் அமைந்த தொடுகோடு ஆகும்.

9.2.2 தொடுகோடு–நாண் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி வட்டத்தின் மேல் அமைந்த புள்ளியில் தொடுகோடு வரைதல். (Construction of a tangent to a circle using the tangent-chord theorem)

முடிவு தொடுகோடு – நாண் தேற்றம்.

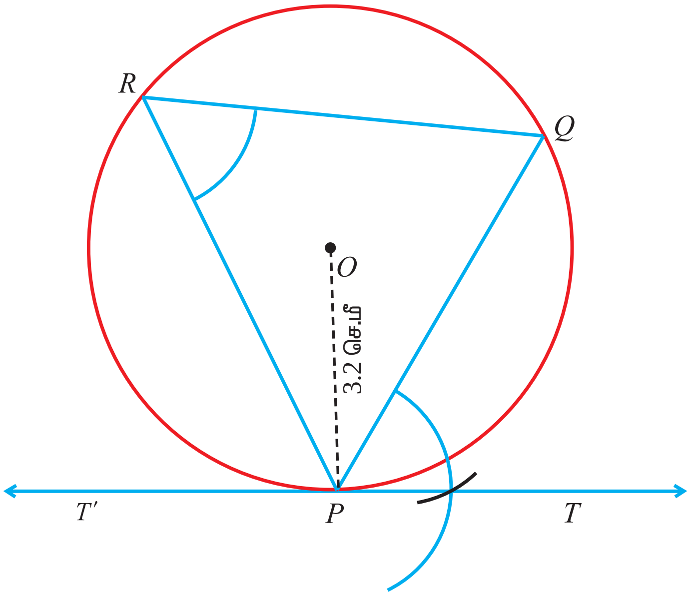
ஒரு வட்டத்திலுள்ள நாண் மற்றும் அதன் ஒரு முனையில் அமைந்த தொடுகோடு ஆகியவற்றிற்க் இடையேயுள்ள கோணம், நாணின் ஒன்றுவிட்ட வட்டத் துண்டில் அமையும் கோணத்திற்க்குச் சமம்.

www.tntextbooks.in

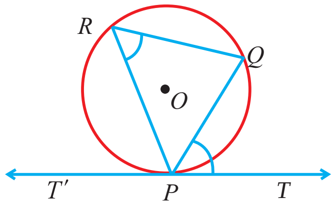
எடுத்துக்காட்டு 9.2

3.2 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மேல் P என்ற புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளியில் தொடுகோடு–நாண் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி தொடுகோடு வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : வட்டத்தின் ஆரம் = 3.2 செ.மீ.



உதவிப்படம்



வரைமுறை

(i) O-வை மையமாகக்கொண்டு 3.2 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

(ii) வட்டத்தின்மேல் P என்ற புள்ளியைக் குறிக்க.

(iii) புள்ளி Pவழியே ஏதேனும் ஒரு நாண் PQ வரைக.

(iv) P மற்றும் Q-ஐ தவிர்த்து R என்ற புள்ளியை புள்ளிகள் P,Q மற்றும் R என்பன கடிகார முள் நகரும் எதிர்திசையில் அமையுமாறு குறிக்கவும்.

(v) PR மற்றும் QR-ஆகியனவற்றை இணைக்க.

(vi) P -ல் $\angle QPT = \angle PRQ$ வரைக.

(vii) TP ஐ T'வரை நீட்டித் தேவையான தொடுகோடு $T'PT$-யை வரைக.

9.2.3 வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோட்டு சோடிகள் வரைதல். (Construction of pair of tangents to a circle from an external point)

முடிவுகள்

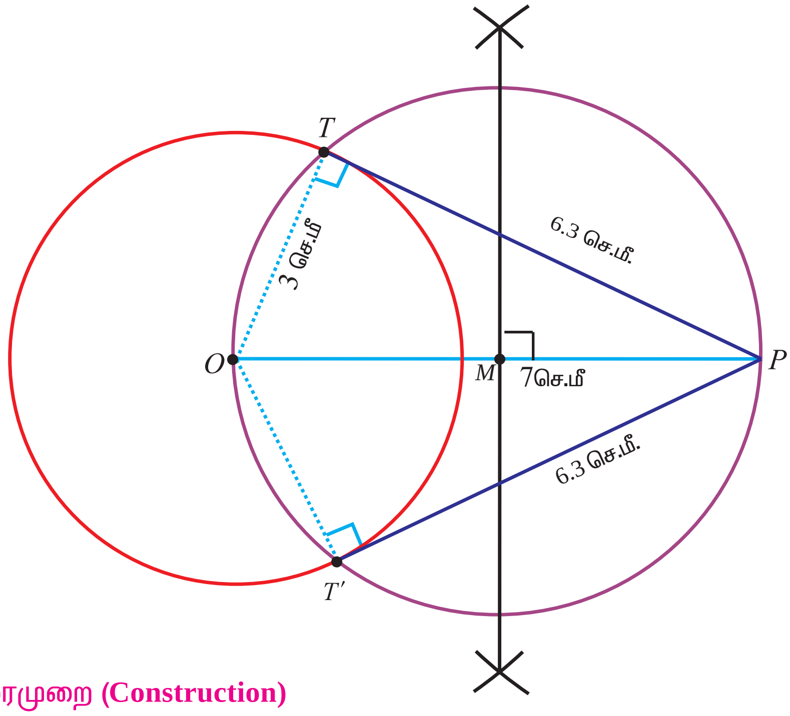
(i) வட்டத்திற்கு வெளியே அமைந்த புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு இரண்டு தொடுகோடுகள் வரையலாம்.

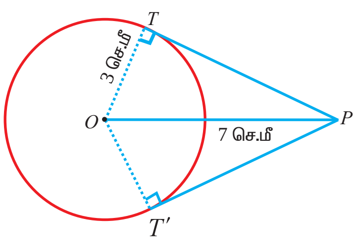
(ii) விட்டங்கள், வட்டப்பரிதியில் 90°–யை ஏற்படுத்தும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.3

3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 7 செ.மீ. தொலைவில் ஒரு புள்ளியைக் குறித்து, அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைக. மேலும் தொடுகோடுகளின் நீளத்தை அளந்து எழுதுக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்டத்தின் ஆரம் = 3 செ.மீ., OP = 7 செ.மீ.





வரைமுறை (Construction)

(i) O-வை மையமாகக் கொண்டு 3 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டம் வரைக.

(ii) வட்டத்திற்கு வெளியே, வட்ட மையம் O-யிலிருந்து 7 செ.மீ. தொலைவில் P என்ற புள்ளியை குறித்து OP-யை இணைக்க.

(iii) OP ன் மையக்குத்துக்கோடு வரைக. அது OP-யை M-ல் வெட்டட்டும்.

(iv) M-யை மையமாகவும், MO $(= MP)$வை ஆரமாகவும் கொண்டு மற்றொரு வட்டம் வரைக.

(v) இரண்டு வட்டங்களும் T மற்றும் T' -ல் சந்திக்கும்.

(vi) PT மற்றும் PT' வரைக. இவையே தேவையான தொடுகோடுகள் ஆகும். தொடுகோட்டின் நீளம், PT = 6.3 செ.மீ.

சரிபார்த்தல்

செங்கோண ΔOPT -ல்

$$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{7^2 - 3^2}$$
$$= \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} \qquad \therefore \; PT = 6.3 \text{ செ.மீ. (தோராயமாக)}$$

பயிற்சி 9.1

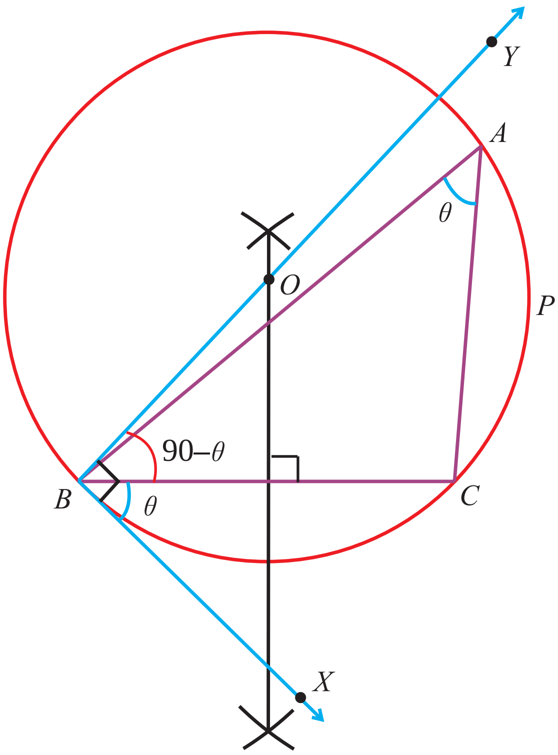
1. 4.2 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து அவ்வட்டத்தின் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க. வட்டத்தின் மையத்தைப் பயன்படுத்தி அப்புள்ளி வழியே தொடுகோடு வரைக.
2. 4.8 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மேல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறி. தொடுகோடு - நாண் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி அப்புள்ளி வழியே தொடுகோடு வரைக.
3. 10 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைக. வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 13 செ.மீ. தொலைவில் P என்ற புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு PA மற்றும் PB என்ற தொடுகோடுகள் வரைந்து அதன் நீளங்களை கணக்கிடுக.
4. 6 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வட்டம் வரைந்து அதன் மையத்திலிருந்து 10 செ.மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க. அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைந்து அதன் நீளங்களை கணக்கிடுக.
5. 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 9 செ.மீ தொலைவில் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்க. அப்புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு தொடுகோடுகள் வரைந்து, அதன் நீளங்களை கணக்கிடுக.

9.3 முக்கோணங்கள் வரைதல் (Construction of triangles)

நாம் ஏற்கனவே பக்க அளவுகளையும், கோணங்களையும் கொண்டு முக்கோணங்கள் வரைய கற்றுள்ளோம். இப்பிரிவில் நாம்

(i) அடிப்பக்கம் (base), உச்சிக்கோணம் (vertical angle) மற்றும் அடிப்பக்கத்திலிருந்து எதிர் உச்சிக்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு (altitude).

(ii) அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திலிருந்து எதிர் உச்சிக்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோடு (median) தரப்பட்டால் எவ்வாறு முக்கோணம் வரைவது எனக் காண்போம்.



கோணம் θ–ஐ உள்ளடக்கிய கோட்டுத் துண்டின் மேல் அமைந்த வட்டப்பகுதியை வரைதல் (Construction of a segment of a circle on a given line segment containing an angle θ)

கொடுக்கப்பட்ட கோணத்தை உள்ளடக்கிய கோட்டுத்துண்டின் மீது அமைந்த வட்டப் பகுதியை வரையும் முறையைக் காண்போம்.

வரைமுறை

(i) $\overline{BC}$ என்ற கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி B -ல், $\angle CBX = \theta$ வரைக.

(iii) $BY \perp BX$ வரைக.

www.tntextbooks.in

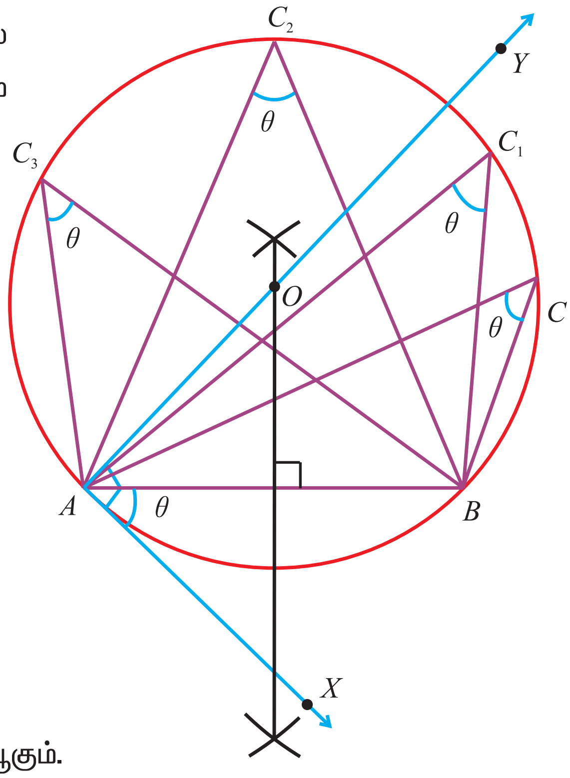
(iv) BC-ன் மையக்குத்துக்கோடு வரைக. அது BY-யை O-ல் சந்திக்கட்டும்.

(v) O-வை மையமாகவும், OB-யை ஆரமாகவும் கொண்டு ஓர் வட்டம் வரைக.

(vi) வட்டத்தின்மேல் A என்ற புள்ளியை குறிக்க. தொடுகோடு – நாண் தேற்றத்தின் படி, பெரிய வில் BAC ஆனது தேவையான உச்சிக்கோணம் θ கொண்ட வட்டப்பகுதி ஆகும்.

அடிப்பக்கம் மற்றும் உச்சிக்கோணம் கொண்டு முக்கோணம் வரைதல். (Construction of a triangle when its base and the vertical angle are given)

அடிப்பக்கமும், உச்சிக்கோணமும் தரப்பட்டால் எவ்வாறு முக்கோணம் வரையலாம் என்பதை பின்வரும் படிநிலைகளில் விவரிக்கலாம்.



வரைமுறை (Construction)

(i) கோட்டுத்துண்டு AB வரைக.

(ii) புள்ளி A-ல், $\angle BAX = \theta$ வரைக.

(iii) $AY \perp AX$ வரைக.

(iv) AB-ன் மையக்குத்துக்கோடு வரைந்து அது AY -யை O-ல் சந்திக்கட்டும்.

(v) O-வை மையமாகவும், OA ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக.

(vi) வட்டத்தின் மாற்று வட்டத்துண்டில் C என்ற புள்ளியை குறித்து AC மற்றும் BC யை இணைக்க.

(vii) $\triangle ABC$ என்பது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

மேலும், அதே அடிப்பக்க அளவும், உச்சிக்கோணமும் கொண்ட பல முக்கோணங்களில் ஒரு முக்கோணம் $\triangle ABC$ என நாம் அறியலாம்.

இங்கு, $AX \perp AY$. ஆகவே, $\angle XAY = 90^\circ$.

மேலும், $OB = OA$. (வட்டத்தின் ஆரங்கள்).

AX என்பது A என்ற புள்ளியில் அமைந்த தொடுகோடு மற்றும் C என்பது வட்டத்தின் மேல் அமைந்த ஒரு புள்ளி.

எனவே, $\angle BAX = \angle ACB$. (தொடுகோடு – நாண் தேற்றம்).

குறிப்புரை

மேலேயுள்ள படத்தில் வட்டத்தின் மேல் $C_1, C_2, C_3, \ldots$ ஆகிய புள்ளிகளை எடுத்துக் கொண்டால் முக்கோணங்கள் $\Delta ABC_1, \Delta ABC_2, \Delta ABC_3, \cdots$ ஆகியவை ஒரே அடிப்பக்கமும், சமஉச்சிக் கோணமும் கொண்ட முக்கோணங்களாக அமையும்.

www.tntextbooks.in

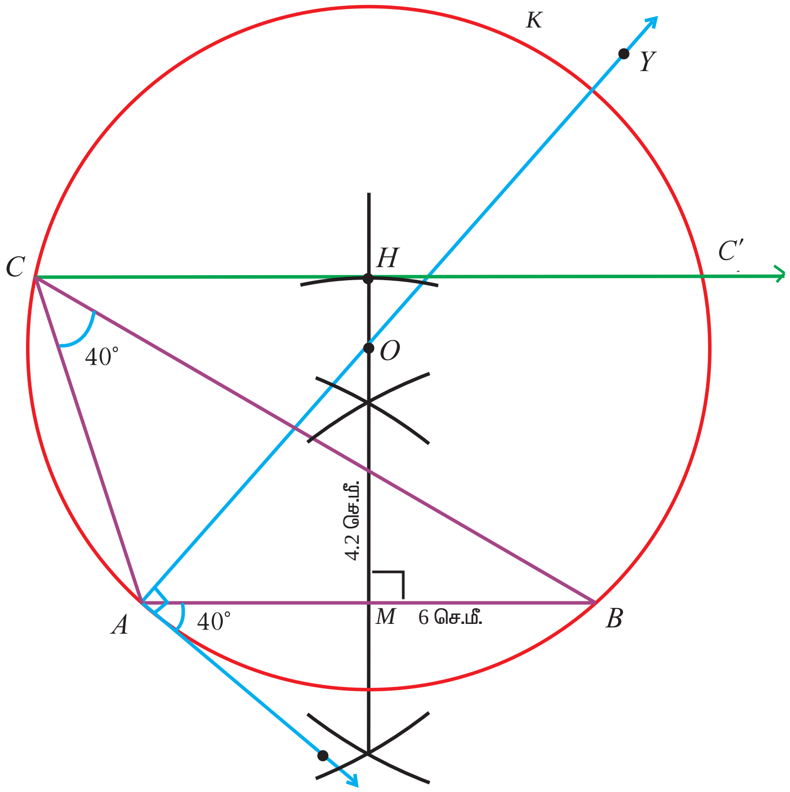
9.3.1 அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் உச்சியிலிருந்து அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோடு தரப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல். (Construction of a triangle when its base, the vertical angle and the altitude from the vertex to the base are given)

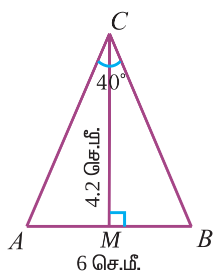
எடுத்துக்காட்டு 9.4

$AB = 6$ செ.மீ. $\angle C = 40^\circ$ மற்றும் உச்சி C-யிலிருந்து AB-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4.2 செ.மீ. கொண்ட ΔABC வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : ΔABC -ல் $AB = 6$ செ.மீ., $\angle C = 40^\circ$,

C-யிலிருந்து AB-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் = 4.2 செ.மீ.





வரைமுறை

(i) கோட்டுத்துண்டு $AB = 6$ செ.மீ வரைக.

(ii) $\angle BAX = 40^\circ$ என இருக்கும்படி AX வரைக.

(iii) $AY \perp AX$ வரைக.

(iv) AB-ன் மையக்குத்துக் கோடு வரைக. அது AY மற்றும் AB-ஆகியனவற்றை முறையே O மற்றும் M புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

(v) O-யை மையமாகவும், OA-வை ஆரமாகவும் கொண்ட வட்டம் வரைக.

(vi) வட்டப் பகுதி AKB என்பது கோணம் 40° கொண்டிருக்கும்.

(vii) மையக்குத்துக்கோடு MO-ல், $MH = 4.2$ செ.மீ இருக்கும் படி H என்ற புள்ளியை குறிக்க.

(viii) AB-க்கு இணையாக CHC' வரைக. அது வட்டத்தை C மற்றும் C'-களில் சந்திக்கும்.

(ix) AC மற்றும் BC இணைக்க இதுவே தேவையான முக்கோணம் ΔABC ஆகும்.

குறிப்புரை

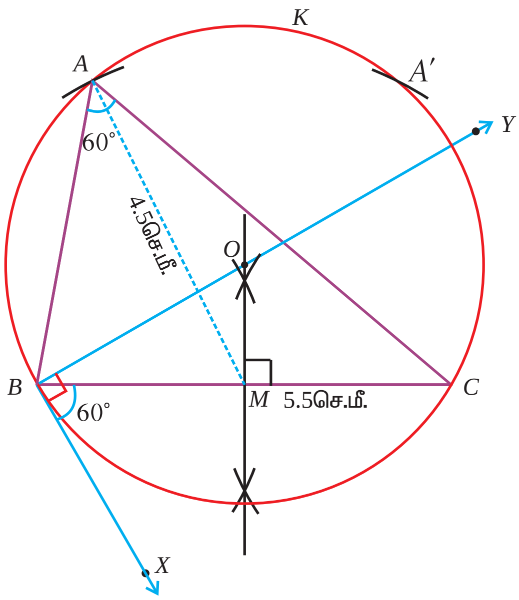
இங்கு, $\triangle ABC'$ என்பது தேவையான மற்றொரு முக்கோணம் ஆகும்.

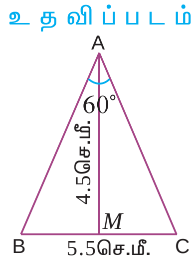
9.3.2 அடிப்பக்கம், உச்சிக்கோணம் மற்றும் அடிப்பக்கத்திற்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோடு தரப்பட்டால் முக்கோணம் வரைதல். (Construction of a triangle when its base, the vertical angle and the median from the vertex to the base are given)

எடுத்துக்காட்டு 9.5

அடிப்பக்கம் $BC = 5.5$ செ.மீ., $\angle A = 60^\circ$ மற்றும் உச்சி A-யிலிருந்து வரையப்பட்ட நடுக்கோடு AM-ன் நீளம் $= 4.5$ செ.மீ கொண்ட ΔABC வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : ΔABC-ல், $BC = 5.5$ செ.மீ., $\angle A = 60^\circ$, நடுக்கோடு $AM = 4.5$ செ.மீ.





வரைமுறை

(i) $BC = 5.5$ செ.மீ. அளவுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி B வழியே $\angle CBX = 60^\circ$ என இருக்கும் படி BX வரைக.

(iii) $BY \perp BX$ வரைக.

(iv) BC-ன் மையக்குத்துக்கோடு வரைக. அது BY மற்றும் BC-களை O மற்றும் M -புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

(v) O-வை மையமாகவும், OB-யை ஆரமாகவும் கொண்டு வட்டம் வரைக. வட்டத்தில் புள்ளி K-ஐக் குறிக்க.

(vi) பெரிய வில் BKC ஆனது கோணம் 60°-ஐக் கொண்டிருக்கும்.

(vii) M-ஐ மையமாகக் கொண்டு 4.5 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வில் வரைக. அது வட்டத்தை A மற்றும் A' புள்ளிகளில் சந்திக்கும்.

(viii) AB, AC ஆகியனவற்றை இணைக்க.

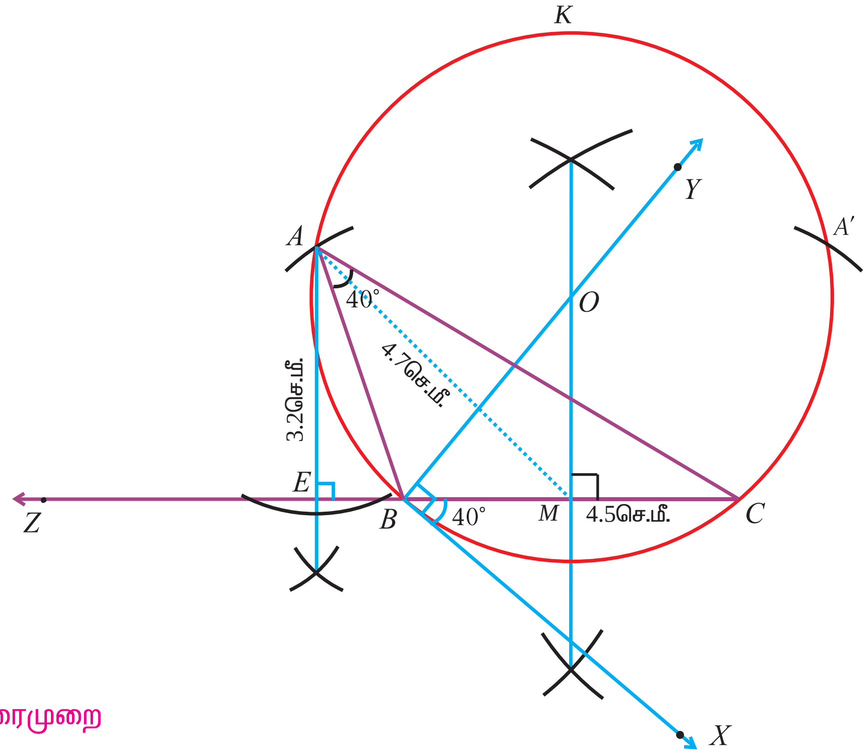
(ix) $\triangle ABC$ அல்லது $\Delta A'BC$ என்பது தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

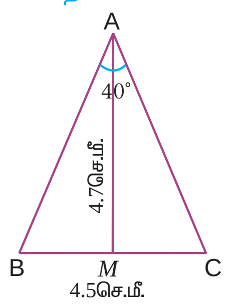
எடுத்துக்காட்டு 9.6

$BC = 4.5$ செ.மீ, $\angle A = 40^\circ$ மற்றும் உச்சி A-யிலிருந்து BC க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் $AM = 4.7$ செ.மீ. என இருக்கும் படி ΔABC வரைக. மேலும் A-யிலிருந்து BC-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : ΔABC-ல், $BC = 4.5$ செ.மீ., $\angle A = 40^\circ$ மற்றும்

நடுக்கோட்டின் நீளம் $AM = 4.7$ செ.மீ.





வரைமுறை

(i) $BC = 4.5$ செ.மீ என இருக்கும் படி ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) $\angle CBX = 40^\circ$ என இருக்கும் படி BX வரைக.

(iii) $BY \perp BX$ வரைக.

(iv) BC-ன் மையக் குத்துக்கோடு வரைக. அது BY மற்றும் BC-களை முறையே O மற்றும் M புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும்.

(v) O-வை மையமாகவும், OB-ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ஒரு வட்டம் வரைக. அதில் புள்ளி K-ஐக் குறிக்க.

(vi) பெரிய வில் BKC ஆனது, உச்சிக்கோணம் 40°-க் கொண்டிருக்கும்.

(vii) M-ஐ மையமாகக் கொண்டு 4.7 செ.மீ. ஆரமுள்ள ஒரு வில் வரைக. அது வட்டத்தை A மற்றும் A'-களில் சந்திக்கும்.

(viii) AB மற்றும் AC ஆகியனவற்றை இணைக்க. ΔABC அல்லது $\Delta A'BC$ தேவையான முக்கோணம் ஆகும்.

(ix) CB-ஐ CZ வரை நீட்டுக.

(x) $AE \perp CZ$ வரைக.

(xi) குத்துக்கோடு AE-ன் நீளம் 3.2 செ.மீ.

பயிற்சி 9.2

1. $AB = 5.2$செ.மீ நீளமுள்ள கோட்டுத்துண்டின் மீது 48° கோணம் ஏற்படுத்தும் வட்டப்பகுதியை அமைக்க.

2. ΔPQR-ல் அடிப்பக்கம் $PQ = 6$செ.மீ., $\angle R = 60^\circ$ மற்றும் உச்சி R-லிருந்து PQ-க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4 செ.மீ என இருக்குமாறு ΔPQR வரைக.

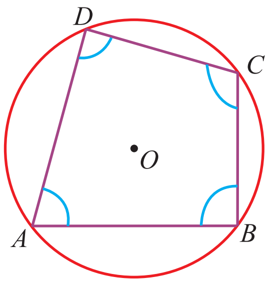
3. $PQ = 4$செ.மீ, $\angle R = 25^\circ$ மற்றும் உச்சி R-லிருந்து PQ -க்கு வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் 4.5செ.மீ என்ற அளவுகள் கொண்ட ΔPQR வரைக.

4. ΔABC-ல், $BC = 5$ செ.மீ., $\angle A = 45^\circ$ மற்றும் உச்சி A-லிருந்து BC-க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் 4 செ.மீ என இருக்கும் படி ΔABC வரைக.

5. $BC = 5$ செ.மீ., $\angle BAC = 40^\circ$ மற்றும் உச்சி A-லிருந்து BC-க்கு வரையப்பட்ட நடுக்கோட்டின் நீளம் 6 செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட ΔABC வரைக. மேலும் உச்சி A-லிருந்து வரையப்பட்ட குத்துக்கோட்டின் நீளம் காண்க.

9.4 வட்ட நாற்கரம் வரைதல் (Construction of cyclic quadrilateral)

ஒரு நாற்கரத்தின் நான்கு உச்சிகளும், ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் அமைந்தால் அந்நாற்கரம் வட்ட நாற்கரம் (Cyclic Quadrilateral) எனப்படும். வட்ட நாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்கள் மிகை நிரப்புக் கோணங்களாகும். அதாவது எதிர்கோணங்களின் கூடுதல் 180° ஆகும். ஆகவே தான், ஒரு வட்ட நாற்கரம் வரைய ஐந்து அளவுகளுக்குப் பதிலாக தகுந்த நான்கு அளவுகளே போதுமானது.



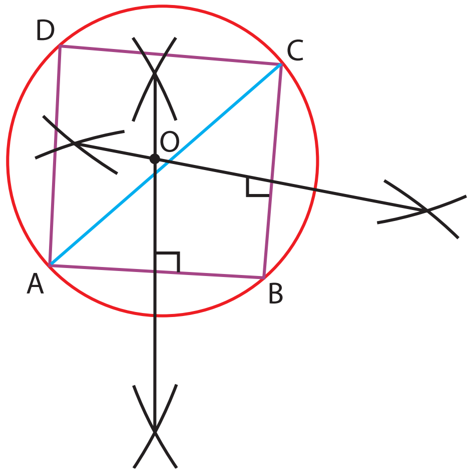
கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு வட்டநாற்கரம் $ABCD$ வரைதலில் உள்ள பல்வேறு படிநிலைகளைப் பற்றிக் காண்போம்.

(i) கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு ஒரு உதவிப்படம் வரைந்து $\triangle ABC$ அல்லது $\triangle ABD$ வரைக.

(ii) பக்கங்கள் AB மற்றும் BC-களுக்கு இரு சமக் கூறிடும் செங்குத்துக்கோடுகள் அதாவது மையக்குத்துக்கோடுகள் (Perpendicular bisectors) வரைக. அவைகள் O-வில் சந்திக்கட்டும்.

(iii) O-யை மையமாகவும், OA (= OB=OC) ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு $\triangle ABC$-ன் சுற்றுவட்டம் (Circumcircle) வரைக.

(iv) கொடுக்கப்பட்ட அளவினைக் கொண்டு நான்காவது உச்சி D-ஐக் காண்க. AD மற்றும் CD-க்களை இணைக்க.



(v) தற்போது, $ABCD$ என்பது தேவையான வட்ட நாற்கரம் ஆகும்.

கீழே (வரிசைப்படுத்தியுள்ளவாறு) கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் கொண்டு வட்ட நாற்கரம் எவ்வாறு வரைவது எனக் காண்போம்.

(i) மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டம். (ii) இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இரண்டு மூலைவிட்டங்கள். (iii) மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு கோணம். (iv) இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இரண்டு கோணங்கள். (v) ஒரு பக்கம் மற்றும் மூன்று கோணங்கள். (vi) இரண்டு பக்கங்கள், ஒரு கோணம் மற்றும் ஒரு இணை கோடு.

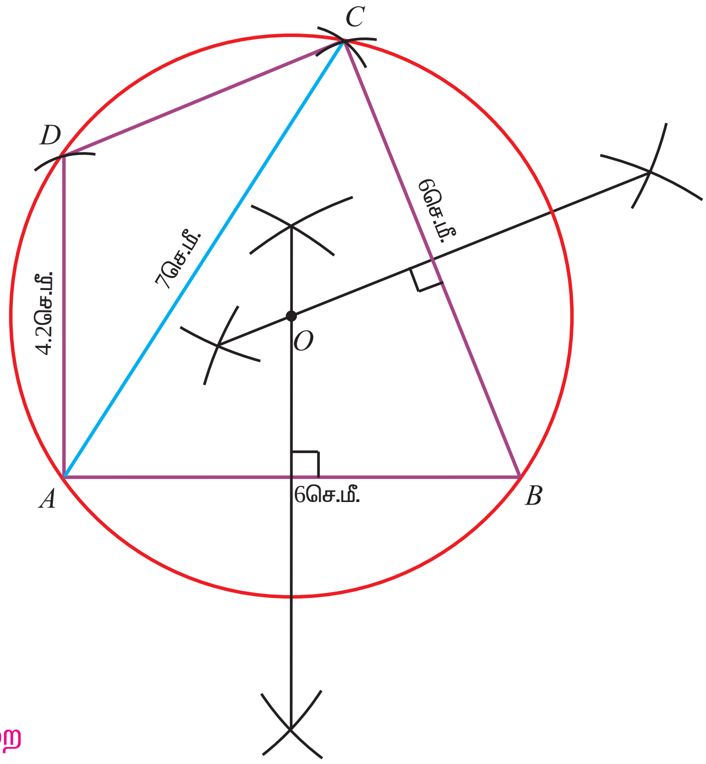
வகை I - மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு மூலைவிட்டம் கொடுக்கப்படும் போது நாற்கரம் வரைதல்

(Type I- Three sides and one diagonal of a cyclic quadrilateral are given)

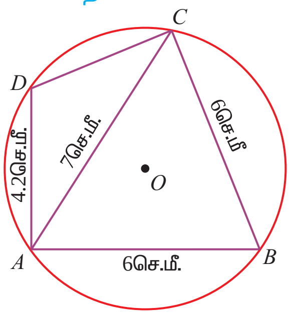
எடுத்துக்காட்டு 9.7

$AB = 6$ செ.மீ., $AC = 7$ செ.மீ., $BC = 6$ செ.மீ. மற்றும் $AD = 4.2$ செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : வட்ட நாற்கரம் $ABCD$-ல், $AB = 6$ செ.மீ., $AC = 7$ செ.மீ., $BC = 6$ செ.மீ. மற்றும் $AD = 4.2$ செ.மீ.



உதவிப் படம்



வரைமுறை

(i) உதவிப்படம் வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்க. $AB = 6$செ.மீ அளவுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளிகள் A மற்றும் B-யை மையமாகக் கொண்டு முறையே 7 செ.மீ மற்றும் 6 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டவிற்கள் (arcs) வரைக. அவைகள் அது C என்ற புள்ளியில் சந்திக்கும். AB மற்றும் AC -களை இணைக்க.

(iii) கோட்டுத்துண்டுகள் AB மற்றும் AC-களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி O-ஐ காண்க.

(iv) O-ஐ மையமாகவும் மற்றும் $OA\ (= OB = OC)$ -ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ΔABC-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(v) புள்ளி A-ஐ மையமாகக் கொண்டு 4.2செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டவில் வரைக அது சுற்று வட்டத்தை D-ல் சந்திக்கட்டும்.

(vi) AD மற்றும் CD ஆகியனவற்றை இணைக்க. இதுவே தேவையான வட்டநாற்கரம் $ABCD$ ஆகும்.

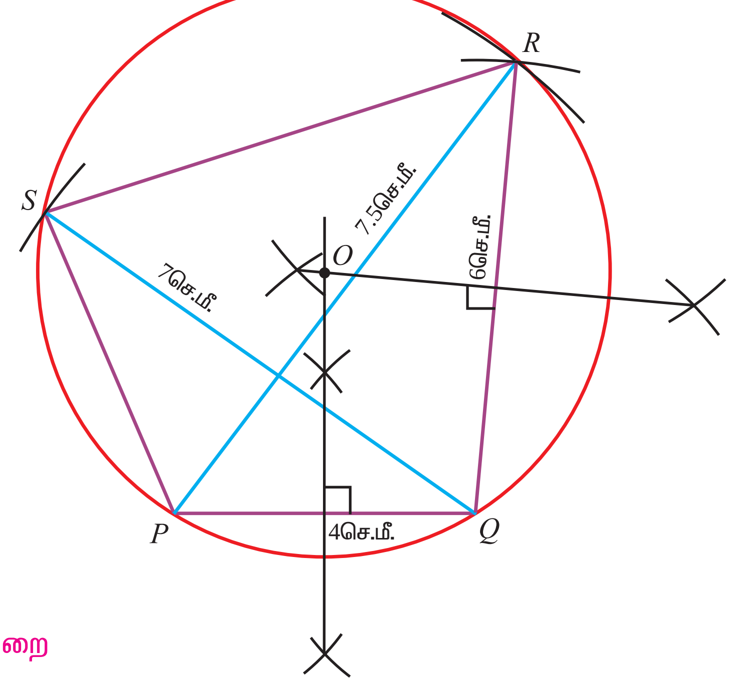
www.tntextbooks.in

வகை II - இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இரண்டு மூலைவிட்டங்கள் கொடுக்கப்படும் போது வட்டநாற்கரம் வரைதல் **(Type II -Two sides and two diagonals of a cyclic quadrilateral are given)**

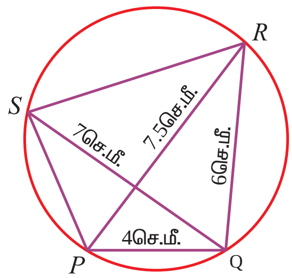
எடுத்துக்காட்டு 9.8

$PQ = 4$ செ.மீ, $QR = 6$ செ.மீ, $PR = 7.5$ செ.மீ மற்றும் $QS = 7$ செ.மீ அளவுகள் கொண்ட வட்டநாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை : வட்டநாற்கரம் $PQRS$-ல், $PQ = 4$ செ.மீ., $QR = 6$ செ.மீ., $PR = 7.5$ செ.மீ. மற்றும் $QS = 7$ செ.மீ.



உதவிப் படம்



வரைமுறை

(i) உதவிப்படம் வரைந்து, அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்கவும். கோட்டுத்துண்டு $PQ = 4$ செ.மீ. வரைக.

(ii) புள்ளிகள் P மற்றும் Q-யை மையமாக் கொண்டு முறையே 7.5செ.மீ. மற்றும் 6 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்ட விற்கள் வரைந்து, அவை சந்திக்கும் புள்ளி R ஐக் காண்க.

(iii) PR மற்றும் QR-களை இணைக்க.

(iv) PQ மற்றும் QR-ன் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி O-வைக் காண்க.

(v) O-வை மையமாகவும் மற்றும் $OP(=OQ=OR)$-யை ஆரமாகவும் கொண்டு ΔPQR-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vi) Q-வை மையமாகக் கொண்டு 7 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு வில் வரைக. அது சுற்று வட்டத்தை S -ல் சந்திக்கும்.

(vii) PS மற்றும் RS-களை இணைக்க.

(viii) தேவையான வட்டநாற்கரம் $PQRS$ ஆகும்.

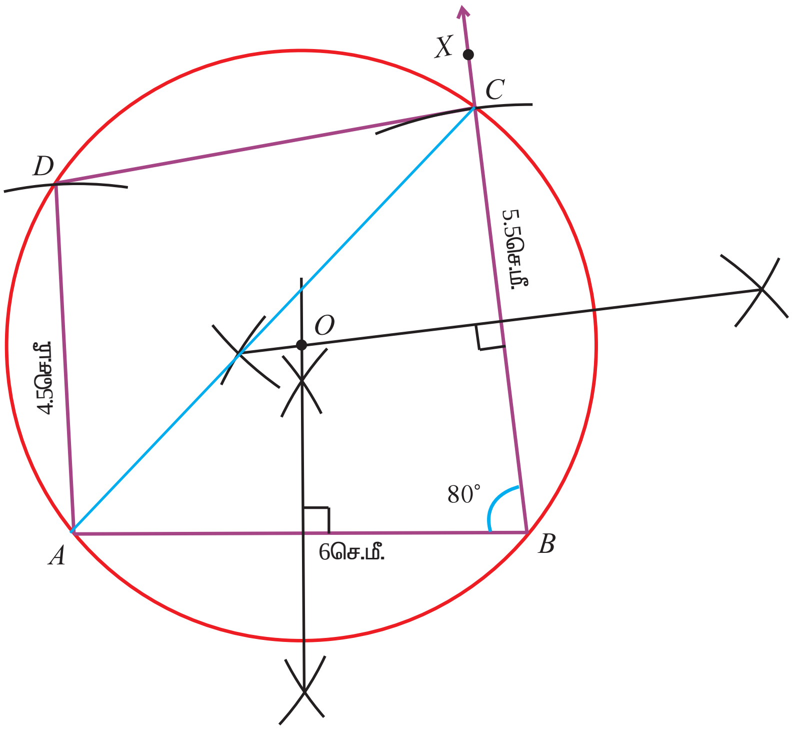
வகை III - மூன்று பக்கங்கள் மற்றும் ஒரு கோணம் கொடுக்கப்படும் போது வட்டநாற்கரம் வரைதல் (Type III Three sides and one angle of a cyclic quadrilateral are given)

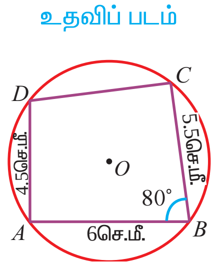
எடுத்துக்காட்டு 9.9

$AB = 6$ செ.மீ., $BC = 5.5$ செ.மீ., $\angle ABC = 80^\circ$ மற்றும் $AD = 4.5$ செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்ட நாற்கரம் $ABCD$-ல், $AB = 6$ செ.மீ., $BC = 5.5$ செ.மீ.,

$\angle ABC = 80^\circ$ மற்றும் $AD = 4.5$ செ.மீ.





(i) உதவிப்படம் வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக் குறிக்க.
$AB = 6$ செ.மீ நீளமுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி B வழியே $\angle ABX = 80^\circ$ எனும் படி BX வரைக.

(iii) புள்ளி B-யை மையமாகக் கொண்டு 5.5 செ.மீ. ஆரமுள்ள வட்டவில் வரைக. அது BX-யை சந்திக்கும் புள்ளி C என்க. AC-யை இணைக்க.

(iv) AB மற்றும் BC-க்களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி O என்க.

(v) O-வை மையமாகவும் மற்றும் OA $(= OB = OC)$ ஆரமாகவும் கொண்டு ΔABC-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vi) புள்ளி A-யை மையமாகக் கொண்டு 4.5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டவில் வரைக அது சுற்றுவட்டத்தை சந்திக்கும் புள்ளி D என்க.

(vii) AD மற்றும் CD ஆகியனவற்றை இணைக்க.

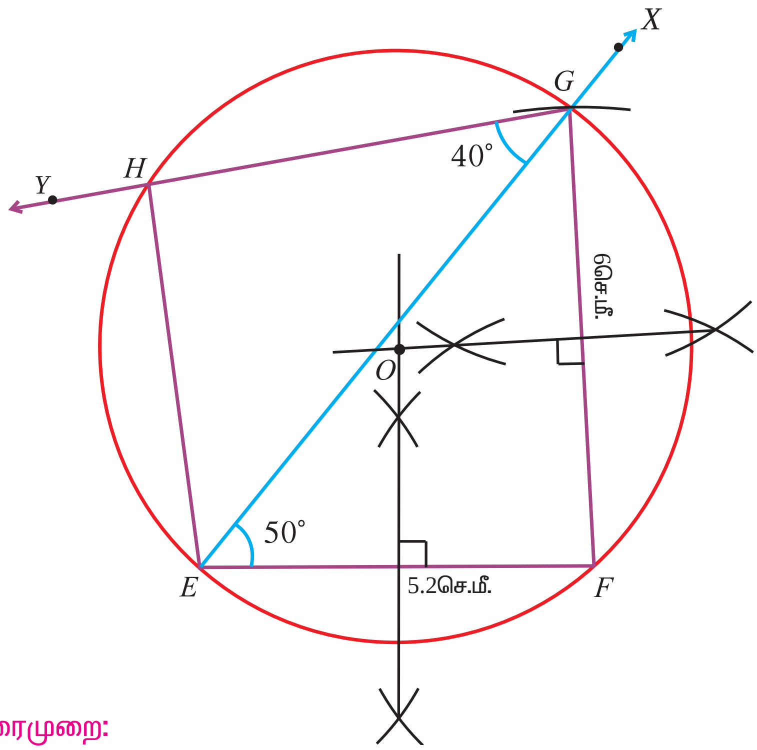
(viii) தேவையான வட்டநாற்கரம் $ABCD$ ஆகும்.

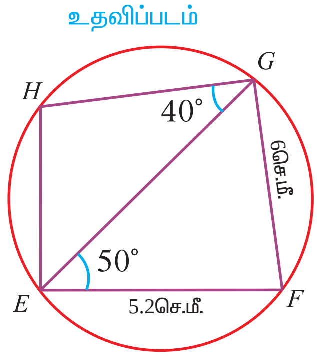
வகை IV - இரண்டு பக்கங்கள் மற்றும் இரண்டு கோணங்கள் கொடுக்கப்படும் போது வட்ட நாற்கரம் வரைதல் **(Type IV -Two sides and two angles of a cyclic quadrilateral are given)**

எடுத்துக்காட்டு 9.10

$EF = 5.2$ செ.மீ., $\angle GEF = 50^\circ$, $FG = 6$ செ.மீ. மற்றும் $\angle EGH = 40^\circ$ என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்டநாற்கரம் $EFGH$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்டநாற்கரம் $EFGH$ -ல், $EF = 5.2$ செ.மீ., $\angle GEF = 50^\circ$
$FG = 6$ செ.மீ. மற்றும் $\angle EGH = 40^o$





வரைமுறை:

(i) ஓர் உதவிப்படம் வரைந்து அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை குறிக்க.
$EF = 5.2$ செ.மீ. நீளமுள்ள கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி E-ல், $\angle FEX = 50^\circ$ எனும் படி EX வரைக.

(iii) F-யை மையமாகக் கொண்டு 6 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் வில் வரைந்து அது EXயை சந்திக்கும் புள்ளி G என்க.

(iv) FG-யை இணைக்க.

(v) EF மற்றும் FG-க்களின் மையக்குத்துக் கோடுகள் வரைக. அவைகள் புள்ளி O-ல் சந்திக்கட்டும்.

(vi) O-வை மையமாகவும் மற்றும் $OE\ (= OF = OG)$ -ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ΔEFG -ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vii) புள்ளி G ல், $\angle EGY = 40^\circ$ எனும்படி GY வரைக.

(viii) GY ஆனது சுற்றுவட்டத்தை வெட்டும் புள்ளி H என்க. EH-ஐ இணைக்க. தற்போது தேவையான வட்டநாற்கரம் $EFGH$ ஆகும்.

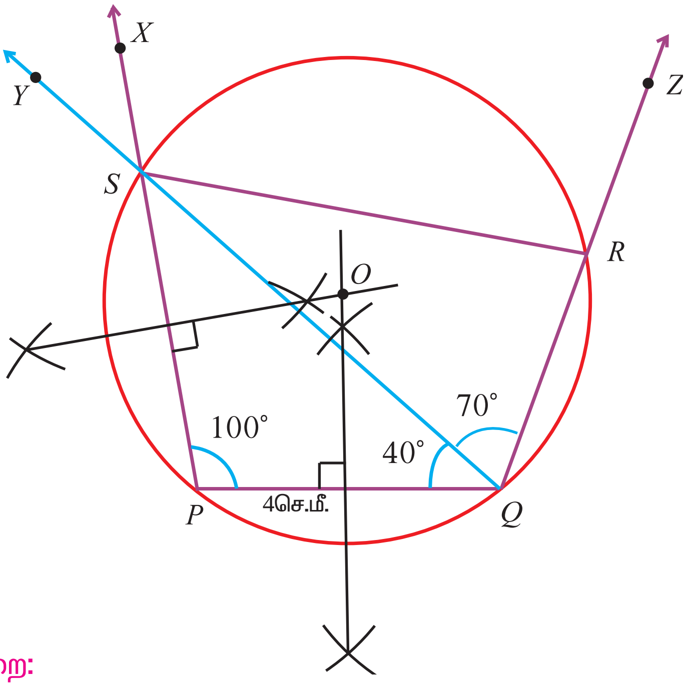
வகை V - ஒரு பக்கம், மற்றும் மூன்று கோணங்கள் கொடுக்கப்படும் போது வட்டநாற்கரம் வரைதல் (Type V- One side and three angles of a cyclic quadrilateral are given)

எடுத்துக்காட்டு 9.11

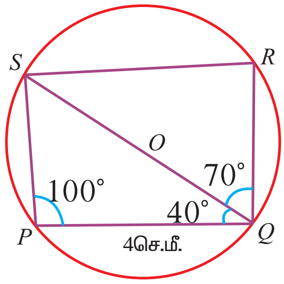
$PQ = 4$ செ.மீ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ மற்றும் $\angle SQR = 70^\circ$ எனும்படி வட்டநாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்டநாற்கரம் $PQRS$-ல்,

$PQ = 4$ செ.மீ., $\angle P = 100^\circ$, $\angle PQS = 40^\circ$ மற்றும் $\angle SQR = 70^\circ$.



உதவிப்படம்



வரைமுறை:

(i) உதவிப்படம் வரைந்து, அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளைக்குறிக்க.
$PQ = 4$ செ.மீ. அளவுள்ள கோட்டத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி P-ல் $\angle QPX = 100^\circ$ எனும் படி PX வரைக.

(iii) புள்ளி Q-ல் $\angle PQY = 40^\circ$ எனும் படி QY வரைக QY ஆனது PX-ஐ S-ல் சந்திக்கட்டும்.

(iv) PQ மற்றும் PS-களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைந்து அவை சந்திக்கும் புள்ளி O-யைக் காண்க.

(v) புள்ளி O-வை மையமாகவும் $OP(= OQ = OS)$யை ஆரமாகவும் கொண்டு $\triangle PQS$-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vi) புள்ளி Q-ல், $\angle SQZ = 70^\circ$ எனும் படி QZ வரைக. அது வட்டத்தை புள்ளி R-ல் சந்திக்கட்டும்.

(vii) RS-ஐ இணைக்க.
தேவையான வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ ஆகும்.

www.tntextbooks.in

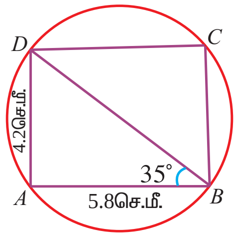
வகை VI - இரண்டு பக்கங்கள், ஒரு கோணம் மற்றும் ஒரு இணைக்கோடு கொடுக்கப்படும் போது வட்டநாற்கரம் வரைதல். **(Type VI Two sides , one angle and one parallel line are given)**

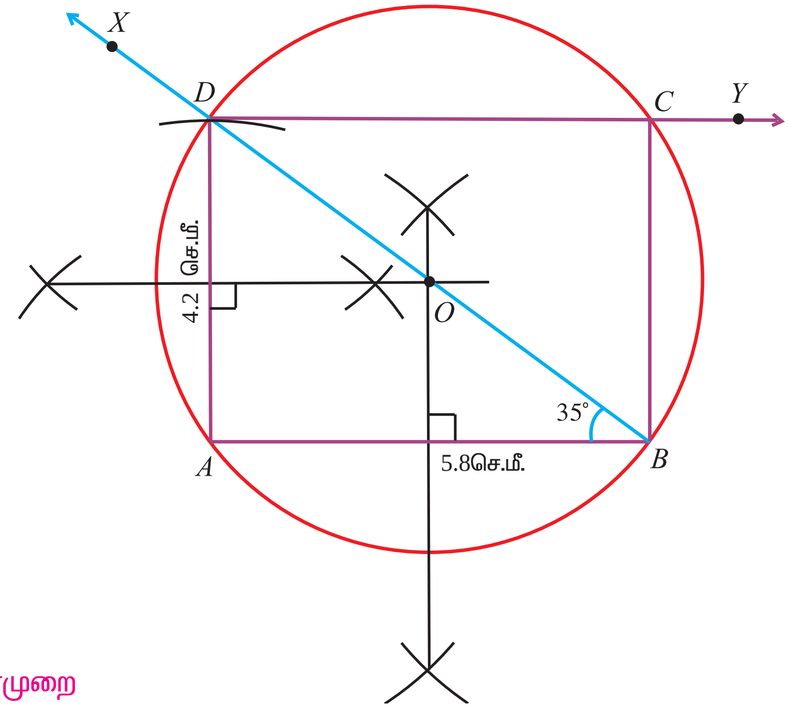
எடுத்துக்காட்டு 9.12

$AB = 5.8$ செ.மீ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ செ.மீ. மற்றும் $AB \parallel CD$ என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை: வட்ட நாற்கரம் $ABCD$-ல், $AB = 5.8$ செ.மீ., $\angle ABD = 35^\circ$, $AD = 4.2$ செ.மீ. மற்றும் $AB \parallel CD$.

உதவிப்படம்





வரைமுறை

(i) உதவிப்படம் வரைந்து, அதில் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை குறிக்க.

$AB = 5.8$ செ.மீ. அளவுள்ள ஒரு கோட்டுத்துண்டு வரைக.

(ii) புள்ளி B-ல், $\angle ABX = 35^\circ$ எனும்படி BX வரைக.

(iii) A-யை மையமாகக் கொண்டு 4.2 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் வட்டவில் வரைக அது BX-யை சந்திக்கும் புள்ளி D என்க.

(iv) AB மற்றும் AD-களின் மையக்குத்துக்கோடுகள் வரைக அவை சந்திக்கும் புள்ளி O-என்க.

(v) O-யை மையமாகவும், $OA\ (= OB = OD)$-ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு ΔABD-ன் சுற்று வட்டம் வரைக.

(vi) $DY \parallel AB$ எனும்படி DY வரைக அது வட்டத்தை சந்திக்கும் புள்ளி C என்க. BC-யை இணைக்க.

(vii) தேவையான வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ ஆகும்.

www.tntextbooks.in

பயிற்சி 9.3

1. $PQ = 6.5$ செ.மீ., $QR = 5.5$ செ.மீ., $PR = 7$ செ.மீ. மற்றும் $PS = 4.5$ செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

2. $AB = 6$ செ.மீ., AD = 4.8 செ.மீ., $BD = 8$ செ.மீ. மற்றும் $CD = 5.5$ செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

3. $PQ = 5.5$ செ.மீ., $QR = 4.5$ செ.மீ., $\angle QPR = 45^\circ$ மற்றும் $PS = 3$ செ.மீ. ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

4. $AB = 7$ செ.மீ., $\angle A = 80^\circ$, $AD = 4.5$ செ.மீ. மற்றும் $BC = 5$ செ.மீ. என்ற அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

5. $KL = 5.5$ செ.மீ., $KM = 5$ செ.மீ., $LM = 4.2$ செ.மீ. மற்றும் $LN = 5.3$ செ.மீ. ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $KLMN$ வரைக.

6. $EF = 7$ செ.மீ., $EH = 4.8$ செ.மீ., $FH = 6.5$ செ.மீ. மற்றும் $EG = 6.6$ செ.மீ. அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $EFGH$ வரைக.

7. $AB = 6$ செ.மீ., $\angle ABC = 70^\circ$, $BC = 5$ செ.மீ. மற்றும் $\angle ACD = 30^\circ$ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்டநாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

8. $PQ = 5$ செ.மீ., $QR = 4$ செ.மீ., $\angle QPR = 35^\circ$ மற்றும் $\angle PRS = 70^\circ$ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $PQRS$ வரைக.

9. $AB = 5.5$ செ.மீ., $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ மற்றும் $\angle ACD = 30^\circ$ ஆகிய அளவுகள் கொண்ட வட்ட நாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

10. $AB = 6.5$ செ.மீ., $\angle ABC = 110^\circ$, $BC = 5.5$ செ.மீ. மற்றும் $AB \parallel CD$ என்றவாறு அமையும் வட்டநாற்கரம் $ABCD$ வரைக.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

1901 முதல் ஒவ்வொரு ஆண்டும் இயற்பியல், வேதியியல், உடற்கூறியியல் (மருத்துவம்) இலக்கியம் மற்றும் அமைதி ஆகிய துறைகளில் சிறந்து விளங்குவோர்க்கு பெருமைக்குரிய நோபல் பரிசு (Nobel Prize) வழங்கப்பட்டு வருகிறது. ஸ்வீடன் நாட்டின் ஸ்டாக்ஹோம்மிலுள்ள நோபல் அறக்கட்டளை மூலம் ஆண்டு தோறும் வழங்கப்பட்டு வரும் இவ்வரிய பரிசானது ஒரு சர்வதேச விருதாகும். ஆனால் கணிதத்திற்கு நோபல் பரிசு வழங்கப்படுவதில்லை.

சர்வதேச கணித கூட்டமைப்பால் (International Mathematical Union) நான்கு ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை நடத்தப் பெறும் சர்வதேச கணித காங்கிரஸ் மாநாட்டில் ஒவ்வொரு முறையும் 40 வயதைக் கடக்காத இரண்டு, மூன்று அல்லது நான்கு கணிதவியல் அறிஞர்களுக்கு வழங்கப்படும் விருது பீல்ட்ஸ் பதக்கம் (Fields Medal) எனப்படும். பீல்ட்ஸ் பதக்கம் கணிதத்திற்கான நோபல் பரிசு என பாராட்டப்படுகிறது.

www.tntextbooks.in

10

- அறிமுகம்
- இருபடி வளைவரைகளின் வரைபடங்கள்
- சிறப்பு வரைபடங்கள்

ரெனி டெஸ்கார்டிஸ்

(Rene Descartes)

(1596-1650)

பிரான்ஸ்

டெஸ்கார்டிஸ், மருத்துவமனையில் படுக்கையில் இருக்கும்போது ஈ (பூச்சி) ஒன்று அவருடைய அறையின் ஒரு மூலையில் சுற்றிச் சுற்றி பறந்து கொண்டிருப்பதை பார்த்து கார்டிசியன் தளத்தைக் கண்டறிந்தார்.

டெஸ்கார்டிஸ் பகுமுறை வடிவ கணிதத்தை உருவாக்கினார். இதன் மூலம் ஆயத்தொலை அச்சுக்களைப் பயன்படுத்தி வரைபடங்களை வரைவதற்கு வழிவகுத்தார்.

வரைபடங்கள்

I think, therefore I am

- Rene Descartes

10.1 அறிமுகம்

வரைபடங்கள் (Graphs) என்பன தகவல்களைக் காட்டும் படங்களாகும். எடை எவ்வாறு உயரத்துடன் தொடர்புடையதோ, அதே போன்று இரு வேறுபட்ட அளவுகள் எவ்வாறு தொடர்புடையன என்பதை வரைபடங்கள் உணர்த்தும். சில நேரங்களில் இயற்கணிதத்தை கண்முன் கொணர்ந்து புரிந்து கொள்வது கடினமாக இருக்கும். குறியீடுகளால் அமைந்த கணிதக் கோவைகளுக்கும் மற்றும் அவற்றின் வரைபடங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பைக் கற்றுக் கொள்வது இயற்கணித வடிவமைப்புகளைப் புரிந்து கொள்ள வழிவகை செய்கிறது.

கருத்தில் கொண்டுள்ள, தீர்வு காண வேண்டிய கணித வினாவிற்கு விளக்கமளிக்கும் வகையில் ஓரளவிற்குத் துல்லியமான வரைபடத்தை வரையும் பழக்கத்தை மாணவர்கள் ஏற்படுத்திக் கொள்ள வேண்டும். ஒரு கணக்கிற்கு வடிவியல் விளக்கம் பெறமட்டுமல்லாது இயற்கணிதத் தீர்வை மிகச்சரியாக உள்ளதா எனச் சோதனை செய்து பார்க்கவும், கவனத்துடன் வரையப்பட்ட வரைபடங்கள் உதவும். வரைபடங்களின் மூலம் பெறப்படும் தீர்வுகள் அனைத்தும் தோராயமான மதிப்புகள் என்பதை நினைவிற்கொள்ள வேண்டும். எந்த அளவிற்கு துல்லியமாக வரைபடங்களை வரைகிறோமோ, அதே அளவிற்கு பெறப்படும் மதிப்புகளும் துல்லியமாக அமையும்.

10.2 இருபடிக் கோவைகளின் வரைபடங்கள் (Quadratic Graphs)

வரையறை

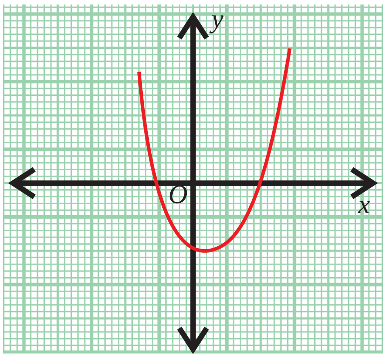
$f : A \to B$ ஒரு சார்பு என்க. இங்கு A மற்றும் B என்பன மெய்யெண்கள் கணம் $\mathbb{R}$-ன் உட்கணங்களாகும். அனைத்து வரிசைச் சோடிகளின் கணமான $\{(x, y) \mid x \in A,\ y = f(x)\}$ என்பது f-ன் வரைபடம் என அழைக்கப்படும்.

x-ல் அமைந்த ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையை வரைபட வடிவில் குறிப்பிட இயலும். $y = f(x) = ax + b, a \neq 0$ என்ற ஒருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடம் என்பது சாய்வு 'a' உடைய ஒரு நேர்க்கோடாகும் (oblique line).

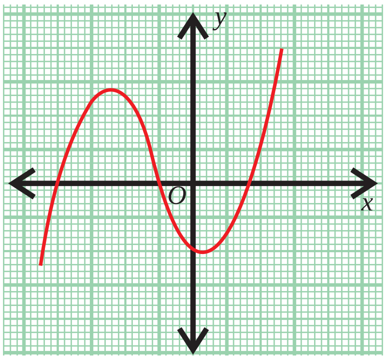
$y = f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0$ எனும் இருபடி பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரைபடம் என்பது நேர்க்கோடற்ற தொடர்ச்சியான ஒரு வளைவரை ஆகும். இதனை பரவளையம் (Parabola) என்று கூறுவர்.

www.tntextbooks.in

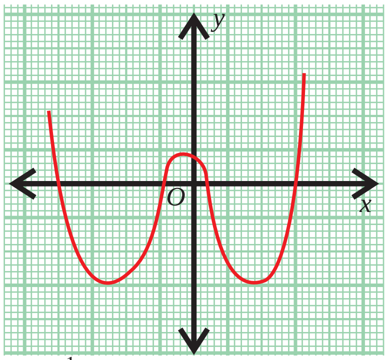
பின்வரும் வரைபடங்கள் வெவ்வேறான பல்லுறுப்புக்கோவைகளைக் காட்டுகின்றன.



$y = (x+1)(x-2)$,
இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை



$y = (x+4)(x+1)(x-2)$,
முப்படி பல்லுறுப்புக்கோவை



$y = \frac{1}{14}(x+4)(x+1)(x-3)(x-0.5)$
நாற்படி பல்லுறுப்புக்கோவை

9-ஆம் வகுப்பில் ஒருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $y = ax + b, a \neq 0,$-ன் நேர்க்கோட்டு வரைபடங்களை வரைய நாம் கற்றுள்ளோம். இப்போது $y = ax^2 + bx + c$, இங்கு a, b மற்றும் c ஆகியன மெய் மாறிலிகள் மற்றும் $a \neq 0$, என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடத்தை எவ்வாறு வரைவது என்பதையும் மற்றும் அதன் பண்புகள் எத்தகையன என்பதையும் அறியவிருக்கிறோம்.

$y = ax^2 + bx + c$-ன் வரைபடம்

$y = ax^2 + bx + c$ என்பதைக் கருதுக. வர்க்கப்படுத்துதல் முறையைப் பயன்படுத்தி இப்பல்லுறப்புக்கோவையை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

ஆகவே, $\frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) \geq 0$. (ஒரு கோவையின் வர்க்கம் எப்போதுமே மிகை)

வளைவரையின் (பரவளையத்தின்) உச்சி $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ஆகும்.

$a > 0$ எனில், வளைவரை **மேல்நோக்கித் திறப்பு உடையது.** $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மீதும் மற்றும் அதற்கு மேலேயும் வளைவரை அமையும். மேலும் வளைவரையானது $x = -\frac{b}{2a}$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீராக இருக்கும்.

$a < 0$ எனில், வளைவரை **கீழ்நோக்கித் திறப்பு உடையது.** $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ என்ற கோட்டின் மீதும் அதற்கு கீழும் வளைவரை அமையும். மேலும் $x = -\frac{b}{2a}$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொருத்து சமச்சீராக இருக்கும்.

இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளுக்கு சில எடுத்துக்காட்டுகளும் அவற்றின் வரைபடங்களின் தன்மையும் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வரிசை எண்	பல்லுறுப்புக்கோவை ($y = ax^2 + bx + c$)	உச்சிப் புள்ளி	a-ன் குறி	வளைவரையின் தன்மை
1	$y = 2x^2$ $a = 2,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	மிகை	(i) மேல்நோக்கித் திறப்பு உடையது. (ii) $y = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மீதும் அதற்கு மேலேயும் அமையும் (iii) y-அச்சிற்கு, அதாவது $x=0$-க்கு சமச்சீராக வளைவரை அமையும்.
2	$y = -3x^2$ $a = -3,\ b = 0,\ c = 0$	(0, 0)	குறை	(i) கீழ்நோக்கித் திறப்பு உடையது. (ii) $y = 0$ என்ற நேர் கோட்டின் மீதும் மற்றும் அதற்குக் கீழேயும் அமையும். (iii) y-அச்சிற்கு, அதாவது $x = 0$-க்கு சமச்சீராக வளைவரை அமையும்.
3	$y = x^2 - 2x - 3$ $a = 1, b = -2, c = -3$	(1, –4)	மிகை	(i) மேல்நோக்கித் திறப்பு உடையது (ii) $y = -4$ என்ற நேர்க்கோட்டின் மீதும் அதற்கு மேலேயும் அமையும். (iii) $x = 1$-க்கு சமச்சீராக அமையும்.

$y = ax^2 + bx + c$ என்ற இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடத்தை வரைவதற்கான வழிமுறைகள் (Procedures to draw the quadratic graph of $y = ax^2 + bx + c$)

(i) $y = ax^2 + bx + c$-ஐப் பயன்படுத்தி x-ன் வெவ்வேறு மதிப்புகளையும் அதற்குரிய y-ன் மதிப்புகளையும் அட்டவணைப் படுத்துக.

(ii) பொருத்தமான அளவுத்திட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க.

x-அச்சின் அளவுத்திட்டமும் y-அச்சின் அளவுத்திட்டமும் ஒரே அளவாக இருக்க வேண்டியதில்லை. வரையவேண்டிய வரைபடம் முடிந்த அளவிற்கு பெரிய அளவில் இருக்குமாறு அளவுத் திட்டம் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும். வரைபடத்தின் அளவு எந்த அளவிற்குப் பெரியதாக இருக்கின்றதோ, அதற்கேற்ப பெறப்படும் முடிவுகளும் துல்லியமாக அமையும்

(iii) வரைபடத்தாளில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். $y = ax^2 + bx + c$-ன் வரைபடத்தில் நேர்க்கோட்டுத் துண்டுகள் இல்லை என்பதால், அவற்றை ஒரு நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (Smooth Curve) இணைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.1

$y = 2x^2$-க்கு வரைபடம் வரைக.

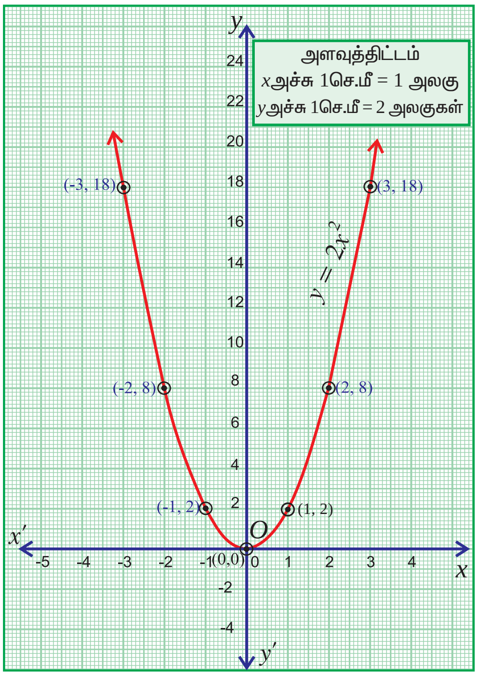
www.tntextbooks.in

தீர்வு

x-க்கு -3-லிருந்து 3 வரையுள்ள முழுக்களின் மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு ஏற்ற y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு, கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

$(-3, 18)$, $(-2, 8)$, $(-1, 2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2,8)$ மற்றும் $(3, 18)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும். அப்புள்ளிகளை ஒரு நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும். இவ்வளைவரையானது $y = 2x^2$-ன் வரைபடமாகும்.



படம் 10.1

குறிப்புரை

(i) இந்த வளைவரையானது y-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீராக இருக்கும். அதாவது, y-அச்சின் இடப்பக்கம் அமைந்துள்ள வரைபடத்தின் பகுதியானது y-அச்சின் வலப்பக்கத்தில் உள்ள பகுதியின் கண்ணாடி பிம்பமாகும்.

(ii) y-ன் மதிப்புகள் குறை எண்களாக இல்லை. எனவே, வரைபடம் x-அச்சுக்குக் கீழ் அமையாது.

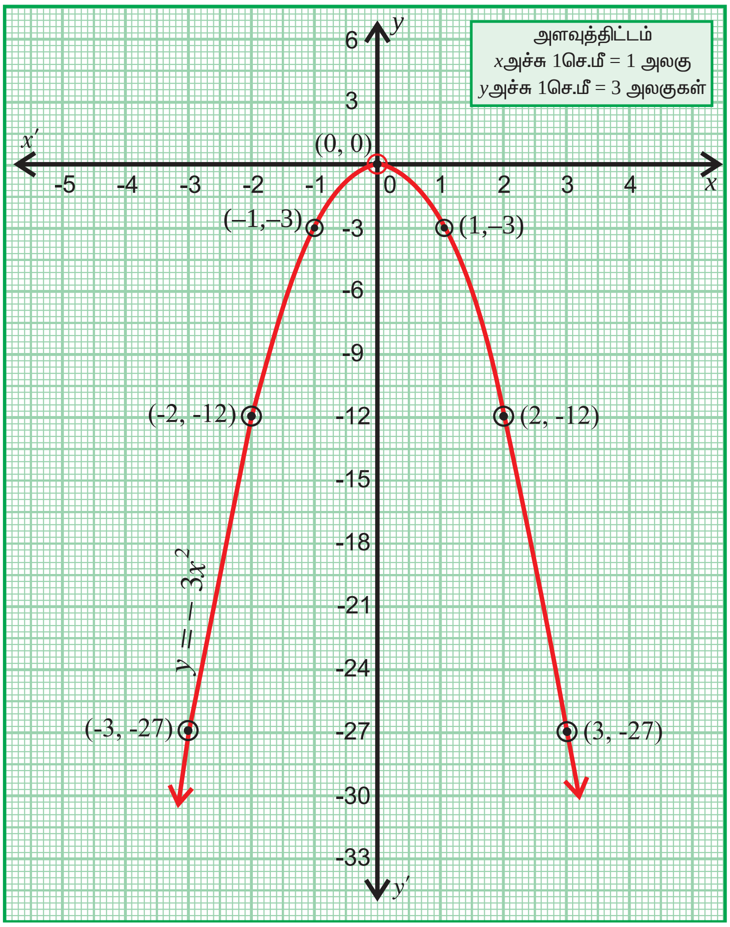
எடுத்துக்காட்டு 10.2

$y = -3x^2$ இன் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு

x-க்கு -3 லிருந்து 3 வரையுள்ள முழுக்களின் மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு ஏற்ற y இன் மதிப்புகளைக் கண்டு, கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = -3x^2$	-27	-12	-3	0	-3	-12	-27



படம் 10.2

(–3, –27), (–2, –12), (–1, –3), (0, 0), (1,–3), (2, –12) மற்றும் (3, –27) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.

அப்புள்ளிகளை ஒரு நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும். இவ்வாறு பெறப்படும் வளைவரை $y = -3x^2$ இன் வரைபடமாகும். இவ்வரைபடம் பரவளையம் (parabola) எனப்படும்.

குறிப்புரை

(i) y-ன் மதிப்புகள் அனைத்துமே மிகையற்ற மதிப்புகளாக உள்ளதால் $y = -3x^2$ இன் வரைபடம் x-அச்சுக்கு மேல் அமையாது.

(ii) வரைபடம் y-அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீரானது.

10.2.1 $ax^2 + bx + c = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டை வரைபடம் மூலம் தீர்த்தல்.

(To solve the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ graphically)

முதலில் இருபடி பல்லுறுப்புக்கோவை $y = ax^2 + bx + c$-ன் வரைபடத்தை வரைக. வளைவரையானது x-அச்சினை வெட்டினால், வளைவரை மற்றும் x-அச்சு ஆகியன வெட்டும் புள்ளிகளின் x-ஆயத்தொலைவுகளின் மதிப்புகளே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 10.3

வரைபடம் மூலம் தீர்க்க: $x^2 - 2x - 3 = 0$

தீர்வு

முதலில் $y = x^2 - 2x - 3$-இன் வரைபடத்தை வரைவோம்.

x-க்கு -3 லிருந்து 4 வரையுள்ள முழுக்களின் மதிப்புகளைக் கொடுத்து அதற்குரிய y-ன் மதிப்புகளைக் கண்டு கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

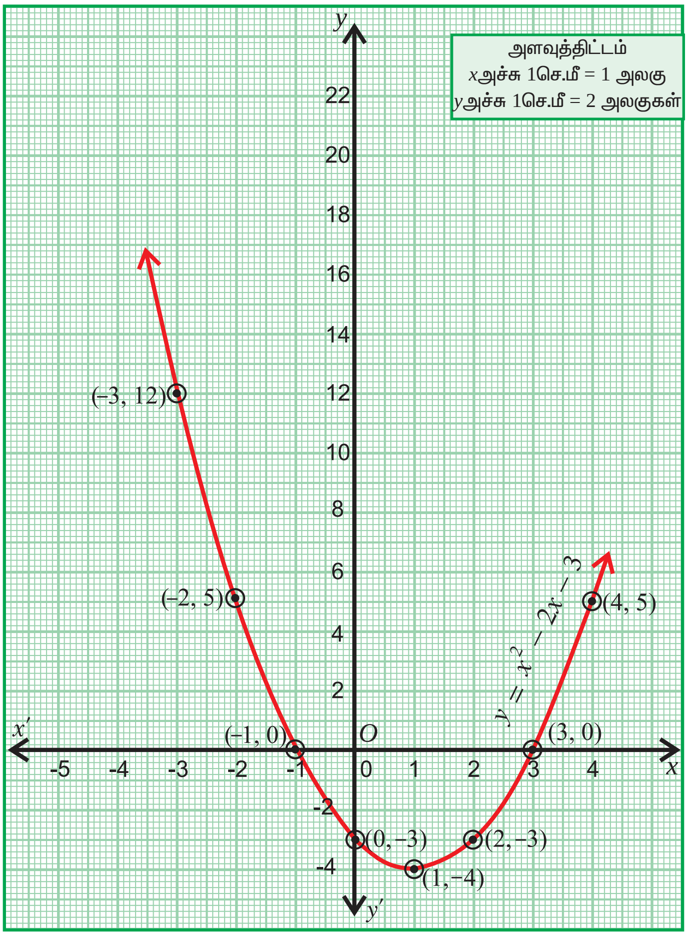
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16
$-2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

$(-3, 12), (-2, 5), (-1, 0), (0, -3), (1, -4), (2, -3), (3, 0), (4, 5)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும்.

இவ்வளைவரை x அச்சை $(-1, 0)$ மற்றும் $(3, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

இப்புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைவுகள் -1 மற்றும் 3.

ஆகவே, தீர்வு கணம் $\{-1, 3\}$.



படம் 10.3

குறிப்புரை

(i) x-அச்சில், எப்போதும் $y = 0$ ஆகும்.

(ii) y-ன் மதிப்புகள் மிகை மற்றும் குறை எண்களாக இருப்பதால் வளைவரையானது x-அச்சுக்கு மேலும் கீழும் அமையும்.

(iii) $x = 1$ என்ற கோட்டைப் பொருத்து வரைபடம் சமச்சீரானது.

இது y-அச்சைப் பொருத்து சமச்சீரானது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 10.4

வரைபடம் மூலம் தீர்க்க: $2x^2 + x - 6 = 0$

தீர்வு

முதலில், x-க்கு -3-லிருந்து 3 வரையுள்ள முழுக்களின் மதிப்புகளைக் கொடுத்து அவற்றிற்கு ஏற்ற $y = 2x^2 + x - 6$ இன் மதிப்புகளைக் கண்டு, கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணைப்படுத்துக.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
–6	–6	–6	–6	–6	–6	–6	–6
y	9	0	–5	–6	–3	4	15

(–3, 9), (–2, 0), (–1, –5), (0, –6), (1, –3), (2, 4) மற்றும் (3, 15) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும். இவ்வாறு பெறப்பட்ட வளைவரை $y = 2x^2 + x - 6$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையின் வரைபடமாகும்.

வளைவரை x- அச்சை (–2 , 0) மற்றும் (1.5, 0) ஆகியப் புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

இப்புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைவுகள் –2 மற்றும் 1.5 ஆகும்.

ஆகவே, தீர்வு கணம் {–2 , 1.5 }.

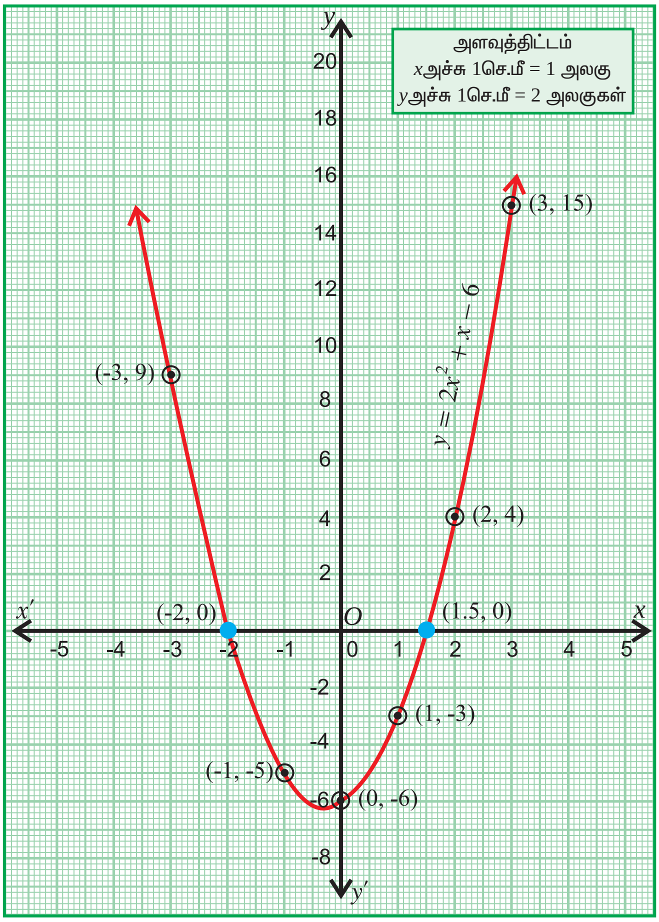
குறிப்புரை

$2x^2 + x - 6 = 0$-ஐ வரைபடம் மூலம் தீர்க்க பின்வரும் முறையையும் பின்பற்றலாம்.

(i) $y = 2x^2$-ன் வரைபடம் வரைக.

(ii) $y = 6 - x$-ன் வரைபடம் வரைக.

(iii) இவ்விரு வரைபடங்கள் வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகளின் மதிப்புகளே $2x^2 + x - 6 = 0$-ன் தீர்வுகளாகும்.



படம் 10.4

எடுத்துக்காட்டு 10.5

$y = 2x^2$-ன் வரைபடத்தை வரைந்து அதிலிருந்து $2x^2 + x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு

முதலில் $y = 2x^2$-ன் வரைபடத்தை வரைவோம். $y = 2x^2$ க்கு பின்வரும் அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

(–3, 18), (–2, 8), (–1,2), (0, 0), (1, 2), (2, 8) மற்றும் (3, 18) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும்.

இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும்.

$2x^2 + x - 6 = 0$-ன் மூலங்களைக் காண $y = 2x^2$ மற்றும் $2x^2 + x - 6 = 0$ ஆகிய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.

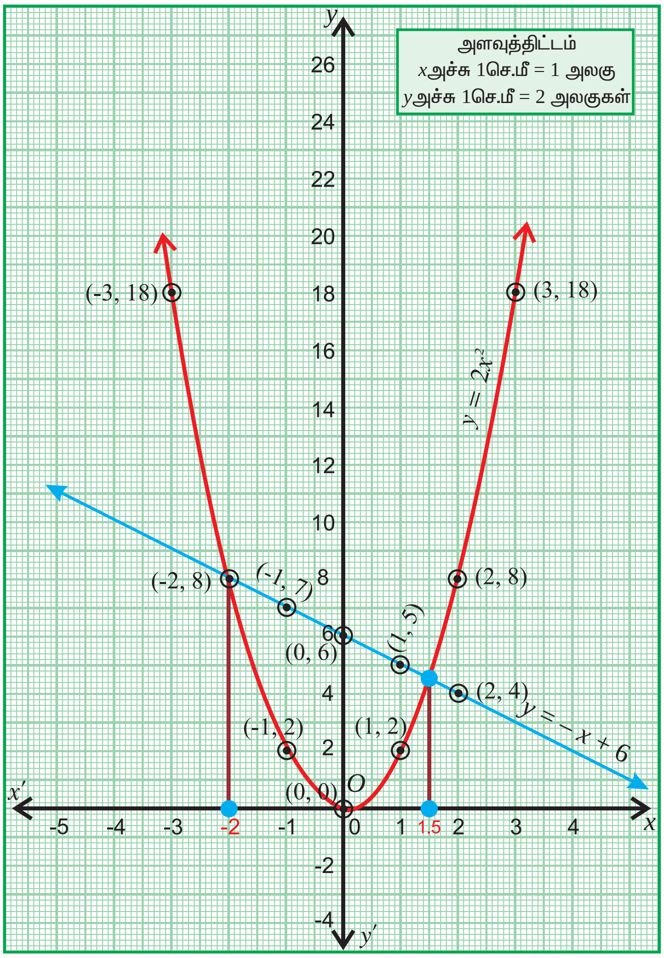
இப்போது, $2x^2 + x - 6 = 0$.

$\Longrightarrow \quad y = 2x^2$. ஆகவே $y + x - 6 = 0$

$\Longrightarrow \quad y = -x + 6$

எனவே, $2x^2 + x - 6 = 0$-ன் மூலங்கள் $y = 2x^2$ மற்றும் $y = -x + 6$ ஆகியன வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளின் x-ன் ஆயத்தொலைவுகளாகும்.

இப்போது, $y = -x + 6$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குரிய அட்டவணையை அமைப்போம்.



படம் 10.5

x	–1	0	1	2
$y = -x + 6$	7	6	5	4

மேலேயுள்ள புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறித்து அவற்றை ஒரு நேர்க்கோட்டால் இணைக்கவும்.

நேர்க்கோடு மற்றும் பரவளையம் ஆகியனவற்றின் வெட்டும் புள்ளிகள் (–2, 8) மற்றும் (1.5, 4.5) ஆகும். இப்புள்ளிகளின் x-ஆயத்தொலைவுகள் –2 மற்றும் 1.5 ஆகும்.

எனவே, சமன்பாடு $2x^2 + x - 6 = 0$-ன் தீர்வு கணம் $\{-2, 1.5\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.6

$y = x^2 + 3x + 2$ -இன் வரைபடம் வரைக. அதைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 2x + 4 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு

முதலில், $y = x^2 + 3x + 2$ -க்கான அட்டவணையைப் பின்வருமாறு தயார்செய்வோம்.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9
$3x$	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9
2	2	2	2	2	2	2	2	2
y	6	2	0	0	2	6	12	20

$(-4, 6), (-3, 2), (-2, 0), (-1, 0), (0, 2), (1, 6), (2, 12)$ மற்றும் $(3, 20)$ ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை நேர்க் கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் (smooth curve) இணைக்கவும். கிடைக்கப் பெற்ற வளைவரையானது,

$y = x^2 + 3x + 2$ -ன் வரைபடமாகும்.

இப்போது, $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\Longrightarrow x^2 + 3x + 2 - x + 2 = 0$

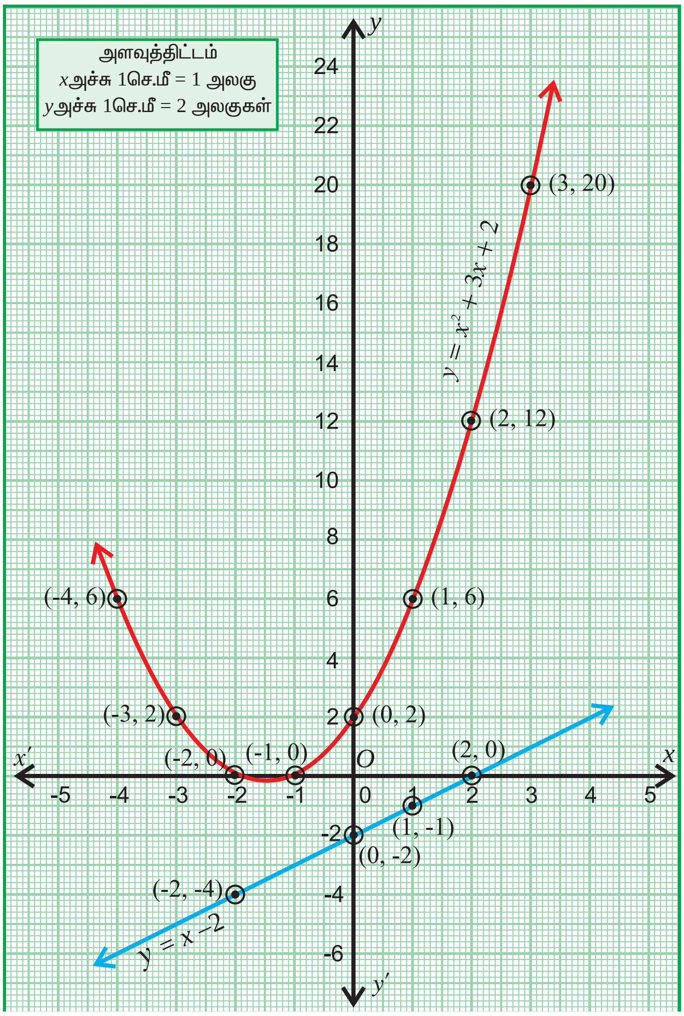
$\Longrightarrow y = x - 2 \quad \because y = x^2 + 3x + 2$

எனவே, $x^2 + 2x + 4 = 0$ -ன் மூலங்கள், $y = x - 2$ மற்றும் $y = x^2 + 3x + 2$ ஆகியன வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளால் கிடைக்கப் பெறுகின்றன.

இப்போது நேர்க்கோடு $y = x - 2$ -ன் வரைபடத்தை வரைவோம்.

இதற்கு $y = x - 2$ -க்கான அட்டவணையை பின்வருமாறு அமைப்போம்.

x	-2	0	1	2
$y = x - 2$	-4	-2	-1	0



படம் 10.6

ஆனால், நேர்க்கோடு $y = x - 2$ ஆனது வளைவரை $y = x^2 + 3x + 2$ -ஐ வெட்டவில்லை.

எனவே, $x^2 + 2x + 4 = 0$ -க்கு மெய்மூலங்கள் ஏதும் இல்லை.

பயிற்சி 10.1

1. பின்வரும் சார்புகளின் வரைபடம் வரைக.
   (i) $y = 3x^2$
   (ii) $y = -4x^2$
   (iii) $y = (x+2)(x+4)$
   (iv) $y = 2x^2 - x + 3$
2. வரைபடம் மூலம் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்.
   (i) $x^2 - 4 = 0$
   (ii) $x^2 - 3x - 10 = 0$
   (iii) $(x-5)(x-1) = 0$
   (iv) $(2x+1)(x-3) = 0$
3. $y = x^2$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - 4x - 5 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
4. $y = x^2 + 2x - 3$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - x - 6 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
5. $y = 2x^2 + x - 6$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $2x^2 + x - 10 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
6. $y = x^2 - x - 8$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 - 2x - 15 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.
7. $y = x^2 + x - 12$-ன் வரைபடம் வரைந்து, அதனைப் பயன்படுத்தி $x^2 + 2x + 2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்கவும்.

10.3 சில சிறப்புவகை வரைபடங்கள் (Some Special Graphs)

இப்பாடப்பகுதியில் பல்லுறுப்புக்கோவையின் மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு

(i) நேர் மாறுபாடு (Direct variation) மற்றும்

(ii) எதிர் மாறுபாடு (Indirect variation) என்றவாறு அமையும்போது, பல்லுறுப்புக் கோவையின் வரைபடத்தை எவ்வாறு வரைவது என அறிந்து கொள்வோம்.

y ஆனது x-க்கு நேர்விகிதத்தில் இருப்பின், ஏதேனும் ஒரு மிகை எண் k-க்கு $y = kx$ என நாம் பெறுகிறோம். இந்த நிலையில் மாறிகள் ஒன்றுக்கொன்று நேர் மாறுபாட்டில் (Direct variation) இருப்பதாகக் கருதப்படும். மேலும் அதன் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடாகும் (Straight line)

y-ஆனது x-க்கு தலைகீழ் விகிதத்திலிருப்பின், ஏதேனும் ஒரு மிகை k-க்கு $y = \frac{k}{x}$ என நாம் பெறுகிறோம். இங்கு மாறிகள் ஒன்றுக்கொன்று எதிர் மாறுபாட்டிலிருப்பதால் (Indirect variation) அதன் வரைபடம் ஒரு சீரான நேர்க்கோடற்ற வளைவரைவாக அமையும். இது செவ்வக அதிபரவளையம் (Rectangular Hyperbola) என அறியப்படும். (செவ்வக அதிபரவளையத்தின் சமன்பாடு, $xy = k,\ k > 0$ என்றவாறு இருக்கும்).

எடுத்துக்காட்டு 10.7

கீழ்க்காணும் அட்டவணைக்குத் தகுந்த வரைபடம் வரைந்து மாறிகளின் மாறுபாட்டுத் தன்மையைக் காண். அம்மாறுபாட்டின் மாறிலியையும் (constant of proportionality) காண்க.

x	2	3	5	8	10
y	8	12	20	32	40

மேலும் $x = 4$ எனில் y-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அட்டவணையில் x-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும் போது y-ன் மதிப்பும் நேர்விகிதத்தில் அதிகரிக்கின்றது.

ஆகவே, மாறுபாடு ஒரு நேர்மாறுபாடு (Direct variation) ஆகும்.

எனவே, $y \propto x$ என எழுதலாம்.

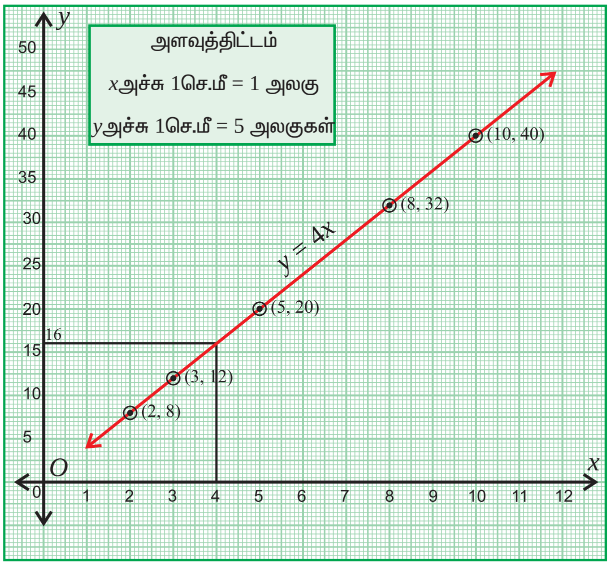
அதாவது, $y = kx$, $k > 0$ ஒரு மாறிலி ஆகும்.

$\Longrightarrow \quad \dfrac{y}{x} = k$ இதில் k என்பது விகிதசம மாறிலி.

$$k = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \cdots = \frac{40}{10}. = 4$$

$\therefore \; k = 4.$

இப்போது, $y = 4x$ என்ற உறவு ஒரு நேர்க்கோட்டை அமைக்கும்.



படம் 10.7

(2, 8), (3, 12), (5, 20), (8, 32) மற்றும் (10, 40) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத் தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை ஒரு நேர்க்கோட்டால் இணைக்கவும். இவ்வாறு பெறப்பட்ட நேர்க்கோடு $y = 4x$-ன் வரைபடமாகும்.

மேலும், $x = 4$ எனில், $y = 16$ என வரைபடம் $y = 4x$ -ன் வாயிலாக அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 10.8

ஒரு மிதிவண்டி ஓட்டுபவர் A என்ற இடத்திலிருந்து B என்ற இடத்திற்கு ஒரு சீரான வேகத்தில் ஒரே வழியில் வெவ்வேறு நாட்களில் பயணம் செய்கிறார். அவர் பயணம் செய்த வேகம், அத்தூரத்தினைக் கடக்க எடுத்துக் கொண்ட நேரம் ஆகியனவற்றைப் பற்றிய விவரங்கள் (வேக–கால) பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வேகம் (கி.மீ. / மணி) x	2	4	6	10	12
நேரம் (மணியில்) y	60	30	20	12	10

வேக - கால வரைபடம் வரைந்து அதிலிருந்து

(i) அவர் மணிக்கு 5 கி.மீ வேகத்தில் சென்றால் தூரத்தைக் கடக்க ஆகும் பயண நேரம்

(ii) அவர் இக்குறிப்பிட்ட தூரத்தை 40 மணிநேரத்தில் கடக்க எந்த வேகத்தில் பயணிக்க வேண்டும்

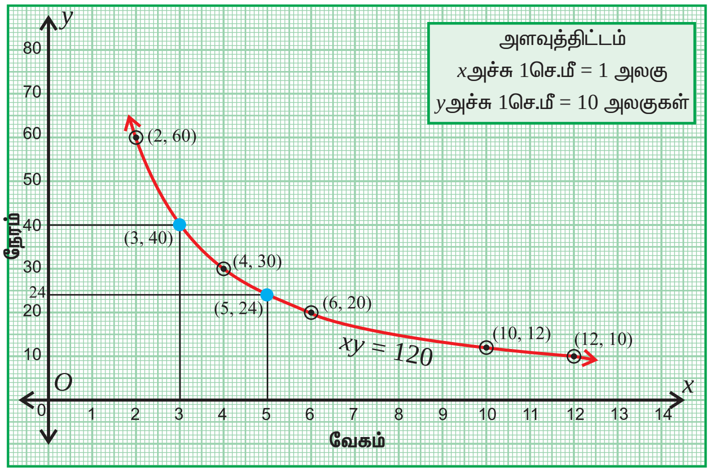
ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

அட்டவணையிலிருந்து x-ன் மதிப்பு அதிகமாகும்போது y-ன் மதிப்பு எதிர்விகிதத்தில் குறைகிறது என அறிகிறோம். இந்த வகையான மாறுபாடு எதிர் மாறுபாடு ஆகும். எனவே $xy = k$ ஆகும்.

இங்கு $xy = 120$

ஆகவே, $y = \frac{120}{x}$



படம் 10.8

(2 , 60), (4 , 30), (6 , 20), (10 , 12) மற்றும் (12, 10) ஆகிய புள்ளிகளை வரைபடத்தாளில் குறிக்கவும். இப்புள்ளிகளை நேர்க்கோடற்ற இழைவான வளைவரையால் இணைக்கவும்.

வரைபடத்திலிருந்து ,

(i) மணிக்கு 5 கி.மீ வேகத்தில் சென்றால் பயண நேரம் 24 மணி ஆகும்.

(ii) குறிப்பிட்ட தூரத்தை 40 மணி நேரத்தில் கடக்க, அவருடைய வேகம் 3 கி.மீ / மணி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.9

ஒரு வங்கி, மூத்தக்குடிமகனின் வைப்புத் தொகைக்கு 10% தனிவட்டி தருகிறது. வைப்புத் தொகைக்கும் அதற்கு ஓர் ஆண்டுக்குக் கிடைக்கும் வட்டிக்கும் இடையேயான தொடர்பினைக் காட்ட ஒரு வரைபடம் வரைக. அதன் மூலம்,

(i) ₹ 650 வைப்புத் தொகைக்குக் கிடைக்கும் வட்டி மற்றும்

(ii) ₹ 45 வட்டியாகக் கிடைக்க வங்கியில் செலுத்தப்பட வேண்டிய வைப்புத் தொகை

ஆகியனவற்றைக் காண்க.

தீர்வு

நாம் கீழ்வரும் அட்டவணையை தயாரிப்போம்

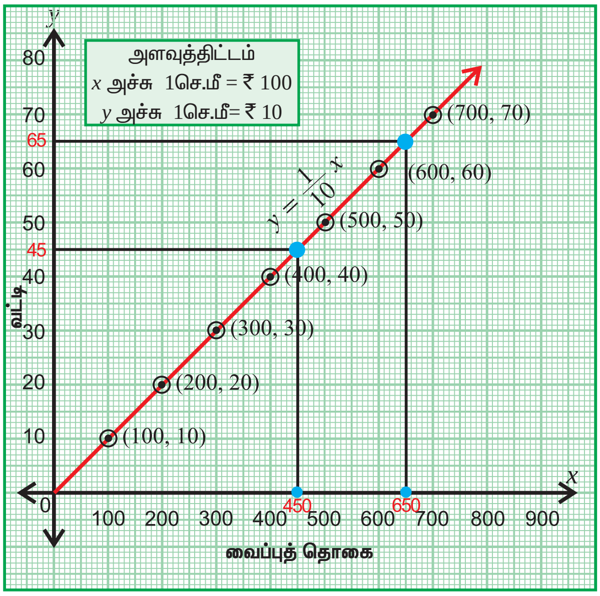
வைப்புத் தொகை ₹ x	100	200	300	400	500	600	700
தனிவட்டி ₹ y	10	20	30	40	50	60	70

மேற்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, எளிதாக $y = \frac{1}{10}x$ என அறியலாம். மேலும் $y = \frac{1}{10}x$-ன் வரைபடம் ஒரு நேர்க்கோடு ஆகும். எனவே அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியிலிருந்து வரைபடம் வரையலாம்.

இந்த வரைபடத்தில் இருந்து

(i) ₹650 வைப்புத் தொகைக்கு உரிய வட்டித் தொகை ₹65 எனவும்,

(ii) ₹45 வட்டியாகக் கிடைக்க தேவையான வைப்புத் தொகை ₹ 450 எனவும் அறியலாம்.



படம் 10.9

பயிற்சி 10.2

1. ஒரு பேருந்து மணிக்கு 40கி.மீ. வேகத்தில் செல்கிறது. இதற்குரிய தூர–கால தொடர்பிற்கான வரைபடம் வரைக. இதைப் பயன்படுத்தி 3 மணிநேரத்தில் இப்பேருந்து பயணித்தத் தூரத்தைக் கண்டுபிடி.

2. வாங்கப்பட்ட நோட்டுப் புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை மற்றும் அதற்கான விலை விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளது.

நோட்டுப்புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை x	2	4	6	8	10	12
விலை ₹ y	30	60	90	120	150	180

இதற்கான வரைபடம் வரைந்து அதன் மூலம்

(i) ஏழு நோட்டுப் புத்தகங்களின் விலையைக் காண்க.

(ii) ₹ 165-க்கு வாங்கப்படும் நோட்டுப் புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

www.tntextbooks.in

3.

x	1	3	5	7	8
y	2	6	10	14	16

மேற்கண்ட அட்டவணையில் உள்ள விவரத்திற்கு வரைபடம் வரைந்து, அதன் மூலம்
(i) $x = 4$ எனில் y-ன் மதிப்பைக் காண்க.
(ii) $y = 12$ எனில் x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

4. ஒரு லிட்டர் பாலின் விலை ₹ 15 என்க. பாலின் அளவுக்கும் விலைக்கும் உள்ளத் தொடர்பினைக் காட்டும் வரைபடம் வரைக. அதனைப் பயன்படுத்தி,
   (i) விகிதசம மாறிலியைக் காண்க.
   (ii) 3 லிட்டர் பாலின் விலையைக் காண்க.

5. $xy = 20,\ x,\ y > 0$ என்பதன் வரைபடம் வரைக. அதனைப் பயன்படுத்தி $x = 5$ எனில், y-ன் மதிப்பையும், $y = 10$ எனில், x-ன் மதிப்பையும் காண்க.

6.

வேலையாட்களின் எண்ணிக்கை x	3	4	6	8	9	16
நாட்களின் எண்ணிக்கை y	96	72	48	36	32	18

அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்திற்கான வரைபடம் வரைக. அதன் மூலம் 12 வேலையாட்கள் அவ்வேலையை முழுவதுமாக செய்து முடிக்க ஆகும் நாட்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

குறிப்பிடத்தக்க மேற்கோள்கள்

1. கணிதத்தில் வினாவை எழுப்பும் ஆற்றலை, அவ்வினாவிற்கு தீர்வு காண்பதைவிட உயர்வாகக் கருதப்படவேண்டும். - ஜார்ஜ் கேண்டர். (Georg Cantor)

2. கணிதத்தின் விதிகள் யாவும் மாற்ற முடியாதவை மற்றும் மறுப்பதற்கு அப்பாற்பட்டவைகளாகும். ஆனால் மற்ற அறிவியலிலுள்ள விதிகள் அனைத்தும் ஓரளவிற்கு விவாதத்திற்கு உட்பட்டவைகள் என்பதோடு, புதிய கண்டுபிடிப்புகளால் அவைகள் மாற்றப்படக்கூடிய வாய்ப்புகள் உள்ளன என்பதால்தான், கணிதவியலானது மற்ற அறிவியல்களைவிட மகத்தான முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகத் திகழ்கிறது.
   - ஆல்பர்ட் ஐன்ஸ்டீன் (Albert Einstein)

www.tntextbooks.in

11

புள்ளியியல்

It is easy to lie with statistics. It is hard to tell the truth without it
-Andrejs Dunkels

- அறிமுகம்
- பரவுதலின் அளவைகள்
  - வீச்சு
  - விலக்கவர்க்கச் சராசரி
  - திட்ட விலக்கம்
- மாறுபாட்டுக் கெழு

கார்ல் பியர்சன்
(Karl Pearson)
(1857-1936)
இங்கிலாந்து

கார்ல் பியர்சன் என்னும் ஆங்கில புள்ளியியல் வல்லுநர் நவீன புள்ளியியல் துறையை நிறுவியவர்களில் முன்னோடி ஆவார். இவர் புள்ளியியல் கணிதத் துறையை நிறுவினார். இயற்பியல் கருதுகோளான திருப்புத்திறன் என்ற கருத்தை புள்ளியியலில் அறிமுகப்படுத்தினார். அறிவியலின் இலக்கணம் (Grammar of science) என்ற அவருடைய நூலின் பல முக்கிய கருத்துக்கள் ஐன்ஸ்டீன் மற்றும் பிற அறிவியல் வல்லுநர்களின் பிற்காலத்திய அறிவியல் கொள்கை களின் அங்கமாக அமைந்தன.

11.1 அறிமுகம்

கிராக்ஸ்டன் (Croxton) மற்றும் கௌடன் (Cowden) ஆகியோரின் கூற்றுக்கு இணங்க, புள்ளியியல் (Statistics) என்பது புள்ளி விவரங்களைச் சேகரித்தல், அளித்தல், ஆய்வு செய்தல், எண் விவரங்களிலிருந்து கருத்துக்களை பல வகைகளில் தருவித்தல் என வரையறுக்கப்படுகிறது. R.A. பிஷர் (R.A. Fisher) என்பவர் புள்ளியியல் என்னும் அறிவியலை கணிதத்தின் ஒரு பிரிவு எனவும், அது கூர்ந்தாய்வு விவரங்களுக்கு செயல்பாட்டு கணிதம் எனவும் போற்றுகிறார்.

ஹோரேஸ் செக்ரிஸ்ட் (Horace Secrist) என்பவர் புள்ளியியலை பின்வருமாறு வரையறை செய்கிறார். புள்ளியியல் என்பது பல்வேறு காரணங்களினால் குறிப்பிட்ட அளவு பாதிக்கப் படுபவைகளின் விவரங்களின் சேர்க்கையாகும். இவ்விவரங்கள் எண்களால் குறிக்கப்பட்டு, வரிசைப்படுத்தப்பட்டு அல்லது ஏற்புடைய அளவில் துல்லியமாக அளவிடப்பட்டு, முன்பாகவே தீர்மானிக்கப்பட்ட நோக்கத்திற்காக அவைகளை முறையாக சேகரிப்பதும் அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்புகளை வெளிப்படுத்துவதும் புள்ளியியலாகும்.

J.F. பாரன் (J.F. Baron) என்பவர் “Statistics” (புள்ளியியல்) என்னும் சொல்லைத் தன்னுடைய “Elements of Universal Erudiation” என்னும் நூலில் முதன்முறையாகப் பயன்படுத்தினார். நவீன காலத்தில் புள்ளியியல் என்பது வெறும் விவரங்களின் சேகரிப்பு மற்றும் அவ்விவரங்களை படவிளக்கங்களிலும். அட்டவணைகளிலும் அளிப்பது மட்டும் அல்ல. கூர்ந்தாய்வு செய்த விவரங்களில் இருந்து அனுமானித்தல் மற்றும் நிச்சயமற்ற சூழலில் முழுப் பிரச்சினைக்கும் முடிவு மேற்கொள்ளல் போன்ற அறிவியல் கருத்துக்கள் நிறைந்தப் பிரிவாக இது கருதப்படுகிறது.

நாம் ஏற்கனவே மையப்போக்கு அளவைகளான, கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு மற்றும் முகடு ஆகியனப் பற்றி கற்றுள்ளோம். அவை நமக்கு பரவலின் மையப் பகுதியில் உள்ள விவரங்களின் அடர்த்தியைப் பற்றிய ஒரு கருத்தை தருகின்றன.

மையப் போக்களவைகள் பற்றிய அறிதல்களினால் விவரங்களின் பரவலைப் பற்றிய முழுக் கருத்துக்களையும் தெரிந்து கொள்ள இயலாது. எடுத்துக்காட்டாக (i) 82, 74, 89, 95 மற்றும் (ii) 120, 62, 28, 130 ஆகிய இரண்டு வெவ்வேறு

தொடர்களுக்கும் ஒரே கூட்டுச் சராசரி 85 ஆகும். முதல் தொடரில் உள்ள எண்கள், சராசரி 85-க்கு நெருக்கமாக உள்ளன. ஆனால், இரண்டாவது தொடரில் உள்ள எண்கள், சராசரி 85-லிருந்து பரவலாக விரவியுள்ளது. எனவே மையப்போக்கு அளவைகள், விவரங்களைப் பற்றிய தவறான முடிவுகளுக்கு வழி வகுக்கலாம். கூட்டுச் சராசரியை ஒட்டி, விவரங்கள் எவ்வாறு பரவியுள்ளன என்பதை அறிய உதவும் வகையில் விவரங்களுக்கான ஒரு அளவீடு தேவைப்படுகிறது.

11.2 பரவுதல் அளவைகள் (Measures of dispersion)

பரவலின் (distribution) புள்ளி விவரங்கள் எந்த அளவிற்குப் பரவியிருக்கிறது என்பதை பரவுதல் அளவைகள் விளக்குகிறது. வீச்சு (Range R), கால்மான விலக்கம் (Quartile Deviation Q.D), சராசரி விலக்கம் (Mean Deviation M.D), திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation S.D) ஆகியன பரவுதலின் அளவைகளாகும். இங்கு, நாம் சிலவற்றை விளக்கமாகக் கற்கலாம்.

11.2.1 வீச்சு (Range)

வீச்சு என்பது பரவுதல் அளவைகளில் எளிதான ஒரு அளவை ஆகும். ஒரு எண் தொகுப்பில் உள்ள எண்களில் மிக உயர்ந்த மற்றும் மிகக் குறைந்த மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் வீச்சு ஆகும்.

$\therefore$ வீச்சு = மீப்பெரு மதிப்பு − மீச்சிறு மதிப்பு = $L - S$.

மேலும், எண் தொகுப்பின் வீச்சுக் கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S}$.

எடுத்துக்காட்டு 11.1

43, 24, 38, 56, 22, 39, 45 ஆகிய புள்ளி விவரங்களின் வீச்சு மற்றும் வீச்சுக்கெழு காண்க.

தீர்வு புள்ளி விவரங்களை ஏறுவரிசையில் 22, 24, 38, 39, 43, 45, 56 என அமைக்கவும்.

மீப்பெரு மதிப்பு $L = 56$ மற்றும் மீச்சிறு மதிப்பு $S = 22$.

எனவே, வீச்சு $= L - S$

$= 56 - 22 = 34$

ஆகவே, வீச்சுக் கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S}$

$= \dfrac{56-22}{56+22} = \dfrac{34}{78} = 0.436$

எடுத்துக்காட்டு 11.2

ஒரு வகுப்பிலுள்ள 13 மாணவர்களின் எடை (கி.கி) பின்வருமாறு.

42.5, 47.5, 48.6, 50.5, 49, 46.2, 49.8, 45.8, 43.2, 48, 44.7, 46.9, 42.4

இவற்றின் வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு புள்ளி விவரங்களை ஏறுவரிசையில் பின்வருமாறு எழுதலாம்,

42.4, 42.5, 43.2, 44.7, 45.8, 46.2, 46.9, 47.5, 48, 48.6, 49, 49.8, 50.5

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரத்தின் மீப்பெரு மதிப்பு $L = 50.5$ மற்றும் மீச்சிறு மதிப்பு $S = 42.4$

ஆகவே, வீச்சு $= L - S$

$= 50.5 - 42.4 = 8.1$

மேலும், வீச்சுக் கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S} = \dfrac{50.5-42.4}{50.5+42.4} = \dfrac{8.1}{92.9}$

ஆகவே, வீச்சுக் கெழு = 0.087

www.tntextbooks.in

எடுத்துக்காட்டு 11.3

ஒரு புள்ளி விவரத் தொகுப்பின் மீப்பெரு மதிப்பு 7.44 மற்றும் அதன் வீச்சு 2.26 எனில், அத்தொகுப்பின் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு வீச்சு = மீப்பெரு மதிப்பு − மீச்சிறு மதிப்பு

$\Longrightarrow$ 7.44 − மீச்சிறு மதிப்பு = 2.26

$\therefore$ மீச்சிறு மதிப்பு = 7.44 − 2.26 = 5.18.

11.2.2 திட்ட விலக்கம் (Standard deviation)

பரவுதலின் அளவைக்காண சிறந்த வழி, புள்ளி விவரங்களின் தொகுப்பிலுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும், அதன் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள வித்தியாசங்களை வர்க்கப்படுத்தி, அந்த வர்க்கங்களுக்கு சராசரி காண்பதாகும். இவ்வாறு பெறப்படும் பரவுதலின் அளவை விலக்க வர்க்க சராசரி அல்லது பரவற்படி (Variance) எனப்படும். விலக்க வர்க்க சராசரியின் மிகை வர்க்கமூலம் திட்டவிலக்கம் (Standard Deviation) எனப்படும். விலக்க வர்க்க சராசரி எப்பொழுதும் மிகை முழு எண்ணாக இருக்கும்.

காஸ் (Gauss) என்பவர் பயன்படுத்திய 'சராசரி பிழை' (mean error) என்ற வார்த்தைக்குப் பதிலாக, 1894-ல் கார்ல் பியர்சன் (Karl Pearson) என்பவர் திட்ட விலக்கம் என்ற வார்த்தையை முதன் முதலில் பயன்படுத்தினார்.

புள்ளி விவரங்கள் எந்த அலகில் குறிப்பிடப்படுகிறதோ, அதே அலகில் திட்ட விலக்கமும் குறிப்பிடப்படும். திட்ட விலக்கம் புள்ளி விவர மதிப்புகள் சராசரியிலிருந்து எவ்வளவு விலகியிருக்கிறது என்பதைக் காட்டும். குறைவான மதிப்புள்ள திட்டவிலக்கம், புள்ளிவிவர மதிப்புகள் கூட்டுச் சராசரிக்கு அண்மையில் பரவியுள்ளதையும், உயர்ந்த மதிப்புள்ள திட்டவிலக்கம், புள்ளிவிவர மதிப்புகள் அதிக வீச்சில் பரவியுள்ளன என்பதையும் காட்டுகின்றன.

$\overline{x}$ மற்றும் σ என்ற குறியீடுகளை முறையே பரவுதலின் கூட்டுச் சராசரி (A.M) மற்றும் திட்ட விலக்கத்தைக் (S.D) குறிப்பிடப் பயன்படுத்துகிறோம். புள்ளி விவரங்களின் இயல்பின் அடிப்படையில் அவற்றை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைத்தபின் பல்வேறு முறைகளில் கீழ்க்காணும் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி, நாம் திட்ட விலக்கம் σ-வை கணக்கிடுவோம். (சூத்திரங்களுக்கு நிரூபணம் தேவையில்லை)

புள்ளி விவரம்	நேரடி முறை (Direct method)	கூட்டுச் சராசரி முறை	ஊகச் சராசரி முறை (Assumed mean method)	படிவிலக்க முறை (Step deviation method)
தொகுக்கப் படாதவை (ungrouped)	$\sqrt{\frac{\sum x^2}{n}-\left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$ இங்கு, $d = x-\overline{x}$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ இங்கு, $d = x - A$	$\sqrt{\frac{\sum d^2}{n}-\left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}\times c$ இங்கு, $d=\frac{x-A}{c}$
தொகுக்கப் பட்டவை (grouped)		$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}-\left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}\times c$

குறிப்பு :

n உறுப்புக்களைக் (எண்கள்) கொண்ட தொகுப்பிற்கு பின்வருவன மெய்யாகும்

$\sum(x-\overline{x})=0$, $\sum x = n\overline{x}$ மற்றும் $\sum \overline{x} = n\overline{x}$.

(i) நேரடி முறை (Direct method)

உறுப்புகளின் வர்க்கங்கள் எளிதில் பெறப்படும் பொழுது இம்முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

இம்முறையில் திட்டவிலக்கம் காண உதவும் சூத்திரம் , $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

எடுத்துக்காட்டு 11.4

ஒரு மாதத்தில் 8 மாணவர்கள் படித்த புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு.

2, 5, 8, 11, 14, 6, 12, 10. இப்புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு

x	x^2
2	4
5	25
6	36
8	64
10	100
11	121
12	144
14	196
$\sum x=68$	$\sum x^2=690$

இங்கு, $n = 8$

திட்டவிலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{690}{8} - \left(\frac{68}{8}\right)^2}$

$= \sqrt{86.25 - (8.5)^2}$

$= \sqrt{86.25 - 72.25}$

$= \sqrt{14} \simeq 3.74.$

(ii) கூட்டுச் சராசரி முறை (Actual mean method)

கூட்டுச் சராசரி பின்னமாக இல்லாவிடில், அதாவது முழு எண்ணாக இருக்கும்போது இம்முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

இம்முறையில் திட்ட விலக்கம் காண உதவும் சூத்திரம்,

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n}}$ அல்லது $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$. இங்கு $d = x - \overline{x}$.

எடுத்துக்காட்டு 11.5

ஒரு வகுப்பிற்கு நடத்தப்பட்ட பொது அறிவுத்தேர்வில் மொத்த மதிப்பெண்கள் 40-க்கு, 6 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 20, 14, 16, 30, 21 மற்றும் 25. இப்புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு இப்போது, கூட்டுச்சராசரி A. M. $= \frac{\sum x}{n} = \frac{20 + 14 + 16 + 30 + 21 + 25}{6}$

$\Longrightarrow \quad \overline{x} = \frac{126}{6} = 21.$

கீழ்க்கண்டவாறு அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$d = x - \overline{x}$	d^2
14	-7	49
16	-5	25
20	-1	1
21	0	0
25	4	16
30	9	81
$\sum x = 126$	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 172$

ஆகவே, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{172}{6}}$

$= \sqrt{28.67}$

எனவே, $\sigma \simeq 5.36.$

(iii) ஊகச் சராசரி முறை (Assumed mean method)

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் கூட்டுச்சராசரி முழு எண்ணாக இல்லையெனில், ஊகச் சராசரி முறையில் திட்டவிலக்கம் காணலாம். கூடுமான வரையில் $x–A$ என்பது மிகச் சிறிய முழு எண்களாக அமையுமாறு பொருத்தமான எண் A-யினைத் தெரிவு செய்கிறோம். இவ்வாறு தெரிவு செய்யப்படும் எண் A-ஐ ஊகச் சராசரி என்போம். இது கூட்டுச் சராசரிக்கு மிக நெருக்கமாக அமையும்.

தற்போது, $d = x - A$-வைப் பயன்படுத்தி விலகல்களைக் காண்போம்.

ஆகவே, திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$.

குறிப்பு :

ஊகச் சராசரி முறையும் படிவிலக்க முறையும், திட்ட விலக்கம் காணும் நேரடி முறையின் எளிமையாக்கப்பட்ட மாற்று முறைகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.6

62, 58, 53, 50, 63, 52, 55 ஆகிய எண்களுக்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு ஊகச் சராசரி A=55 என எடுத்துக் கொண்டு கீழ்க்காணும் அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$d = x - A$ $= x - 55$	d^2
50	-5	25
52	-3	9
53	-2	4
55	0	0
58	3	9
62	7	49
63	8	64
	$\sum d = 8$	$\sum d^2 = 160$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \left(\frac{8}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{160}{7} - \frac{64}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{1056}{49}}$$

$$= \frac{32.49}{7}$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம் $\sigma \simeq 4.64$

(iv) படி விலக்க முறை (Step deviation method)

புள்ளி விவர எண்கள் மிகப் பெரியனவாகவும் மற்றும் ஒரு பொதுக் காரணியைக் கொண்டும் இருப்பின், திட்ட விலக்கம் காண, படி விலக்க முறையைப் பயன்படுத்துகிறோம். ஊகச் சராசரி A-ஐ முதலில் தேர்ந்தெடுத்து, பிறகு $d = \frac{x - A}{c}$ ஐக் கணக்கிட்டு விலக்கத்தை காண்கிறோம். இங்கு c என்பது $x–A$-ன் மதிப்புகளுக்கு ஒரு பொதுக் காரணியைக் குறிக்கும்.

இம்முறையில் திட்ட விலக்கம் காண பயன்படுத்தும் சூத்திரம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c.$

எடுத்துக்காட்டு 11.7

10 மாணவர்கள் கணிதத் தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு,

80, 70, 40, 50, 90, 60, 100, 60, 30, 80. இம்மதிப்புகளுக்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களின் பொதுக் காரணி c = 10 ஆகும். ஊகச் சராசரி $A = 70$ என எடுத்துக் கொள்க. இங்கு புள்ளி விவர மதிப்புகளின் எண்ணிக்கை, $n = 10$.

மேலும், $c = 10$, $d = \dfrac{x - A}{10}$ எனக் கொண்டு கீழ்க்காணும் அட்டவணையை அமைக்கவும்.

x	$d = \dfrac{x-70}{10}$	d^2
30	−4	16
40	−3	9
50	−2	4
60	−1	1
60	−1	1
70	0	0
80	1	1
80	1	1
90	2	4
100	3	9
	$\sum d = -4$	$\sum d^2 = 46$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \left(\frac{-4}{10}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{46}{10} - \frac{16}{100}} \times 10 = \sqrt{\frac{460 - 16}{100}} \times 10 = \sqrt{444} = 2\sqrt{111}$$

$\therefore$ திட்ட விலக்கம், $\sigma \simeq 21.07$.

மேலே குறிப்பிட்டுள்ள நான்கு முறைகளான நேரடிமுறை, கூட்டுச் சராசரி முறை, ஊகச் சராசரி முறை, படி விலக்க முறை ஆகியவற்றில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பயன்படுத்தி, விவரங்களின் தொகுப்பிற்கு திட்ட விலக்கத்தை எளிதில் காணமுடியும்.

ஒரே புள்ளி விவரத் தொகுப்பிற்கு வெவ்வேறு முறைகளில் திட்ட விலக்க மதிப்புகள் காணப்பட்டாலும் அவைகள் எதிர்பார்த்தவாறு வெவ்வேறாக இருக்காது. ஆகவே, σ மதிப்பினைக் காண மாணவர்கள் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களைப் பொருத்து, பொருத்தமான ஏதேனும் ஒரு முறையைப் பின்பற்றலாம்.

முடிவுகள்

(i) ஒரு பரவுதலின் ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் ஒரே எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ அதன் திட்ட விலக்கம் மாறாமல் இருக்கும்.

(ii) புள்ளி விவரத்தின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் k, என்ற பூச்சியமற்ற மாறிலியால் பெருக்கினாலோ அல்லது வகுத்தாலோ கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகளுக்கான திட்டவிலக்கம் அதன் முதல் திட்ட விலக்கத்தை முறையே, k ஆல் பெருக்க அல்லது வகுக்கக் கிடைக்கும் எண்ணாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 11.8

3, 5, 6, 7 ஆகிய புள்ளி விவரத்திற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க. ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 4 ஐக் கூட்ட கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகளுக்கான திட்ட விலக்கத்தையும் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரம்

$x = 3, 5, 6, 7$

இங்கு, $A = 6$ என்க.

x	$d = x - 6$	d^2
3	-3	9
5	-1	1
6	0	0
7	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

$$\text{திட்டவிலக்கம், } \sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$$

ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 4 ஐக் கூட்ட, $x = 7, 9, 10, 11$ ஆகிய புதிய மதிப்புகளைப் பெறுகிறோம்.

இங்கு, $A = 10$ என்க.

x	$d = x - 10$	d^2
7	-3	9
9	-1	1
10	0	0
11	1	1
	$\sum d = -3$	$\sum d^2 = 11$

$$\text{திட்ட விலக்கம், } \sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{11}{4} - \left(\frac{-3}{4}\right)^2}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{11}{4} - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{35}}{4}$$

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில் ஒவ்வொரு மதிப்புடனும் 4ஐக் கூட்ட, கிடைக்கும் புதிய திட்ட விலக்கம் மாறாமல் இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.9

40, 42, 48 எனும் இப்புள்ளி விவரத்திற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க. ஒவ்வொரு மதிப்பும் 3 ஆல் பெருக்கப்படும்போது கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகளுக்கான திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்கள்

40, 42, 48-ன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்போம்.

ஊகச் சராசரி $A = 44$ என்க.

x	$d = x - 44$	d^2
40	-4	16
42	-2	4
48	4	16
	$\sum d = -2$	$\sum d^2 = 36$

$$\text{திட்ட விலக்கம், } \sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{36}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right)^2}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{104}}{3}$$

ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 3ஆல் பெருக்க கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகள் 120,126,144.

ஊகச் சராசரி $A = 132$ என்க.

புதிய புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கம் σ_1 என்க.

x	$d = x - 132$	d^2
120	-12	144
126	-6	36
144	12	144
	$\sum d = -6$	$\sum d^2 = 324$

$$\text{திட்ட விலக்கம், } \sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{324}{3} - \left(\frac{-6}{3}\right)^2}$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{312}{3}} = \sqrt{104}$$

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில், ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 3-ஆல் பெருக்கும் போது, கிடைக்கும் புள்ளி விவரத்தின் புதிய திட்ட விலக்கம், முதல் திட்ட விலக்கத்தை 3 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் எண்ணாக இருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 11.10

முதல் n இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு முதல் n இயல் எண்கள் $1,2,3,\cdots,n$.

இவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, $\overline{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$$= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$

முதல் n இயல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல்,

$$\sum x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{(2n+1)}{3} - \frac{(n+1)}{2}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left[\frac{2(2n+1)-3(n+1)}{6}\right]}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{4n+2-3n-3}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

முதல் n இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$.

குறிப்புரை:

பின்வரும் முடிவுகளை அறிந்துக் கொள்க.

பொது வித்தியாசம் d கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் எந்த ஒரு தொடர்ச்சியான n உறுப்புகளின் திட்ட விலக்கம், $\sigma = d\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$. எனவே,

(i) $i, i+1, i+2, \cdots, i+n$-ன் திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, i \in \mathbb{N}$

(ii) தொடர்ச்சியான n இரட்டைப்படை முழுக்களின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in \mathbb{N}$

(iii) தொடர்ச்சியான n ஒற்றைப்படை முழுக்களின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 2\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n \in \mathbb{N}$

எடுத்துக்காட்டு 11.11

முதல் 10 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

தீர்வு முதல் n இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம் $= \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$

ஆகவே, முதல் 10 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம்

$$= \sqrt{\frac{10^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{100-1}{12}} \simeq 2.87.$$

தொகுக்கப்பட்டப் புள்ளி விவரங்களின் திட்ட விலக்கம் (Standard Deviation of grouped data)

(i) கூட்டுச் சராசரி முறை (Actual mean method)

தனித்த புள்ளி விவரங்களில் ஒவ்வொரு மதிப்பினையும், அதன் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள் எடுத்து, திட்ட விலக்கம் காண பயன்படும் சூத்திரம்

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$$ ஆகும். இங்கு, $d = x - \overline{x}$.

எடுத்துக்காட்டு 11.12

ஒரு கணித வினாடி வினாப் போட்டியில் 48 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் தரப்பட்டுள்ளன.

மதிப்பெண்கள் x	6	7	8	9	10	11	12
நிகழ்வெண்கள் f	3	6	9	13	8	5	4

இவ்விவரத்திற்கான திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு கீழ்க்கண்ட அட்டவணையை அமைக்க.

x	f	fx	$d = x - \overline{x} = x - 9$	fd	fd^2
6	3	18	−3	−9	27
7	6	42	−2	−12	24
8	9	72	−1	−9	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	8	8
11	5	55	2	10	20
12	4	48	3	12	36
	$\sum f=48$	$\sum fx=432$	$\sum d = 0$	$\sum fd = 0$	$\sum fd^2 = 124$

கூட்டு சராசரி, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{432}{48} = 9.$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f}}$

$$= \sqrt{\frac{124}{48}} = \sqrt{2.58} \simeq 1.61$$

(ii) ஊகச் சராசரி முறை (Assumed mean method)

ஊகச் சராசரியிலிருந்து புள்ளி விவர மதிப்புகளின் விலக்கங்களைக் கணக்கிடும் பொழுது, திட்ட விலக்கம் காணப் பயன்படும் சூத்திரம்,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2}. \quad \text{இங்கு } d = x - A.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.13

பின்வரும் புள்ளி விவரத்திற்கான திட்ட விலக்கம் காண்க.

x	70	74	78	82	86	90
f	1	3	5	7	8	12

தீர்வு ஊகச் சராசரி $A = 82$ என்க.

x	f	$d = x - 82$	fd	fd^2
70	1	−12	−12	144
74	3	−8	−24	192
78	5	−4	−20	80
82	7	0	0	0
86	8	4	32	128
90	12	8	96	768
	$\sum f = 36$		$\sum fd = 72$	$\sum fd^2 = 1312$

திட்ட விலக்கம் $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1312}{36} - \left(\frac{72}{36}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{328}{9} - 2^2}$

$= \sqrt{\frac{328 - 36}{9}}$

$= \sqrt{\frac{292}{9}} = \sqrt{32.44}$

$\therefore \quad \sigma \simeq 5.7$.

எடுத்துக்காட்டு 11.14

பின்வரும் பரவலின் விலக்க வர்க்க சராசரியைக் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	3.5-4.5	4.5-5.5	5.5-6.5	6.5-7.5	7.5-8.5
நிகழ்வெண்கள்	9	14	22	11	17

தீர்வு ஊகச் சராசரி $A = 6$ என்க.

பிரிவு இடைவெளி	x மைய மதிப்பு	f	$d = x - 6$	fd	fd^2
3.5-4.5	4	9	-2	-18	36
4.5-5.5	5	14	-1	-14	14
5.5-6.5	6	22	0	0	0
6.5-7.5	7	11	1	11	11
7.5-8.5	8	17	2	34	68
		$\sum f = 73$		$\sum fd = 13$	$\sum fd^2 = 129$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி, $\sigma^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2$

$$= \frac{129}{73} - \left(\frac{13}{73}\right)^2 = \frac{129}{73} - \frac{169}{5329}$$

$$= \frac{9417 - 169}{5329} = \frac{9248}{5329}$$

ஆகவே, விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\sigma^2 \simeq 1.74$.

(iii) படி விலக்க முறை (Step deviation method)

எடுத்துக்காட்டு 11.15

உலகக் கால்பந்து போட்டிகளில் 71 முன்னணி வீரர்கள் அடித்த கோல்களின் எண்ணிக்கையின் விவரங்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்விவரத்தின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நிகழ்வெண்கள்	8	12	17	14	9	7	4

தீர்வு $A = 35$ என்க.

நான்காவது நிரலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x–A-ன் மதிப்புகளின் பொதுக்காரணி $c = 10$.

பிரிவு இடைவெளி	x மைய மதிப்பு	f	$x–A$	$d = \frac{x-A}{c}$	fd	fd^2
0–10	5	8	–30	-3	-24	72
10–20	15	12	–20	-2	-24	48
20–30	25	17	–10	-1	-17	17
30–40	35	14	0	0	0	0
40–50	45	9	10	1	9	9
50–60	55	7	20	2	14	28
60–70	65	4	30	3	12	36
		$\sum f = 71$			$\sum fd = -30$	$\sum fd^2 = 210$

www.tntextbooks.in

திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c$

$$= \sqrt{\frac{210}{71} - \left(\frac{-30}{71}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{210}{71} - \frac{900}{5041}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{14910 - 900}{5041}} \times 10$$

$$= \sqrt{\frac{14010}{5041}} \times 10 = \sqrt{2.7792} \times 10$$

திட்ட விலக்கம், $\sigma \simeq 16.67$.

எடுத்துக்காட்டு 11.16

40 கம்பித் துண்டுகளின் நீளங்கள் (செ.மீ-க்கு திருத்தமாக) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவ்விவரத்திற்கான விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

நீளம் (செ.மீ)	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70
கம்பித் துண்டுகளின் எண்ணிக்கை	2	3	8	12	9	5	1

தீர்வு ஊகச் சராசரி $A = 35.5$ என்க.

நீளம்	மைய மதிப்பு x	துண்டுகளின் எண்ணிக்கை (f)	$d = x - A$	fd	fd^2
1-10	5.5	2	-30	-60	1800
11-20	15.5	3	-20	-60	1200
21-30	25.5	8	-10	-80	800
31-40	35.5	12	0	0	0
41-50	45.5	9	10	90	900
51-60	55.5	5	20	100	2000
61-70	65.5	1	30	30	900
		$\sum f = 40$		$\sum fd = 20$	$\sum fd^2 = 7600$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி, $\sigma^2 = \dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2 = \dfrac{7600}{40} - \left(\dfrac{20}{40}\right)^2$

$$= 190 - \frac{1}{4} = \frac{760 - 1}{4} = \frac{759}{4}$$

$\therefore \quad \sigma^2 = 189.75$.

11.2.3 மாறுபாட்டுக் கெழு (Coefficient of Variation)

மாறுபாட்டுக் கெழு கீழ்க்காணுமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$. இங்கு σ, $\overline{x}$ என்பவைகள் முறையே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் கூட்டுச் சராசரி ஆகும். மாறுபாட்டுக் கெழுவை சார்பு திட்ட விலக்கம் (relative standard deviation) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது.

www.tntextbooks.in

குறிப்புரை:

(i) இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட புள்ளி விவரத் தொகுப்புகளின் சீர்மைத் தன்மையை அல்லது நிலைப்புத் தன்மையை (consistency) ஒப்பிட, மாறுபாட்டுக் கெழு பயன்படுகிறது.

(ii) ஒரு புள்ளி விவரத்தின் மாறுபாட்டுக் கெழு அதிகமாக இருந்தால், அந்தப் புள்ளி விவரம் குறைந்த சீர்மைத் தன்மை அல்லது குறைந்த நிலைப்புத் தன்மை கொண்டுள்ளது.

(iii) மாறுபாட்டுக் கெழு குறைவாக இருந்தால், அந்தப் புள்ளி விவரம் அதிக சீர்மைத் தன்மை அல்லது அதிக நிலைப்புத் தன்மை கொண்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 11.17

18, 20, 15, 12, 25 என்ற விவரங்களுக்கு மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரியைக் கணக்கிடுவோம்.

கூட்டு சராசரி $\bar{x} = \dfrac{12+15+18+20+25}{5}$

$= \dfrac{90}{5} = 18.$

x	$d = x - 18$	d^2
12	−6	36
15	−3	9
18	0	0
20	2	4
25	7	49
	$\sum d = 0$	$\sum d^2 = 98$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{98}{5}}$$

$$= \sqrt{19.6} \simeq 4.427.$$

மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{4.427}{18} \times 100 = \frac{442.7}{18}.$$

$\therefore$ மாறுபாட்டுக் கெழு $C.V = 24.6$

எடுத்துக்காட்டு 11.18

5 கிரிக்கெட் விளையாட்டுப் போட்டிகளில் இரண்டு மட்டை வீரர்கள் எடுத்த ஓட்டங்கள் (runs) பின்வருமாறு. அவர்களில் ஓட்டங்கள் எடுப்பதில் யார் அதிக சீர்மைத் தன்மை உடையவர் ?

மட்டை வீரர் A	38	47	34	18	33
மட்டை வீரர் B	37	35	41	27	35

தீர்வு

மட்டை வீரர் A

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	−16	256
33	−1	1
34	0	0
38	4	16
47	13	169
170	0	442

$$\bar{x} = \frac{170}{5} = 34$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{442}{5}} = \sqrt{88.4} \simeq 9.4$$

மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{9.4}{34} \times 100 = \frac{940}{34} = 27.65$

$\therefore$ மட்டை வீரர் A எடுத்த ஓட்டங்களுக்கான மாறுபாட்டுக் கெழு $= 27.65$ (1)

மட்டை வீரர் B

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
27	−8	64
35	0	0
35	0	0
37	2	4
41	6	36
175	0	104

$$\bar{x} = \frac{175}{5} = 35$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{104}{5}} = \sqrt{20.8} \simeq 4.6$$

மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{4.6}{35} \times 100 = \frac{460}{35} = \frac{92}{7} = 13.14$

$\therefore$ மட்டை வீரர் B எடுத்த ஓட்டங்களுக்கான மாறுபாட்டுக் கெழு $= 13.14$ (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து B- யின் மாறுபாட்டுக் கெழு, A-ன் மாறுபாட்டுக்கெழுவை விடக்குறைவு. எனவே, B என்ற மட்டை வீரர், A என்ற மட்டை வீரரை விட ஓட்டங்கள் எடுப்பதில் அதிக சீர்மைத் தன்மையைக் கொண்டுள்ளார்.

எடுத்துக்காட்டு 11.19

ஒரு புள்ளி விவரத்தில் 30 மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 18 மற்றும் 3 ஆகும். அவற்றின் கூட்டுத் தொகையையும், மேலும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையையும் காண்க.

தீர்வு 30 மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி, $\bar{x} = 18$

எனவே, 30 மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை, $\sum x = 30 \times 18 = 540$ $\left(\bar{x} = \frac{\sum x}{n}\right)$

திட்ட விலக்கம், $\sigma = 3$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

www.tntextbooks.in

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 18^2 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{30} - 324 = 9$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 9720 = 270 \quad \Longrightarrow \quad \sum x^2 = 9990$$

$\therefore \quad \sum x = 540$ மற்றும் $\sum x^2 = 9990$.

எடுத்துக்காட்டு 11.20

ஒரு புள்ளி விவரத்தில், 20 மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 40 மற்றும் 15 என கணக்கிடப்பட்டன. அவைகளைச் சரிபார்க்கும்போது 43 என்ற மதிப்பு தவறுதலாக 53 என எழுதப்பட்டது தெரிய வந்தது. அவ்விவரத்தின் சரியான கூட்டுச் சராசரி மற்றும் சரியான திட்ட விலக்கம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு சரியான கூட்டுச் சராசரியை முதலில் காண்போம்

20 புள்ளி விவரங்களின் சராசரி, $\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = 40$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x}{20} = 40$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x = 20 \times 40 = 800$$

திருத்தப்பட்ட $\sum x = \sum x$ + சரியான மதிப்பு – தவறான மதிப்பு

திருத்தப்பட்ட $\sum x = 800 + 43 - 53 = 790.$

$\therefore$ திருத்தப்பட்ட சராசரி $= \frac{790}{20} = 39.5$ (1)

விலக்க வர்க்கச் சராசரி, $\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = 225$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\sum x^2}{20} - 40^2 = 225$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 32000 = 225 \times 20 = 4500.$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 32000 + 4500 = 36500$$

திருத்தப்பட்ட $\sum x^2 = \sum x^2$ + (சரியான மதிப்பு)^2 – (தவறான மதிப்பு)^2

திருத்தப்பட்ட $\sum x^2 = 36500 + 43^2 - 53^2 = 36500 + 1849 - 2809$

$= 36500 - 960 = 35540.$

எனவே, திருத்தப்பட்ட $\sigma^2 = \frac{\text{திருத்தப்பட்ட} \sum x^2}{n}$ – (திருத்தப்பட்ட சராசரி)^2

$= \frac{35540}{20} - (39.5)^2$

$= 1777 - 1560.25 = 216.75.$

திருத்தப்பட்ட $\sigma = \sqrt{216.75} \simeq 14.72.$

$\therefore$ திருத்தப்பட்ட சராசரி $= 39.5$ மற்றும் திருத்தப்பட்ட திட்ட விலக்கம் $\simeq 14.72$

எடுத்துக்காட்டு 11.21

ஒரு புள்ளி விவரத் தொகுப்பில் $\sum x=35$, $n=5$, $\sum(x-9)^2=82$ எனில், $\sum x^2$ மற்றும் $\sum(x-\overline{x})^2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

தீர்வு $\sum x = 35$ மற்றும் $n = 5$ என தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{35}{5} = 7.$$

$\sum x^2$ -ஐக் கணக்கிடுவோம்.

$$\sum(x-9)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x^2 - 18x + 81) = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - \left(18\sum x\right) + \left(81\sum 1\right) = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 - 630 + 405 = 82 \qquad \because \sum x = 35 \text{ மற்றும் } \sum 1 = 5$$

$$\Longrightarrow \quad \sum x^2 = 307.$$

$\sum(x-\overline{x})^2$ -ஐக் கணக்கிட,

$$\sum(x-9)^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-7-2)^2 = 82 \qquad \text{இங்கு } \overline{x} = 7. \text{ எனவே, } x-9 = (x-7)-2$$

$$\Longrightarrow \quad \sum[(x-7)-2]^2 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-7)^2 - 2\sum[(x-7)\times 2] + \sum 4 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 - 4\sum(x-\overline{x}) + 4\sum 1 = 82$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 - 4(0) + (4\times 5) = 82 \qquad \because \sum 1 = 5 \text{ மற்றும் } \sum(x-\overline{x}) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum(x-\overline{x})^2 = 62$$

$$\therefore \quad \sum x^2 = 307 \text{ மற்றும் } \sum(x-\overline{x})^2 = 62.$$

எடுத்துக்காட்டு 11.22

இரு விவரத் தொடர்களின் மாறுபாட்டுக் கெழுக்கள் 58 மற்றும் 69 என்க. மேலும், அவற்றின் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 21.2 மற்றும் 15.6 எனில், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரிகளைக் காண்க.

தீர்வு மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$$

முதல் தொடரின் கூட்டுச் சராசரி, $\overline{x}_1 = \frac{\sigma}{C.V} \times 100.$

$$= \frac{21.2}{58} \times 100 \qquad \because \quad C.V = 58 \text{ மற்றும் } \sigma = 21.2$$

$$= \frac{2120}{58} = 36.6$$

www.tntextbooks.in

இரண்டாவது தொடரின் கூட்டுச் சராசரி $\overline{x_2} = \frac{\sigma}{C.V} \times 100$

$= \frac{15.6}{69} \times 100 \quad \because$ C.V = 69 மற்றும் $\sigma = 15.6$

$= \frac{1560}{69}$

$= 22.6.$

முதலாவது தொடரின் கூட்டுச் சராசரி = 36.6 , இரண்டாவது தொடரின் கூட்டுச் சராசரி = 22.6.

பயிற்சி 11.1

1. பின்வரும் மதிப்புகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழு காண்க.

   (i) 59, 46, 30, 23, 27, 40, 52, 35, 29.

   (ii) 41.2, 33.7, 29.1, 34.5, 25.7, 24.8, 56.5, 12.5.

2. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் மீச்சிறு மதிப்பு 12. அதன் வீச்சு 59 எனில் அப்புள்ளி விவரத்தின் மீப்பெரு மதிப்பைக் காண்க.

3. 50 அளவுகளில் மிகப்பெரிய மதிப்பு 3.84கி.கி. அதன் வீச்சு 0.46கி.கி எனில், அவைகளின் மீச்சிறு மதிப்பைக் காண்க.

4. கண்டறிந்த புள்ளி விவரத் தொகுப்பிலுள்ள 20 மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கம் $\sqrt{5}$ என்க. புள்ளி விவரத்தின் ஒவ்வொரு மதிப்பையும் 2 ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய புள்ளி விவரங்களின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி காண்க.

5. முதல் 13 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

6. கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

   (i) 10, 20, 15, 8, 3, 4. (ii) 38, 40, 34 ,31, 28, 26, 34.

7. கீழ்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

x	3	8	13	18	23
f	7	10	15	10	8

8. ஒரு பள்ளியிலுள்ள 200 மாணவர்கள் ஒரு புத்தகக் கண்காட்சியில் வாங்கிய புத்தகங்களின் எண்ணிக்கையைப் பற்றிய விவரம் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	35	64	68	18	15

   இப்புள்ளி விவரத்தின் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

9. பின்வரும் புள்ளி விவரத்தின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் கணக்கிடுக.

x	2	4	6	8	10	12	14	16
f	4	4	5	15	8	5	4	5

www.tntextbooks.in

10. ஒரு பாதசாரி குறுக்குப் பாதையை கடக்கச் சிலர் (pedestrian crossing) எடுத்துக் கொண்ட நேர விவரம் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

நேரம் (விநாடியில்)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
நபர்களின் எண்ணிக்கை	4	8	15	12	11

இப்புள்ளி விவரத்திற்கு விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

11. வீட்டு உரிமையாளர்கள் 45 பேர் அவர்களுடைய தெருவின் ‘பசுமைச் சூழல்’ திட்டத்திற்காக நிதி அளித்தனர். வசூலிக்கப்பட்ட நிதித் தொகை விவரம் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொகை (₹)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
வீட்டு உரிமையாளர்களின் எண்ணிக்கை	2	7	12	19	5

இவ்விவரத்திற்கு விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

12. கீழ்க்காணும் பரவலின் (distribution) விலக்க வர்க்கச் சராசரி காண்க.

பிரிவு இடைவெளி	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
நிகழ்வெண்கள்	15	25	28	12	12	8

13. ஒரு புள்ளி விவரத் தொகுப்பிலுள்ள 100 மதிப்புகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 48 மற்றும் 10 ஆகும். அனைத்து மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை மற்றும் அவைகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க.

14. 20 மதிப்புகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 10 மற்றும் 2 என கணக்கிடப்பட்டன. பின்பு சரிபார்க்கும் போது 12 என்ற மதிப்பானது தவறுதலாக 8 என்று எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது தெரிய வந்தது. சரியான சராசரி மற்றும் சரியான திட்ட விலக்கம் ஆகியனவற்றைக் காண்க.

15. $n = 10$, $\overline{x} = 12$ மற்றும் $\sum x^2 = 1530$ எனில், மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக.

16. பின்வரும் மதிப்புகளின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் கணக்கிடுக : 20, 18, 32, 24, 26.

17. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் மாறுபாட்டுக் கெழு 57 மற்றும் திட்ட விலக்கம் 6.84 எனில், அதன் கூட்டுச் சராசரியைக் காண்க.

18. ஒரு குழுவில் 100 பேர் உள்ளனர், அவர்களின் உயரங்களின் கூட்டுச் சராசரி 163.8செ.மீ மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு 3.2 எனில், அவர்களுடைய உயரங்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

19. $\sum x = 99$, $n = 9$ மற்றும் $\sum (x-10)^2 = 79$ எனில், $\sum x^2$ மற்றும் $\sum (x-\overline{x})^2$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

20. ஒரு வகுப்பிலுள்ள A, B என்ற இரு மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு:

A	58	51	60	65	66
B	56	87	88	46	43

இவர்களில் யார் மிகுந்த சீர்மைத் தன்மையை கொண்டுள்ளார்?

www.tntextbooks.in

பயிற்சி 11.2

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 , 29 என்ற முதல் 10 பகா எண்களின் வீச்சு

(A) 28 (B) 26 (C) 29 (D) 27

2. தொகுப்பிலுள்ள விவரங்களில் மிகச் சிறிய மதிப்பு 14.1 மற்றும் அவ்விவரத்தின் வீச்சு 28.4 எனில், தொகுப்பின் மிகப் பெரிய மதிப்பு

(A) 42.5 (B) 43.5 (C) 42.4 (D) 42.1

3. தொகுப்பிலுள்ள விவரங்களில் மிகப்பெரிய மதிப்பு 72 மற்றும் மிகச்சிறிய மதிப்பு 28 எனில், அத்தொகுப்பின் வீச்சுக் கெழு

(A) 44 (B) 0.72 (C) 0.44 (D) 0.28

4 11 மதிப்புகளின் $\Sigma x = 132$ எனில், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரி

(A) 11 (B) 12 (C) 14 (D) 13

5. n உறுப்புகள் கொண்ட எந்த ஒரு எண்களின் தொகுப்பிற்கும் $\Sigma(x-\overline{x}) =$

(A) Σx (B) $\overline{x}$ (C) $n\overline{x}$ (D) 0

6. n உறுப்புகள் கொண்ட எந்த ஒரு எண்களின் தொகுப்பிற்கும் $(\Sigma x)-\overline{x} =$

(A) $n\overline{x}$ (B) $(n-2)\overline{x}$ (C) $(n-1)\overline{x}$ (D) 0

7. x, y, z- ன் திட்ட விலக்கம் t எனில், $x+5,\ y+5,\ z+5$-ன் திட்ட விலக்கம்

(A) $\frac{t}{3}$ (B) $t+5$ (C) t (D) $x\,y\,z$

8. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் திட்டவிலக்கம் 1.6 எனில், அதன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி (பரவற்படி)

(A) 0.4 (B) 2.56 (C) 1.96 (D) 0.04

9. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் விலக்க வர்க்க சராசரி 12.25 எனில், அதன் திட்ட விலக்கம்

(A) 3.5 (B) 3 (C) 2.5 (D) 3.25

10. முதல் 11 இயல் எண்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 10

11. 10, 10, 10, 10, 10-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

(A) 10 (B) $\sqrt{10}$ (C) 5 (D) 0

12. 14, 18, 22, 26, 30-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி 32 எனில், 28, 36, 44, 52, 60-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

(A) 64 (B) 128 (C) $32\sqrt{2}$ (D) 32

13. விவரங்களின் தொகுப்பு ஒன்றின் திட்டவிலக்கம் $2\sqrt{2}$. அதிலுள்ள ஒவ்வொரு மதிப்பும் 3 ஆல் பெருக்கக் கிடைக்கும் புதிய விவரத் தொகுப்பின் திட்டவிலக்கம்

(A) $\sqrt{12}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $9\sqrt{2}$

14. $\sum(x-\overline{x})^2 = 48,\ \overline{x} = 20$ மற்றும் $n = 12$ எனில், மாறுபாட்டுக் கெழு

(A) 25 (B) 20 (C) 30 (D) 10

15. சில விவரங்களின் கூட்டுச் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 48, 12 எனில், மாறுபாட்டுக்கெழு

(A) 42 (B) 25 (C) 28 (D) 48

நினைவில் கொள்க

- (i) வீச்சு $= L-S$. அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தின் மிகப்பெரிய மதிப்பிற்கும் மிகச்சிறிய மதிப்பிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் வீச்சு ஆகும்.

  (ii) வீச்சுக்கெழு $= \dfrac{L-S}{L+S}$.

- தொகுக்கப்படாத விவரங்களின் திட்டவிலக்கம் (σ)

  (i) $\sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2}$

  (ii) $\sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n}}$

  ($d = x - \overline{x}$ மற்றும் $\overline{x}$ = கூட்டுச்சராசரி)

  (iii) $\sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d}{n}\right)^2}$

  ($d = x - A$ மற்றும் A ஊகச் சராசரி)

  (iv) $\sqrt{\dfrac{\sum d^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$

  $\left(d = \dfrac{x-A}{c}\right)$

- தொகுக்கப்பட்ட விவரங்களின் திட்டவிலக்கம் (σ)

  (i) $\sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f}}$

  $d = x - \overline{x}$ மற்றும் $\overline{x}$ = கூட்டுசராசரி.

  (ii) $\sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2}$

  $d = x - A,\ A$ = ஊகச் சராசரி

  (iii) $\sqrt{\dfrac{\sum fd^2}{\sum f} - \left(\dfrac{\sum fd}{\sum f}\right)^2} \times c.$ இங்கு $d = \dfrac{x-A}{c}$

- கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணுடனும் (மதிப்பு) ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்டினாலோ அல்லது கழித்தாலோ கிடைக்கும் புதிய விவரத்தின் திட்டவிலக்கம் மாறாது.

- கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் (மதிப்பு) ஒரு மாறிலி k ஆல் பெருக்க அல்லது வகுக்கக் கிடைக்கும் புதிய மதிப்புகளின் திட்ட விலக்கமானது, பழைய திட்டவிலக்கத்தை மாறிலி k ஆல் பெருக்க அல்லது வகுக்கக் கிடைக்கும் எண்ணாக இருக்கும்.

- முதல் n இயல் எண்களின் திட்டவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}}$.

- திட்டவிலக்கத்தின் வர்க்கமானது, விலக்க வர்க்கச் சராசரி அல்லது பரவற்படி எனப்படும்.

- மாறுபாட்டுக் கெழு, $C.V = \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$. இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட விவரங்களின் சீர்மைத் தன்மையை ஒப்பிட மாறுபாட்டுக்கெழு பயன்படுகிறது.

www.tntextbooks.in

12

நிகழ்தகவு

It is remarkable that a science which began with the consideration of games of chance should have become the most important object of human knowledge -P.D. Laplace.

- அறிமுகம்
- நிகழ்தகவின் தொன்மை வரையறை
- நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்

பியரி டி. லாப்லாஸ்
(Pierre de Laplace)
(1749-1827)
பிரான்ஸ்

லாப்லாஸ் என்பார் எப்போதும் தலைசிறந்த அறிவியலாளர்களுள் ஒருவராக கருதப்படுகிறார், இவர் பிரான்சு நாட்டின் நியூட்டன் எனப் பெருமையாக அழைக்கப்படுகிறார்.

1812-ல் புள்ளியியலில் பல அடிப்படை முடிவுகளை உருவாக்கினார். இவர் விதிவரு முறையில் காரணத்தைக் கண்டறியும் கணிதத் தத்துவத்தினை நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் கூறினார். நிகழ்தகவின் கொள்கைகளை முதன்முதலில் அறிமுகப்படுத்தியவரும் இவரே ஆவார். இவரின் கணிதக் கொள்கைகளில் ஒன்று "நிகழ்தகவு என்பது சோதனையில் சாதகமான நிகழ்கவுகளுக்கும் மொத்த நடக்க இயலும் நிகழ்கவுகளுக்கும் உள்ள விகிதம்" என்பதாகும்.

12.1 அறிமுகம்

அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் பார்க்கும் நிகழ்வுகள் மற்றும் மேற்கொள்ளும் பெரும்பான்மையான செயல்கள் வாய்ப்புகளுக்கு உட்பட்டவை. பூகம்பம், புயல், ஆழிப்பேரலை, மின்னல் மற்றும் தொற்றுநோய் பரவுதல் போன்ற நிகழ்வுகள் ஏற்படுவதை முன்னரே ஊகிக்க இயலாது. எதிர்பாராமல் ஏற்படும் இந்நிகழ்வுகள் மனித குலத்திற்கு பேரிழப்பினை ஏற்படுத்துகின்றன. ஏற்கனவே நடந்த நிகழ்வுகளின் விவரங்கள் அடிப்படையில், இதுபோன்ற நிகழ்ச்சிகள் எதிர்காலத்தில் ஏற்படுமென துல்லியமாக முன்னரே ஊகிக்க இயலுமானால், தேவையான முன்தடுப்பு நடவடிக்கைகளாலும் சேதத்தைக் கட்டுப்படுத்தும் செயல்களாலும் மனித இனம் ஆபத்துகளிலிருந்து காப்பற்றப்படும். இவ்வாறு முன்கூட்டியே, நிகழ்வுகளை ஊகிக்க இயலுவதற்கு நிகழ்தகவியல் (Probability theory) கற்பது மிகவும் அவசியமாகிறது.

1654 ஆம் ஆண்டு செவாலியே டி–மியர் (Chevalier de Mere) என்பவரால் எழுப்பப்பட்ட ஒரு சூதாட்டக் கணக்கினால் புகழ்பெற்ற பிரெஞ்சு கணிதவியலறிஞர்கள் பிளாசி பாஸ்கல் (Blasie Pascal) மற்றும் பியரி டி-பெர்மாட் (Pierre de Fermat) ஆகியோருக்கிடையே கடிதப் பரிமாற்றம் நடைபெற்றது. இந்நிகழ்ச்சி நிகழ்தகவுக் கருத்தியலை கணிதத்தின் வாயிலாக உருவாக்கியது. கிறிஸ்டியன் ஹக்கின்ஸ் (Christian Huggens) (1629-1695), பெர்னோலி (Bernoulli) (1654-1705), டி மோய்வர் (De-Moivre) (1667-1754), பியரி டி லாப்லாஸ் (Pierre de Laplace) (1749-1827), காஸ் (Gauss) (1777-1855), பாய்சான் (Poisson) (1781-1845), செபிசேவ் (Chebyshev) (1821-1894) மற்றும் மார்கோவ் (Markov) (1856-1922) போன்ற கணிதவியலறிஞர்கள் நிகழ்தகவுக் கருத்தியலின் வளர்ச்சிக்கு பெரும் பங்களித்தனர். 1933-ல் ருஷ்ய கணிதவியலறிஞர் எ.கோல்மோகோரோவ் (A.Kolmogorov) என்பார் எடுகோள் அணுகுமுறையில் (Axiomatic approach) நவீன நிகழ்தகவுக் கருத்தியலுக்கு அடிகோலினார்.

நிகழ்ச்சிகள் நடப்பதையும், நடக்காமலிருப்பதையும் பொருத்தே நிகழ்தகவுகள் இருக்கும். நிகழ்தகவியலின் கருத்துக் கூறுகளான வாய்ப்புச் சோதனை (ராண்டம் சோதனை) (random experiment), முயற்சி (trial), கூறு வெளி (sample space) மற்றும் பல்வேறு வகையான நிகழ்ச்சிகள் (events) பற்றிய வரையறைகளை நாம் கற்போம்.

கணிதவியலறிஞர்கள் சோதனை (experiment) மற்றும் சோதனையின் முடிவுகளை (outcomes) பரந்த அளவில் பயன்படுத்துகின்றனர். கூர்ந்து கவனிக்கப்படும் அல்லது அளவீடு செய்யும் எந்த ஒரு செயலும் சோதனை எனப்படும். குறிப்பிட்ட நாளில் நூலகத்திற்கு வருகை புரிந்தோரின் எண்ணிக்கையை பதிவு செய்தல், ஒரு நாணயத்தை சுண்டுதல், பல நிறங்களில் பந்துகள் கொண்ட பையிலிருந்து ஒரு பந்தினை எடுத்தல் மற்றும் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஒரு நாளில் நிகழும் விபத்துகளின் எண்ணிக்கையை பதிவு செய்தல் ஆகியன சோதனைக்கான சில உதாரணங்களாகும்.

ஒரு சோதனையை நிகழ்த்துவதற்கு முன்பாகவே முடிவினைக் கூற இயலாத சோதனை வாய்ப்புச் சோதனை என்பதாகும். இருப்பினும் ஒரு சோதனையின் முடிவில் நிகழ வாய்ப்புள்ள அனைத்து முடிவுகளையும் நாம் பட்டியலிடலாம்.

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் நிகழ வாய்ப்புள்ள அனைத்து நிகழ்வுகளின் கணமே அச்சோதனையின் கூறுவெளி எனப்படும். இது S என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. ஒரு சோதனையை ஒவ்வொரு முறையும் செய்வது ஒரு முயற்சி (trial) எனப்படும்.

கூறுவெளி S -ன் எந்த ஒரு உட்கணமும் சோதனையின் ஒரு நிகழ்ச்சி (event) எனப்படும்.

A என்பது S-ன் உட்கணம் என்க. ஒரு சோதனை நடத்தப்படும் போது கிடைத்த முடிவானது A-யில் உள்ளது எனில், A என்ற நிகழ்ச்சி நடந்துள்ளது என்று கூறலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளின் மூலம் சமவாய்ப்புச் சோதனை, கூறுவெளி மற்றும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகியவற்றை விளக்குவோம்.

சமவாய்ப்புச் சோதனை	கூறுவெளி	சில நிகழ்ச்சிகள்
ஒரு சீரான நாணயத்தை ஒருமுறை சுண்டுதல்.	$S=\{H,T\}$	$\{H\}$ அதாவது, தலை விழுவது ஒரு நிகழ்ச்சி. $\{T\}$ அதாவது, பூ விழுவது மற்றொரு நிகழ்ச்சி.
ஒரு சீரான நாணயத்தை இரு முறை சுண்டுதல்.	$S=\{HH,HT,TH,TT\}$	$\{HT,HH\}$ மற்றும் $\{TT\}$ ஆகியன சில நிகழ்ச்சிகள்.
சீரான பகடையை ஒருமுறை உருட்டுதல்.	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{1,3,5\},\{2,4,6\},\{3\}$ மற்றும் $\{6\}$ ஆகியன சில நிகழ்ச்சிகள்.

சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events)

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளில் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கான வாய்ப்புகள் சமமாக இருக்குமானால், அந்நிகழ்ச்சிகள் சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்போது தலை விழுதலும், பூ விழுதலும் சம வாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events)

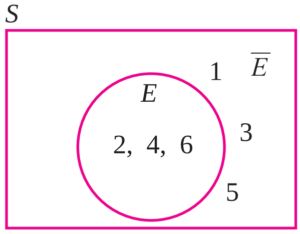
ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளில் எந்த ஒரு நிகழ்ச்சியும், மற்ற நிகழ்ச்சிகளை நிகழவிடாமல் நடந்தால், அந்நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். அதாவது இத்தகைய நிகழ்ச்சிகள் ஒரே நேரத்தில் நிகழாது. A மற்றும் B என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $A \cap B = \phi$.

படம் 12.1

ஒரு சீரான நாணயத்தைச் சுண்டும் போது தலை விழுதல் ஆனது பூ விழுதலை நிகழவிடாது. அதேபோல் ஒரு சீரான பகடையை உருட்டினால், கிடைக்க வாய்ப்புள்ள ஆறு விளைவுகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும். ஏனெனில், பகடையை உருட்டும் போது ஒரே நேரத்தில் பகடையின் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட முகங்கள் விளைவுகளாக அமையாது.

நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Complementry events)

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஏதாவது ஒரு நிகழ்ச்சியை E எனக் கொள்க. S என்பது அதன் கூறுவெளி என்க. S -லிருந்து ஆனால் E -ல் இல்லாத மற்ற விளைவுகளை E -ன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி என்கிறோம். இது $\overline{E}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. எனவே $\overline{E} = S - E$. மேலும் E மற்றும் $\overline{E}$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.



படம் 12.2

ஒரு பகடை உருட்டுதலில், 2-ன் மடங்கு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி $E = \{2, 4, 6\}$ என குறித்தால் E-ன் நிரப்பு நிகழ்ச்சி $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$ ஆகும்.

நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive events)

நிகழ்ச்சிகள் $E_1, E_2, \cdots, E_n$ என்பனவற்றின் சேர்ப்புக் கணம் சம வாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி ஆக இருப்பின், $E_1, E_2, \cdots, E_n$ ஆகியன நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

உறுதி நிகழ்ச்சி (Sure event)

ஒரு பகடையை உருட்டும் போது 1, 2, 3, 4, 5 மற்றும் 6 எண்களில் ஏதேனும் ஓர் எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி உறுதியாக நிகழும். எனவே இது ஒரு உறுதி நிகழ்ச்சி ஆகும்.

சமவாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி ஓர் உறுதி நிகழ்ச்சியாகும். ஏனெனில், அதன் ஏதாவது ஒரு உறுப்பு, உறுதியாகச் சோதனையில் ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் நிகழும்.

இயலா நிகழ்ச்சி (Impossible event)

ஒருபோதும் நடைபெற முடியாத நிகழ்ச்சி இயலா நிகழ்ச்சி எனப்படும். இது ϕ எனக் குறிக்கப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும் போது எண் 7 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி ஒரு இயலா நிகழ்ச்சி ஆகும்.

சாதகமான விளைவுகள் (Favourable outcomes)

தேவையான ஒரு நிகழ்ச்சிக்குத் தொடர்பான விளைவுகள், அந்நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விளைவுகள் எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும்போது ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்கப் பெறுவதை நிகழ்ச்சி E என்க. விளைவுகள் 1, 3 மற்றும் 5 என்பன E-ன் சாதகமான விளைவுகள் ஆகும்.

www.tntextbooks.in

குறிப்பு

இப்பாடப்பிரிவில் சமவாய்ப்பு விளைவுகள் மற்றும் முடிவுறு கூறுவெளி கொண்ட சமவாய்ப்புச் சோதனைகளை மட்டும் எடுத்துக்கொள்கிறோம். மேலும், இப்பகுதியில் சோதனைக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்ட நாணயங்கள் மற்றும் பகடைகள் ஒரே சீரானவை எனக்கொள்வோம்.

12.2 நிகழ்தகவிற்கான தொன்மை வரையறை (Classical definition of probability)

ஒரு கூறுவெளியில் n விளைவுகளில், m விளைவுகள் A என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமாக இருப்பின், $n(S) = n$, $n(A) = m$ எனக் குறிப்பிடுவோம். நிகழ்ச்சி A-ன் நிகழ்தகவு $P(A)$ ஆனது m-க்கும் n-க்கும் உள்ள விகிதமாக வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது,

$$P(A) = \frac{A \text{ க்குச் சாதகமான விளைவுகளின் எண்ணிக்கை}}{\text{சோதனையின் விளைவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

$$\therefore \; P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{m}{n} \text{ ஆகும்.}$$

குறிப்பு

(i) மேற்கண்ட நிகழ்தகவிற்கான தொன்மை வரையறையானது, முடிவுறா விளைவுகள் கொண்ட சோதனையிலும், சமவாய்ப்பு அல்லாத சோதனையிலும் ஏற்புடையதாக இருக்காது .

(ii) A என்ற ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு 0-க்கும் 1-க்கும் இடையிலோ அல்லது 0 ஆகவோ அல்லது 1 ஆகவோ அமையும்.
அதாவது, $0 \le P(A) \le 1$.

(iii) உறுதியான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு ஒன்று ஆகும். அதாவது $P(S) = 1$.

(iv) நடக்க இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு பூச்சியம் ஆகும். அதாவது $P(\phi) = 0$.

(v) A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A \text{ அல்ல}) = P(\overline{A}) \text{ அல்லது } P(A') = \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} - \frac{m}{n}$$

$$\Longrightarrow \; P(\overline{A}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

(vi) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

எடுத்துக்காட்டு 12.1

ஒரு சீரான பகடை ஒரு முறை உருட்டப்படுகிறது. பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) எண் 4 கிடைத்தல்
(ii) ஒரு இரட்டைப்படை எண் கிடைத்தல்
(iii) 6-ன் பகா காரணிகள் கிடைத்தல்
(iv) 4-ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைத்தல்

தீர்வு சீரான ஒரு பகடை உருட்டுதலின் கூறுவெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. எனவே $n(S) = 6$

(i) எண் 4 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$A = \{4\} \therefore n(A) = 1.$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}.$

(ii) ஒரு இரட்டைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

படம் 12.3

$B = \{2,4,6\} \quad \therefore \; n(B) = 3.$

எனவே, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

(iii) 6-ன் பகாக்காரணிகள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை C என்க.

$C = \{2,3\} \quad \therefore \; n(C) = 2.$

எனவே, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

(iv) 4 -ஐ விடப் பெரிய எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை D என்க.

$D = \{5,6\}.$ ஆகவே, $n(D) = 2.$

எனவே, $P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.2

ஒரு சீரான நாணயம் இரண்டு முறை சுண்டப்படுகிறது. கீழ்க்காணும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) இரு தலைகள் கிடைத்தல் (ii) குறைந்தது ஒரு தலை கிடைத்தல்

(iii) ஒரு பூ மட்டும் கிடைத்தல்.

தீர்வு ஒரு நாணயத்தை இரண்டு முறைகள் சுண்டுவதில் கிடைக்கும் கூறுவெளி

$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$

$\therefore \quad n(S) = 4.$

(i) இரு தலைகள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க. $A = \{ HH \}.$

$n(A) = 1.$

ஆகவே, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}.$

(ii) குறைந்தது ஒரு தலை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

எனவே, $B = \{ HH, HT, TH \}.$ ஆகவே, $n(B) = 3.$

ஆகவே, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{4}.$

(iii) ஒரு பூ மட்டும் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை C என்க. எனவே, $C = \{ HT, TH \}$

$n(C) = 2.$

ஆகவே, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.3

முதல் இருபது இயல் எண்களிலிருந்து ஒரு முழு எண் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்த எண் ஒரு பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு கூறுவெளி, $S = \{1, 2, 3, \cdots, 20\}$.

$\therefore \quad n(S) = 20.$

தேர்ந்தெடுக்கப்படும் எண் பகா எண்ணாக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

$$n(A) = 8.$$

எனவே, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.4

35 பொருட்கள் அடங்கிய தொகுப்பு ஒன்றில் 7 பொருட்கள் குறைபாடுடையன. அத்தொகுப்பிலிருந்து ஒரு பொருள் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அது குறைபாடற்ற பொருளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு மொத்தப் பொருட்களின் எண்ணிக்கை $n(S) = 35.$

குறைபாடுடைய பொருட்களின் எண்ணிக்கை $= 7.$

குறைபாடற்ற பொருளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

குறைபாடற்ற பொருட்களின் எண்ணிக்கை $n(A) = 35 - 7 = 28.$

எனவே, குறைபாடற்ற பொருளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.5

இரு சீரான பகடைகள் ஒரு முறை உருட்டப்படுகின்றன. கீழ்க்காணும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) முக எண்களின் கூடுதல் 8 ஆக இருத்தல் (ii) முக எண்கள் ஒரே எண்களாக (doublet) இருத்தல் (iii) முக எண்களின் கூடுதல் 8-ஐ விட அதிகமாக இருத்தல்

தீர்வு இரு பகடைகளை உருட்டும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளி

$$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$$
$$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$$
$$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$$
$$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$$
$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$$
$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

படம் 12.4

$\therefore \; n(S) = 6 \times 6 = 36$

(i) முக எண்களின் கூடுதல் 8 ஆக இருக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}.$$

ஆகவே, $n(A) = 5.$

எனவே, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}.$

www.tntextbooks.in

(ii) இரு பகடைகளிலும் ஒரே எண் (இரட்டைகள்) கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}.$$

எனவே, $n(B) = 6$.

ஆகவே, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(iii) C என்பது முக எண்களின் கூடுதல் 8-ஐ விட அதிகமாகக் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$C = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

எனவே, $n(C) = 10$.

ஆகவே, $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.6

நன்கு கலைத்து வைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்புச் சோதனை முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அந்தச் சீட்டு பின்வருவனவாக இருக்க நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) இராசா (ii) கருப்பு இராசா

(iii) ஸ்பேடு (iv) டயமண்ட் 10

52 சீட்டுகளின் விவரம்.

Spade ♠	Hearts ♥	Clavor ♣	Diamond ♦
A	A	A	A
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	5	5	5
6	6	6	6
7	7	7	7
8	8	8	8
9	9	9	9
10	10	10	10
J	J	J	J
Q	Q	Q	Q
K	K	K	K
13	13	13	13

தீர்வு மொத்த சீட்டுகளின் எண்ணிக்கை $n(S) = 52$.

(i) A என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு இராசாவாக (King) இருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$\therefore n(A) = 4$.

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(ii) B என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு கருப்பு இராசாவாக (Black King) இருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(B) = 2$.

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

(iii) C என்பது எடுக்கப்பட்ட சீட்டு ஸ்பேடு (Spade) சீட்டாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(C) = 13$.

$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

(iv) D என்பது டயமண்ட் 10 (Diamond - 10) என்ற சீட்டு எடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(D) = 1$.

$P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{52}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.7

ஒரு வகுப்பில் உள்ள 35 மாணவர்களில் 20 பேர் ஆண்கள் மற்றும் 15 பேர் பெண்கள். சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவர் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார் எனில், பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (i) தேர்ந்தெடுக்கப்படுபவர் மாணவனாக இருத்தல் (ii) தேர்ந்தெடுக்கப்படுபவர் மாணவியாக இருத்தல்.

தீர்வு S என்பது இச்சோதனையில் கூறுவெளி எனக் கொள்க.

$\therefore$ மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $n(S) = 35$

இச்சோதனையில் மாணவன் மற்றும் மாணவி ஆகியோரைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சிகளை முறையே B மற்றும் G எனக் கொள்க.

ஆகவே, $n(S) = 35,\ n(B) = 20$ மற்றும் $n(G) = 15$.

(i) மாணவனைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{20}{35}$

எனவே, $P(B) = \dfrac{4}{7}$.

(ii) மாணவியைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(G) = \dfrac{n(G)}{n(S)} = \dfrac{15}{35}$

ஆகவே, $P(G) = \dfrac{3}{7}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.8

ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் மழை வருவதற்கான நிகழ்தகவு 0.76. அக்குறிப்பிட்ட நாளில் மழை வராமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு குறிப்பிட்ட நாளில் மழை வரும் என்ற நிகழ்ச்சியை A எனவும் அந்நாளில் மழை வராமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சியை $\overline{A}$ எனவும் கொள்க.

$$P(A) = 0.76$$

$$P(\overline{A}) = 1 - 0.76 \qquad \because P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$= 0.24$$

$\therefore$ குறிப்பிட்ட நாளில் மழை வராமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.24 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.9

ஒரு பையில் 5 சிவப்பு மற்றும் சில நீல நிறப் பந்துகள் உள்ளன. அப்பையிலிருந்து ஒரு நீல நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு, ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவின் மூன்று மடங்கு எனில், அப்பையிலுள்ள நீல நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

தீர்வு பையிலுள்ள நீல நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை x எனக் கொள்க.

எனவே, மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை, $n(S) = 5 + x$.

B என்பது ஒரு நீல நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி மற்றும் R என்பது ஒரு சிவப்பு நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி எனக் கொள்க.

www.tntextbooks.in

$P(B) = 3P(R)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\Longrightarrow \quad \frac{n(B)}{n(S)} = 3\frac{n(R)}{n(S)}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x}{5+x} = 3\left(\frac{5}{5+x}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad x = 15$$

ஆகவே, நீல நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை $= 15$.

எடுத்துக்காட்டு 12.10

பின்வருவனவற்றிற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நெட்டாண்டில் (leap year) 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருத்தல்.

(ii) சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நெட்டாண்டில் 52 வெள்ளிக்கிழமைகள் மட்டுமே இருத்தல்.

(iii) சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சாதாரண வருடத்தில் (Non-leap year) 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருத்தல்.

தீர்வு

(i) ஒரு நெட்டாண்டில் உள்ள நாட்களின் எண்ணிக்கை = 366. அதாவது 52 வாரங்கள் மற்றும் 2 நாட்கள்.

52 வாரங்களில் 52 வெள்ளிக் கிழமைகள் உள்ளன. மீதமுள்ள இரண்டு நாட்கள் கீழ்க்காணும் ஏழு வாய்ப்புகளில் ஏதேனும் ஒன்றாக இருக்கும்.

(ஞாயிறு, திங்கள்), (திங்கள், செவ்வாய்), (செவ்வாய், புதன்), (புதன், வியாழன்), (வியாழன், வெள்ளி), (வெள்ளி, சனி) மற்றும் (சனி, ஞாயிறு).

ஒரு நெட்டாண்டில் 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவும் மேலேயுள்ள 7 வாய்ப்புகளில் ஒரு வெள்ளிக்கிழமை வருவதற்கான நிகழ்தகவும் ஒன்றே ஆகும். ஆகவே பின்வருமாறு கூறுவெளியை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$$S = \left\{\begin{array}{l}(\text{ஞாயிறு}, \text{திங்கள்}), (\text{திங்கள்}, \text{செவ்வாய்}), (\text{செவ்வாய்}, \text{புதன்}),\\ (\text{புதன்}, \text{வியாழன்}), (\text{வியாழன்}, \text{வெள்ளி}), (\text{வெள்ளி}, \text{சனி}), (\text{சனி}, \text{ஞாயிறு})\end{array}\right\}.$$

ஆகவே, $n(S) = 7$.

மேலேயுள்ள 7 வாய்ப்புகளில், ஒரு வெள்ளிக்கிழமை வருவதற்கான நிகழ்ச்சியை A என்க.

$A = \{(\text{வியாழன்}, \text{வெள்ளி}), (\text{வெள்ளி}, \text{சனி})\}$ எனவே, $n(A) = 2$.

எனவே, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$.

ஆகவே, லீப் வருடத்தில் 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{7}$.

(ii) ஒரு நெட்டாண்டில் 52 வெள்ளிக்கிழமைகள் மட்டுமே வருவதாக இருப்பின், 52 வாரங்கள் போக மீதமுள்ள இரு நாட்களில் வெள்ளிக்கிழமை உறுதியாக வராது.

www.tntextbooks.in

B என்பது, மீதமுள்ள இரு நாட்களில் வெள்ளிக்கிழமை இல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி எனக் கொள்க.

எனவே, B = {(ஞாயிறு, திங்கள்), (திங்கள், செவ்வாய்), (செவ்வாய், புதன்), (புதன், வியாழன்), (சனி, ஞாயிறு)}.

ஆகவே, $n(B) = 5$.

எனவே, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{7}$.

இங்கு A மற்றும் B என்பன நிரப்பு நிகழ்ச்சிகள் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

(iii) சாதாரண வருடத்தின் மொத்த நாட்களின் எண்ணிக்கை = 365.

அதாவது சாதாரண வருடத்தில் 52 வாரங்கள் மற்றும் ஒரு நாள் இருக்கும்.

52 வாரங்களில் 52 வெள்ளிக்கிழமைகள் இருக்கும். மீதமுள்ள ஒரு நாள் பின்வரும் ஏழு வாய்ப்புகளில் ஒன்றாக அமையும்.

ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி மற்றும் சனி.

எனவே, ஒரு சாதாரண ஆண்டில் 53 வெள்ளிக் கிழமைகள் இருக்க, மேலேயுள்ள ஏழு வாய்ப்புகளில் ஒரு வெள்ளிக்கிழமை இருக்க வேண்டும்.
எனவே, கூறுவெளியை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

S = {ஞாயிறு, திங்கள், செவ்வாய், புதன், வியாழன், வெள்ளி, சனி}.

$\therefore\ n(S) = 7$.

ஏழு வாய்ப்புகளில், வெள்ளிக்கிழமை வரும் நிகழ்ச்சியை C எனக் கொள்க.

C = {வெள்ளி} $\implies n(C) = 1$.

$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{1}{7}$.

எனவே, ஒரு சாதாரண ஆண்டில் 53 வெள்ளிக் கிழமைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{7}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.11

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி A என்க. அந்நிகழ்ச்சியின் நிரப்பு நிகழ்ச்சி $\overline{A}$ என்க. $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$ எனில், $P(A)$ ஐக் காண்க.

தீர்வு $P(A):P(\overline{A}) = 7:12$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$P(A) = 7k$ மற்றும் $P(\overline{A}) = 12k$ எனக் கொள்க.
இங்கு $k > 0$

நாம் $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ என அறிவோம்.

$7k + 12k = 1 \implies 19k = 1$.

$k = \frac{1}{19}$.

$\therefore\ P(A) = 7k = \frac{7}{19}$.

மாற்றுமுறை

$\frac{P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{7}{12}$

$12P(A) = 7\times P(\overline{A})$

$= 7\,[1-P(A)]$

$19P(A) = 7$

எனவே, $P(A) = \frac{7}{19}$.

பயிற்சி 12.1

1. ஒரு பையில் உள்ள 1 முதல் 100 வரை எண்களால் குறிக்கப்பட்ட 100 சீட்டுகளிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு எடுக்கப்படும் சீட்டின் எண் 10 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

2. ஒரு சீரான பகடை இரண்டு முறை உருட்டப்படுகிறது. முக எண்களின் கூடுதல் 9 கிடைக்கப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க?

3. இரு பகடைகள் ஒரு சேர உருட்டப்படுகின்றன. முக எண்களைக் கொண்டு அமைக்கப்படும் ஈரிலக்க எண் 3 ஆல் வகுபடும் எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

4. 12 நல்ல முட்டைகளுடன் 3 அழுகிய முட்டைகள் கலந்துள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு முட்டை, அழுகியதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

5. இரு நாணயங்களை ஒரே சமயத்தில் சுண்டும்போது, அதிகபட்சமாக ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

6. நன்கு கலைத்து அடுக்கிய 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. பின்வருவனவற்றிற்கு நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.
   (i) எடுத்த சீட்டு டயமண்ட் ஆக இருக்க (ii) எடுத்த சீட்டு டயமண்ட் இல்லாமல் இருக்க (iii) எடுத்த சீட்டு ஏஸ் சீட்டாக இல்லாமல் இருக்க.

7. மூன்று நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு நிகழ்தகவினைக் காண்க.

   (i) குறைந்தது ஒரு தலை கிடைப்பது (ii) இரு பூக்கள் மட்டும் கிடைப்பது (iii) குறைந்தது இரு தலைகள் கிடைப்பது.

8. ஒரு பையில் 1 முதல் 6 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட 6 வெள்ளை நிறப் பந்துகளும் மற்றும் 7 முதல் 10 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட 4 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது எனில், பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு நிகழ்தகவினைக் காண்க.

   (i) எடுக்கப்பட்ட பந்து ஒரு இரட்டை எண் கொண்ட பந்தாக இருத்தல்

   (ii) எடுக்கப்பட்ட பந்து ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்தாக இருத்தல்.

9. 1 முதல் 100 வரையிலான முழு எண்களிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு எண் (i) ஒரு முழு வர்க்கமாக (perfect square) இருக்க (ii) முழு கனமாக இல்லாமல் (not a cube) இருக்க ஆகியனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

10. அர்ஜெண்டினா, பங்களாதேஷ், சீனா, அங்கோலா, ருஷ்யா மற்றும் அல்ஜீரியா ஆகிய நாடுகளின் பெயர்களைக் கொண்ட பட்டியலிருந்து ஒரு சுற்றுலாப்பயணி சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு நாட்டின் பெயரைத் தேர்ந்தெடுக்கிறார். “அ” என்ற எழுத்தில் ஆரம்பமாகும் நாட்டின் பெயரை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

11. ஒரு பெட்டியில் 4 பச்சை, 5 நீலம் மற்றும் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்க அது

    (i) சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருக்க (ii) பச்சை நிறப் பந்தாக இல்லாமலிருக்க ஆகியனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

www.tntextbooks.in

12. 20 சீட்டுகளில் 1 முதல் 20 வரையுள்ள முழு எண்கள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகின்றது. அவ்வாறு எடுக்கப்பட்ட சீட்டிலுள்ள எண்

(i) 4-ன் மடங்காக இருக்க (ii) 6-ன் மடங்காக இல்லாமல் இருக்க

ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

13. 3, 5, 7 ஆகிய எண்களை இலக்கங்களாகக் கொண்டு ஒரு இரண்டிலக்க எண் அமைக்கப்படுகின்றது. அவ்வெண் 57 ஐ விடப் பெரியதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. (அவ்வெண்ணில் ஒரே இலக்கத்தை மீண்டும் பயன்படுத்தக் கூடாது).

14. மூன்று பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படும்போது, மூன்று பகடைகளிலும் ஒரே எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

15. இரு பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் முக எண்களின் பெருக்கற்பலன் ஒரு பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

16. ஒரு முகவையில் நீலம், பச்சை மற்றும் வெள்ளை நிறங்களிலான 54 பளிங்குக்கற்கள் உள்ளன. ஒரு பளிங்குக் கல்லை எடுக்கும்போது, நீல நிறப் பளிங்குக்கல் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}$ மற்றும் பச்சை நிறப் பளிங்குக்கல் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{9}$ எனில், அம்முகவையில் உள்ள வெள்ளை நிறப் பளிங்குக் கற்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க

17. ஒரு பையில் உள்ள 100 சட்டைகளில், 88 சட்டைகள் நல்ல நிலையிலும், 8 சட்டைகள் சிறிய குறைபாட்டுடனும் மற்றும் 4 சட்டைகள் பெரிய குறைபாட்டுடனும் உள்ளன. A என்ற வணிகர் நல்ல நிலையில் உள்ள சட்டைகளை மட்டுமே ஏற்கிறார். ஆனால் B என்ற வணிகர் அதிக குறைபாடு உடைய சட்டைகளை மட்டும் ஏற்க மறுக்கிறார். சமவாய்ப்பு முறையில் ஏதேனும் ஓர் சட்டையை தேர்ந்தெடுக்க அது (i) A-க்கு ஏற்புடையதாக அமைய (ii) B-க்கு ஏற்புடையதாக அமைய ஆகியனவற்றிற்கு நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

18. ஒரு பையில் உள்ள 12 பந்துகளில் x பந்துகள் வெள்ளை நிறமுடையவை. (i) சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்க, அது வெள்ளை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. (ii) 6 புதிய வெள்ளை நிறப் பந்துகளை அப்பையில் வைத்தபின்னர், ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்தைத் தேர்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு ஆனது (i)-ல் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவினைப் போல இருமடங்கு எனில், x-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

19. பிக்கி உண்டியலில் (Piggy bank) 100 ஐம்பது பைசா நாணங்களும் 50 ஒரு ரூபாய் நாணயங்களும் 20 இரண்டு ரூபாய் நாணயங்களும் மற்றும் 10 ஐந்து ரூபாய் நாணயங்களும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு நாணயம் தேர்ந்தெடுக்கும் போது (i) ஐம்பது பைசா நாணயமாக இருக்க (ii) ஐந்து ரூபாய் நாணயமாக இல்லாமல் இருக்க ஆகியனவற்றின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

www.tntextbooks.in

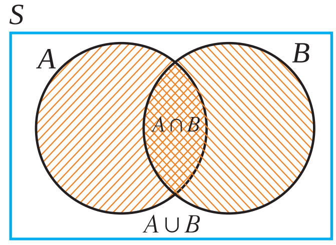
12.3 நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம் (Addition theorem on probability)

S என்ற முடிவுறு வெற்றற்றக் கணத்தின் உட்கணங்கள் A மற்றும் B எனில்,

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$ மற்றும் $n(S) \neq 0$.

இருபுறமும் $n(S)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A\cap B)}{n(S)} \qquad (1)$$



படம் 12.5

உட்கணங்கள் A மற்றும் B ஆகியனவற்றை ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் A மற்றும் B என்ற நிகழ்ச்சிகளாகக் கருதினால், (1) ஆனது $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ எனக் கிடைக்கும்.

இம்முடிவே நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றமாகும்.

குறிப்பு

(i) $A\cup B$ என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெற வேண்டுமெனில் A என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறலாம் அல்லது B என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெறலாம் அல்லது இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே நேரத்தில் நடைபெறலாம். $A\cap B$ என்ற நிகழ்ச்சி நடைபெற வேண்டுமெனில் A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே நேரத்தில் நடைபெறவேண்டும்.

(ii) A-யும் B-யும் ஒன்றையொன்றும் விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், $A\cap B = \emptyset$ ஆகும். எனவே, $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$. ஏனெனில், $P(A\cap B) = 0$.

(iii) $A\cap\overline{B}$ என்ற நிகழ்ச்சியை, ஒரு கணமாக கருதும்போது $A\cap\overline{B}$ மற்றும் $A\setminus B$ என்பன சம கணங்களாகும்.

முடிவுகள் (நிரூபணம் இல்லாமல்)

(i) A, B மற்றும் C என்பன கூறுவெளி S -ஐச் சார்ந்த ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(B\cap C) - P(A\cap C) + P(A\cap B\cap C).$$

(ii) A_1, A_2 மற்றும் A_3 ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

(iii) $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

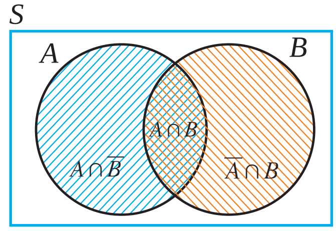
$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n).$$

(iv) $P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$,

$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$

இங்கு, $A\cap\overline{B}$ என்பது A-வும் B இல்லாமலும் எனப் பொருள்படும்

இதே போல், $\overline{A}\cap B$ என்பது B-யும் A இல்லாமலும் எனப் பொருள்படும்.



படம் 12.6

எடுத்துக்காட்டு 12.12

மூன்று நாணயங்கள் ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தை பயன்படுத்தி, சரியாக இரு பூக்கள் அல்லது குறைந்தபட்சம் ஒரு தலையாவது கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு கூறுவெளி $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$.

ஆகவே, $n(S) = 8$.

சரியாக இரு பூக்கள் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க

எனவே, $A = \{HTT, TTH, THT\}$ மற்றும் $n(A) = 3$.

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}.$$

குறைந்தது ஒரு தலையாவது கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க

எனவே, $B = \{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}$ மற்றும் $n(B) = 7$.

$$\therefore \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}.$$

A மற்றும் B ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள். ஏனெனில்

$A \cap B = A$. எனவே, $P(A \cap B) = P(A) = \frac{3}{8}$.

$\therefore P(A$ அல்லது $B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ஆகவே $P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$.

குறிப்பு

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் நாம் நிகழ்தகவின் கூட்டல் விதியை பயன்படுத்தியுள்ளோம். இருப்பினும் $A \cup B = B$ என்பதால் $P(A \cup B) = P(B) = \frac{7}{8}$ என எளிதில் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.13

ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படுகிறது. குறைந்தது ஒரு உருட்டலிலாவது எண் 5 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க. (கூட்டல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துக)

தீர்வு ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படும்பொழுது கிடைக்கும் கூறுவெளி S-ன் எண்ணிக்கை $n(S) = 36$ ஆகும்.

முதல் உருட்டலில் எண் 5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$$\therefore \quad A = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}.$$

ஆகவே, $n(A) = 6$, $P(A) = \frac{6}{36}$.

இரண்டாம் உருட்டலில் எண் 5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

$$\therefore \quad B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}.$$

www.tntextbooks.in

ஆகவே, $n(B) = 6$ மற்றும் $P(B) = \frac{6}{36}$.

மேலும், $A \cap B = \{5, 5\}$

ஆகவே, A மற்றும் B ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்காத நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$\therefore \quad n(A \cap B) = 1$ மற்றும் $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$.

$\therefore$ நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தின்படி,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.14

ஒரு மாணவிக்கு மருத்துவக் கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.16 என்க. பொறியியல் கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.24 மற்றும் இரு கல்லூரிகளிலும் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.11 எனில்,

(i) மருத்துவம் மற்றும் பொறியியல் கல்லூரிகளில் ஏதேனும் ஒரு கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

(ii) மருத்துவக் கல்லூரியில் மட்டுமோ அல்லது பொறியியல் கல்லூரியில் மட்டுமோ சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

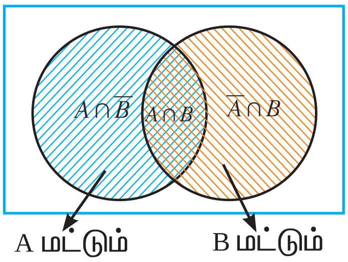
தீர்வு மருத்துவ கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி A என்க. பொறியியல் கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி B என்க.

(i) $P(A) = 0.16, \quad P(B) = 0.24$ மற்றும் $P(A \cap B) = 0.11$

$P($ஏதாவது ஒரு கல்லூரியில் சேர்க்கை கிடைப்பது$)$

$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.16 + 0.24 - 0.11 = 0.29$ ஆகும்.



படம் 12.7

(ii) $P($ஏதாவது ஒரு கல்லூரியில் மட்டும் சேர்க்கை கிடைப்பது$)$

$= P$ (A மட்டும் அல்லது B மட்டும்)

$= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

$= [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$

$= (0.16 - 0.11) + (0.24 - 0.11) = 0.18$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12.15

"ENTERTAINMENT" என்ற சொல்லிலுள்ள எழுத்துகளிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு எழுத்தைத் தேர்வு செய்ய, அவ்வெழுத்து ஆங்கில உயிரெழுத்தாகவோ அல்லது எழுத்து T ஆகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க. (எழுத்துகள் திரும்பத் திரும்ப வரலாம்).

www.tntextbooks.in

தீர்வு ENTERTAINMENT என்ற சொல்லில் 13 எழுத்துக்கள் உள்ளன.

$\therefore \quad n(S) = 13.$

ஓர் உயிரெழுத்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியை A என்க.

$\therefore \quad n(A) = 5.$

ஆகவே, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{13}.$

T என்ற எழுத்தைத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியை B என்க.

$\therefore \quad n(B) = 3$

ஆகவே, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{3}{13}.$

எனவே, $P(A$ அல்லது $B) = P(A) + P(B)$ ($\because$ A-யும் B-யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்)

$$= \frac{5}{13} + \frac{3}{13} = \frac{8}{13}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.16

A, B மற்றும் C என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் நிறைவுசெய் நிகழ்ச்சிகள் என்க. மேலும், $P(B) = \dfrac{3}{2}P(A)$ மற்றும் $P(C) = \dfrac{1}{2}P(B)$ எனில், $P(A)$-ஐ காண்க.

தீர்வு $P(A) = p$ என்க. ஆகவே, $P(B) = \dfrac{3}{2}P(A) = \dfrac{3}{2}p.$

மேலும், $P(C) = \dfrac{1}{2}P(B) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}p\right) = \dfrac{3}{4}p.$

A, B மற்றும் C ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் நிறைவு செய் நிகழ்ச்சிகள் எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$\therefore \quad P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ மற்றும் $S = A \cup B \cup C.$

தற்போது, $P(S) = 1. \implies P(A) + P(B) + P(C) = 1$

$$\implies \quad p + \frac{3}{2}p + \frac{3}{4}p = 1$$

$$\implies \quad 4p + 6p + 3p = 4 \implies p = \frac{4}{13}$$

$\therefore \quad P(A) = \dfrac{4}{13}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.17

52 சீட்டுகளைக் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படும் போது, அச்சீட்டு ஒரு இராசா (King) அல்லது ஒரு ஹார்ட் (Heart) அல்லது ஒரு சிவப்பு நிறச் சீட்டாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு A, B மற்றும் C என்பன முறையே ஒரு இராசா, ஒரு ஹார்ட் மேலும் ஒரு சிவப்பு நிறச் சீட்டு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

எனவே, $n(S) = 52,\quad n(A) = 4,\quad n(B) = 13$ மற்றும் $n(C) = 26.$

$n(A \cap B) = 1,\quad n(B \cap C) = 13,\quad n(C \cap A) = 2$ மற்றும் $n(A \cap B \cap C) = 1.$

$\therefore \quad P(A) = \dfrac{4}{52},\quad P(B) = \dfrac{13}{52}$ மற்றும் $P(C) = \dfrac{26}{52}$. மேலும்,

www.tntextbooks.in

$P(A\cap B)=\frac{1}{52}$, $P(B\cap C)=\frac{13}{52}$, $P(C\cap A)=\frac{2}{52}$ மற்றும் $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{52}$.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$$

$$=\frac{4}{52}+\frac{13}{52}+\frac{26}{52}-\frac{1}{52}-\frac{13}{52}-\frac{2}{52}+\frac{1}{52}=\frac{44-16}{52}$$

$$=\frac{7}{13}.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.18

ஒரு பையில் 10 வெள்ளை, 5 கருப்பு, 3 பச்சை மற்றும் 2 சிவப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு பந்து, வெள்ளை அல்லது கருப்பு அல்லது பச்சை நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு S-ஐக் கூறுவெளி என்க.

$\therefore\ n(S)=20.$

W, B மற்றும் G ஆகியன முறையே ஒரு வெள்ளை, ஒரு கருப்பு மற்றும் ஒரு பச்சை நிறப் பந்தைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்க.

ஒரு வெள்ளை நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(W)=\frac{n(W)}{n(S)}=\frac{10}{20}.$

ஒரு கருப்பு நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{5}{20}.$

ஒரு பச்சை நிறப் பந்தை எடுக்கும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(G)=\frac{n(G)}{n(S)}=\frac{3}{20}.$

$\therefore$ ஒரு பந்தை தேர்ந்தெடுக்க அது வெள்ளை அல்லது கருப்பு அல்லது பச்சையாக இருக்க நிகழ்தகவு $P(W\cup B\cup G)=P(W)+P(B)+P(G)$ ($\because$ W, B மற்றும் G ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.)

$$=\frac{10}{20}+\frac{5}{20}+\frac{3}{20}=\frac{9}{10}.$$

(குறிப்பு : $P(W\cup B\cup G)=P(R')=1-P(R)=1-\frac{2}{20}=\frac{9}{10}$ எனவும் விடையை பெறலாம்)

பயிற்சி 12.2

1. A மற்றும் B என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். மேலும் $P(A)=\frac{3}{5}$ மற்றும் $P(B)=\frac{1}{5}$ எனில், $P(A\cup B)$ -ஐக் காண்க .

2. A மற்றும் B என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளில் $P(A)=\frac{1}{4}, P(B)=\frac{2}{5}$ மற்றும் $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ எனில், $P(A\cap B)$ -ஐக் காண்க.

3. A மற்றும் B என்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளில் $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{7}{10}$ மற்றும் $P(A\cup B)=1$ எனில், (i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A'\cup B')$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

4. ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படுகிறது. முதலாவதாக உருட்டப்படும்போது ஒரு இரட்டைப்படை எண் கிடைத்தல் அல்லது அவ்விரு உருட்டலில் முக எண்களின் கூடுதல் 8 ஆக இருத்தல் எனும் நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

5. 1 முதல் 50 வரையிலான முழுக்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஓர் எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்போது அவ்வெண் 4 அல்லது 6 ஆல் வகுபடுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

6. ஒரு பையில் 50 மரை ஆணிகளும் (bolts), 150 திருகு மரைகளும் (nuts) உள்ளன. அவற்றுள் பாதி மரை ஆணிகளும், பாதி திருகு மரைகளும் துருப்பிடித்தவை. சமவாய்ப்பு முறையில் ஏதேனும் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அது துருப்பிடித்ததாக அல்லது ஒரு மரை ஆணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

7. இரு பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் சேர உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் முக எண்களின் கூடுதல் 3 ஆல் மற்றும் 4 ஆல் வகுபடாமலிருக்க நிகழ்தகவு காண்க.

8. ஒரு கூடையில் 20 ஆப்பிள்களும் 10 ஆரஞ்சுப் பழங்களும் உள்ளன. அவற்றுள் 5 ஆப்பிள்கள் மற்றும் 3 ஆரஞ்சுகள் அழுகியவை. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருவர் ஒரு பழத்தை எடுத்தால், அது ஆப்பிளாகவோ அல்லது நல்ல பழமாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

9. ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்களில் 40% பேர் கணித வினாடி வினா நிகழ்ச்சியிலும், 30% பேர் அறிவியல் வினாடி வினா நிகழ்ச்சியிலும், 10% பேர் அவ்விரண்டு வினாடி வினா நிகழ்ச்சிகளிலும் கலந்து கொண்டனர். அவ்வகுப்பிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு மாணவன் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால், அவர் கணித வினாடி வினா நிகழ்ச்சியிலோ அல்லது அறிவியல் வினாடி வினா நிகழ்ச்சியிலோ அல்லது இரு நிகழ்ச்சிகளிலுமோ கலந்து கொண்டதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

10. நன்கு கலைத்து அடுக்கி வைக்கப்பட்ட 52 சீட்டுகளைக் கொண்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு சீட்டு எடுக்கப்படுகிறது. அந்தச் சீட்டு ஸ்பேடாகவோ (Spade) அல்லது இராசாவாகவோ (King) இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

11. ஒரு பையில் 10 வெள்ளை, 6 சிவப்பு மற்றும் 10 கருப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்தினை எடுக்கும்போது அது வெள்ளை அல்லது சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

12. 2, 5, 9 என்ற எண்களைக் கொண்டு, ஓர் இரண்டிலக்க எண் அமைக்கப்படுகிறது. அந்த எண் 2 அல்லது 5 ஆல் வகுபடுமாறு அமைய நிகழ்தகவு காண்க.
(அமைக்கப்படும் எண்ணில் ஒரே இலக்கம் மீண்டும் வரலாம்)

13. "ACCOMMODATION" என்ற சொல்லின் ஒவ்வொரு எழுத்தும் தனித்தனியே சிறிய காகிதங்களில் எழுதப்பட்டு, அந்த 13 சிறிய காகிதங்களும் ஒரு முகவையில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் முகவையிலிருந்து ஒரு காகிதத்தைத் தேர்வு செய்யும் போது, அதில் இடம் பெறும் எழுத்து

(i) 'A' அல்லது 'O' ஆகவோ

(ii) 'M' அல்லது 'C' ஆகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

14. ஒரு புதிய மகிழ்வுந்து (car) அதனுடைய வடிவமைப்பிற்காக விருது பெறும் நிகழ்தகவு 0.25 என்க. சிறந்த முறையில் எரிபொருள் பயன்பாட்டிற்கான விருது பெறும் நிகழ்தகவு 0.35 மற்றும் இரு விருதுகளும் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.15 எனில், அம்மகிழ்வுந்து

(i) குறைந்தது ஏதாவது ஒரு விருது பெறுதல்

(ii)ஒரே ஒரு விருது மட்டும் பெறுதல் ஆகியநிகழ்ச்சிகளுக்கானநிகழ்தகவுகளைக்காண்க

15. A, B, C ஆகியோர் ஒரு வினாவிற்குத் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}$ என்க. A மற்றும் B இருவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{8}{15}$. B மற்றும் C இருவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{2}{7}$. A மற்றும் C இருவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண நிகழ்தகவு $\frac{12}{35}$, மூவரும் சேர்ந்து தீர்வு காண நிகழ்தகவு $\frac{8}{35}$ எனில், யாரேனும் ஒருவர் அவ்வினாவின் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

பயிற்சி 12.3

சரியான விடையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

1. ϕ என்பது ஒரு இயலா நிகழ்ச்சி எனில், $P(\phi) =$

   (A) 1 (B) $\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

2. S என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி எனில், $P(S) =$

   (A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

3. A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு p எனில், பின்வருவனவற்றில் p எதை நிறைவு செய்யும்

   (A) $0 < p < 1$ (B) $0 \le p \le 1$ (C) $0 \le p < 1$ (D) $0 < p \le 1$

4. A மற்றும் B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள். மேலும் S என்பது சமவாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி எனில், $P(\overline{A} \cap B) =$

   (A) $P(B) - P(A \cap B)$ (B) $P(A \cap B) - P(B)$
   (C) $P(S)$ (D) $P[(A \cup B)']$

5. ஒரு மாணவன் கணிதத்தில் 100 மதிப்பெண் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{4}{5}$. அவர் 100 மதிப்பெண் பெறாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

   (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

6. A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளில் $P(A) = 0.25,\ P(B) = 0.05$ மற்றும் $P(A \cap B) = 0.14$ எனில், $P(A \cup B) =$

   (A) 0.61 (B) 0.16 (C) 0.14 (D) 0.6

7. 20 பொருட்களில் 6 பொருட்கள் குறைபாடுடையவை. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பொருள் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அது குறையற்றதாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

   (A) $\frac{7}{10}$ (B) 0 (C) $\frac{3}{10}$ (D) $\frac{2}{3}$

8. A மற்றும் B என்பன இரண்டு ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்க. அந்நிகழ்ச்சியின் கூறுவெளி S, $P(A) = \frac{1}{3}P(B)$ மற்றும் $S = A \cup B$ எனில், $P(A) =$

   (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{8}$

9. A, B மற்றும் C என்பனஒன்றையொன்று விலக்கும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் என்க. அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{5}{12}$ எனில், $P(A \cup B \cup C) =$

   (A) $\frac{19}{12}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) 1

10. $P(A) = 0.25, P(B) = 0.50, P(A \cap B) = 0.14$ எனில், $P(A$ யும் அல்ல மற்றும் B யும் அல்ல$) =$
(A) 0.39 (B) 0.25 (C) 0.11 (D) 0.24

11. ஒரு பையில் 5 கருப்பு, 4 வெள்ளை மற்றும் 3 சிவப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில்தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு பந்து சிவப்பு நிறமாக இல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.
(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{4}{12}$ (C) $\frac{3}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

12. ஒரே நேரத்தில் இரு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. பகடையின் இரண்டு முகங்களிலும் ஒரே எண்ணாக இருக்க நிகழ்தகவு
(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$

13. ஒரு சீரான பகடை ஒரு முறை உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் எண் பகா எண் அல்லது பகு எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு
(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{1}{6}$

14. ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டும் சோதனையில் 3 தலைகள் அல்லது 3 பூக்கள் கிடைக்க நிகழ்தகவு
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

15. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கும் போது அது ஒரு ஏஸ் (ace)ஆக இல்லாமலும் மற்றும் ஒரு இராசாவாக (king) இல்லாமலிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.
(A) $\frac{2}{13}$ (B) $\frac{11}{13}$ (C) $\frac{4}{13}$ (D) $\frac{8}{13}$

16. ஒரு நெட்டாண்டில் (Leap year) 53 வெள்ளிக்கிழமைகள் அல்லது 53 சனிக்கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவு
(A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{3}{7}$

17. ஒரு சாதரண வருடமானது 53 ஞாயிற்றுக்கிழமைகள் மற்றும் 53 திங்கட்கிழமைகள் கொண்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.
(A) $\frac{1}{7}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) 0

18. 52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு எடுக்கும்போது, அது ஹார்ட் அரசியாக (Heart queen) இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு.
(A) $\frac{1}{52}$ (B) $\frac{16}{52}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{1}{26}$

19. ஒரு உறுதி நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு
(A) 1 (B) 0 (C) 100 (D) 0.1

20. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவானது வெற்றியாகவோ அல்லது தோல்வியாகவோ இருக்கும். அச்சோதனையில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு தோல்விக்கான நிகழ்தகவினைப் போல் இரு மடங்கு எனில், வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) 0

www.tntextbooks.in

விடைகள்

1. கணங்களும் சார்புகளும்

பயிற்சி 1.1

2. (i) A (ii) ϕ **3.** (i) {b, c} (ii) ϕ (iii) $\{a, e, f, s\}$

4. (i) {2, 4, 6, 7, 8, 9} (ii) {4, 6} (iii) {4, 6, 7, 8, 9}

10. {–5, –3, –2}, {–5, –3}, சேர்ப்புப் பண்பு உடையது அல்ல

பயிற்சி 1.2

2. (i)-லிருந்து (iv) வரை உள்ள வினாக்களுக்கு பல விடைகள் உண்டு அவற்றில் ஒரு விடை :
(i) $A' \cup (A \cap B)$ அல்லது $(A \backslash B)'$ (ii) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (iii) $A \backslash (B \cup C)$ (iv) $(A \cap B) \backslash C$

5. (i) {12} (ii) {4, 8, 12, 20, 24, 28}

பயிற்சி 1.3

1. 300 **2.** 430 **3.** 35 **5.** 100 **6.** 10 % **7.** (i) 10 (ii) 25 (iii) 15
8. (i) 450 (ii) 3550 (iii) 1850 **9.** 15

பயிற்சி 1.4

1. (i) சார்பல்ல (ii) சார்பு **2.** மதிப்பகம் ={1, 2, 3, 4, 5}; வீச்சகம் ={1, 3, 5, 7, 9}

3. (i) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பும் அல்ல மற்றும் மேல் சார்பும் அல்ல
(ii) மாறிலிச் சார்பு (iii) ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு

4. (i) சார்பல்ல (ii) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு
(iii) சார்பல்ல (iv) இருபுறச் சார்பு அல்லது ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு

5. $a=-2,\ b=-5,\ c=8,\ d=-1$ **6.** வீச்சகம் $\left\{-\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}\right\}$; A யிலிருந்து A-க்கு f ஒரு சார்பல்ல

7. ஒன்றுக்கு ஒன்றான மற்றும் மேல் சார்பு **8.** (i) 12 மற்றும் 14 (ii) 13 மற்றும் 15 **9.** $a = 9,\ b = 15$

10. (i) $f = \{(5,-7),(6,-9),(7,-11),(8,-13)\}$
(ii) துணை மதிப்பகம் $= \{-11, 4, 7, -10, -7, -9, -13\}$
(iii) வீச்சகம் $= \{-7, -9, -11, -13\}$ (iv) ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு

11. (i) சார்பு (ii) சார்பு (iii) சார்பல்ல (iv) சார்பல்ல (v) சார்பு

12.

x	–1	–3	–5	–4
$f(x)$	2	1	6	3

13. $\{(6,1),(9,2),(15,4),(18,5),(21,6)\}$;

x	6	9	15	18	21
$f(x)$	1	2	4	5	6

14. $\{(4,3),(6,4),(8,5),(10,6)\}$;

x	4	6	8	10
$f(x)$	3	4	5	6

15. (i) 16 (ii) –32 (iii) 5 (iv) $\frac{2}{3}$ **16.** (i) 23 (ii) 34 (iii) 2

பயிற்சி 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	**C**	**C**	**A**	**A**	**B**	**A**	**B**	**B**	**B**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	**B**	**C**	**D**	**A**	**D**	**D**	**B**	**A**	**C**

2. மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசைகளும் தொடர்களும்

பயிற்சி 2.1

1. (i) $-\frac{1}{3}, 0, 1$ (ii) $-27, 81, -243$ (iii) $-\frac{3}{4}, 2, -\frac{15}{4}$

2. (i) $\frac{9}{17}, \frac{11}{21}$ (ii) $-1536, 18432$ (iii) 36, 78 (iv) $-21, 57$

3. 378, $\frac{25}{313}$ 4. 195, 256 5. 2, 5, 15, 35, 75 6. 1, 1, 1, 2, 3, 5

பயிற்சி 2.2

1. கூட்டுத் தொடர் 6, 11, 16, $\cdots$; பொது உறுப்பு $5n+1$ 2. பொது வித்தியாசம் -5, $t_{15}=55$

3. $t_{29}=3$ 4. $t_{12}=23\sqrt{2}$ 5. $t_{17}=84$ 6. (i) 27 உறுப்புகள் (ii) 34 உறுப்புகள்

8. $t_{27}=109$ 9. $n=10$ 10. 7 11. முதல் வருடம் : 100, $t_{15}=2200$

12. 2560 13. 10, 2, –6 அல்லது –6, 2, 10 14. 2, 6, 10 அல்லது 10, 6, 2 16. A.P., ₹95,000

பயிற்சி 2.3

1. (i) பெருக்குத்தொடர், $r=2$ (ii) பெருக்குத்தொடர், $r=5$
   (iii) பெருக்குத்தொடர், $r=\frac{2}{3}$ (iv) பெருக்குத்தொடர், $r=\frac{1}{12}$
   (v) பெருக்குத்தொடர், $r=\frac{1}{2}$ (vi) பெருக்குத்தொடர் அல்ல

2. -2^7 3. 2, 6, 18 , $\cdots$ 4. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots$ 5. (i) $n=8$ (ii) $n=11$ 6. $n=5$ 7. $r=5$

8. $r=\frac{5}{2}$ அல்லது $\frac{2}{5}$; உறுப்புகள் $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$ அல்லது $\frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$. 9. 18, 6, 2 அல்லது 2, 6, 18

10. 4, 2, 1 அல்லது 1, 2, 4 11. $1, 3, 9, \cdots$ அல்லது $9, 3, 1, \cdots$

12. ₹$1000\left(\frac{105}{100}\right)^{12}$ 13. ₹ $50,000\left(\frac{85}{100}\right)^{15}$

பயிற்சி 2.4

1. (i) 2850 (ii) 7875 2. 1020 3. (i) 260 (ii) –75 4. (i) 1890 (ii) 50

5. -820 6. $\frac{39}{11}+\frac{40}{11}+\frac{41}{11}+\cdots$ 7. 8 உறுப்புகள் அல்லது 23 உறுப்புகள்

8. 55350 9. 740 10. 7227 11. 36 12. 12000 13. 15 நாட்கள்

14. A.P., ₹37,200 16. 156 முறைகள் 20. 1225 செங்கற்கள்

பயிற்சி 2.5

1. $s_{20}=\frac{15}{4}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right]$ **2.** $s_{27}=\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{27}\right]$ **3.** (i) 765 (ii) $\frac{5}{2}(3^{12}-1)$

4. (i) $\frac{1-(0.1)^{10}}{0.9}$ (ii) $\frac{10}{81}(10^{20}-1)-\frac{20}{9}$ **5.** (i) $n=6$ (ii) $n=6$ **6.** $\frac{75}{4}\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{23}\right]$

7. $3+6+12+\cdots$ **8.** (i) $\frac{70}{81}[10^n-1]-\frac{7n}{9}$ (ii) $n-\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$

9. $s_{15}=\frac{5(4^{15}-1)}{3}$ **10.** இரண்டாவது வாய்ப்பு; மாம்பழங்களின் எண்ணிக்கை 1023. **11.** $r=2$

பயிற்சி 2.6

1. (i) 1035 (ii) 4285 (iii) 2550 (iv) 17395 (v) 10650 (vi) 382500

2. (i) $k=12$ (ii) $k=9$ **3.** 29241 **4.** 91 **5.** 3818 ச.செ.மீ **6.** 201825 க.செ.மீ

பயிற்சி 2.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	**D**	**C**	**D**	**D**	**A**	**B**	**B**	**B**	**B**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	**A**	**B**	**D**	**A**	**B**	**B**	**A**	**C**	**A**

3. இயற்கணிதம்

பயிற்சி 3.1

1. $\left(4,\frac{3}{2}\right)$ **2.** $(1,5)$ **3.** $(3,2)$ **4.** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ **5.** $(1,5)$

6. $\left(\frac{11}{23},\frac{22}{31}\right)$ **7.** $(2,4)$ **8.** $(2,1)$ **9.** $\left(5,\frac{1}{7}\right)$ **10.** $(6,-4)$

பயிற்சி 3.2

1. (i) $(4,3)$ (ii) $(0.4, 0.3)$ (iii) $(2,3)$ (iv) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$

2. (i) 23 , 7 (ii) ₹18,000 , ₹14,000 (iii) 42 (iv) ₹800 (v) 253 ச.செ.மீ (vi) 720 கி.மீ

பயிற்சி 3.3

1. (i) $4,-2$ (ii) $\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{3}{2},-\frac{1}{3}$ (iv) $0,-2$

(v) $\sqrt{15},\ -\sqrt{15}$ (vi) $\frac{2}{3},1$ (vii) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) $-13,11$

2. (i) x^2-3x+1 (ii) x^2-2x+4 (iii) x^2+4 (iv) $x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{5}$

(v) $x^2-\frac{x}{3}+1$ (vi) $x^2-\frac{x}{2}-4$ (vii) $x^2-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$ (viii) $x^2-\sqrt{3}x+2$

பயிற்சி 3.4

1. (i) $x^2+2x-1,\ 4$ (ii) $3x^2-11x+40,\ -125$

(iii) $x^2+2x-2,\ 2$ (iv) $x^2-\frac{5}{3}x+\frac{5}{9},\ -\frac{50}{9}$

(v) $2x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x+\frac{51}{32},\ -\frac{211}{32}$ (vi) $x^3-3x^2-8x+\frac{55}{2},\ -\frac{41}{2}$

2. $a=-6,\ b=11,$ மீதி 5 **3.** $p=-2,\ q=0,$ மீதி -10

பயிற்சி 3.5

1. (i) $(x-1)(x+2)(x-3)$ (ii) $(x-1)(2x+3)(2x-1)$ (iii) $(x-1)(x-12)(x-10)$ (iv) $(x-1)(4x^2-x+6)$ (v) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (vi) $(x+1)(x+2)(x+10)$ (vii) $(x-2)(x-3)(2x+1)$ (viii) $(x-1)(x^2+x-4)$ (ix) $(x-1)(x+1)(x-10)$ (x) $(x-1)(x+6)(2x+1)$ (xi) $(x-2)(x^2+3x+7)$ (xii) $(x+2)(x-3)(x-4)$

பயிற்சி 3.6

1. (i) $7x^2yz^3$ (ii) x^2y (iii) $5c^3$ (iv) $7xyz^2$

2. (i) $c-d$ (ii) $x-3a$ (iii) $m+3$ (iv) $x+11$ (v) $x+2y$ (vi) $2x+1$ (vii) $x-2$ (viii) $(x-1)(x^2+1)$ (ix) $4x^2(2x+1)$ (x) $(a-1)^3(a+3)^2$

3. (i) x^2-4x+3 (ii) $x+1$ (iii) $2(x^2+1)$ (iv) x^2+4

பயிற்சி 3.7

1. x^3y^2z **2.** $12x^3y^3z$ **3.** $a^2b^2c^2$ **4.** $264a^4b^4c^4$ **5.** a^{m+3}

6. $xy(x+y)$ **7.** $6(a-1)^2(a+1)$ **8.** $10xy(x+3y)(x-3y)(x^2-3xy+9y^2)$

9. $(x+4)^2(x-3)^3(x-1)$ **10.** $420x^3(3x+y)^2(x-2y)(3x+1)$

பயிற்சி 3.8

1. (i) $(x-3)(x-2)(x+6)$ (ii) $(x^2+2x+3)(x^4+2x^2+x+2)$ (iii) $(2x^2+x-5)(x^3+8x^2+4x-21)$ (iv) $(x^3-5x-8)(2x^3-3x^2-9x+5)$

2. (i) $(x+1)(x+2)^2$ (ii) $(3x-7)^3(4x+5)$ (iii) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$ (iv) $x(x+2)(5x+1)$ (v) $(x-2)(x-1)$ (vi) $2(x+1)(x+2)$

பயிற்சி 3.9

1. (i) $\frac{2x+3}{x-4}$ (ii) $\frac{1}{x^2-1}$ (iii) $(x-1)$ (iv) $\frac{x^2+3x+9}{x+3}$ (v) x^2-x+1 (vi) $\frac{x+2}{x^2+2x+4}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$ (viii) $(x+3)$ (ix) $\frac{(x-1)}{(x+1)}$ (x) 1 (xi) $\frac{(x+1)}{(2x-1)}$ (xii) $(x-2)$

பயிற்சி 3.10

1. (i) $3x$ (ii) $\frac{x+9}{x-2}$ (iii) $\frac{1}{x+4}$ (iv) $\frac{1}{x-1}$ (v) $\frac{2x+1}{x+2}$ (vi) 1

2. (i) $\frac{x-1}{x}$ (ii) $\frac{x-6}{x-7}$ (iii) $\frac{x+1}{x-5}$ (iv) $\frac{x-5}{x-11}$ (v) 1 (vi) $\frac{3x+1}{4(3x+4)}$ (vii) $\frac{x-1}{x+1}$

www.tntextbooks.in

பயிற்சி 3.11

1. (i) x^2+2x+4 (ii) $\frac{2}{x+1}$ (iii) $\frac{2(x+4)}{x+3}$ (iv) $\frac{2}{x-5}$

(v) $\frac{x+1}{x-2}$ (vi) $\frac{4}{x+4}$ (vii) $\frac{2}{x+1}$ (viii) 0

2. $\frac{2x^3+2x^2+5}{x^2+2}$ 3. $\frac{5x^2-7x+6}{2x-1}$ 4. 1

பயிற்சி 3.12

1. (i) $14|a^3b^4c^5|$ (ii) $17|(a-b)^2(b-c)^3|$ (iii) $|x-11|$

(iv) $|x+y|$ (v) $\frac{11}{9}\left|\frac{x^2}{y}\right|$ (vi) $\frac{8}{5}\left|\frac{(a+b)^2(x-y)^4(b-c)^3}{(x+y)^2(a-b)^3(b+c)^5}\right|$

2. (i) $|4x-3|$ (ii) $|(x+5)(x-5)(x+3)|$ (iii) $|2x-3y-5z|$

(iv) $\left|x^2+\frac{1}{x^2}\right|$ (v) $|(2x+3)(3x-2)(2x+1)|$ (vi) $|(2x-1)(x-2)(3x+1)|$

பயிற்சி 3.13

1. (i) $|x^2-2x+3|$ (ii) $|2x^2+2x+1|$ (iii) $|3x^2-x+1|$ (iv) $|4x^2-3x+2|$
2. (i) $a=-42, b=49$ (ii) $a=12, b=9$ (iii) $a=49, b=-70$ (iv) $a=9,\ b=-12$

பயிற்சி 3.14

1. $\{-6,3\}$ 2. $\left\{-\frac{4}{3},3\right\}$ 3. $\left\{-\sqrt{5},\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ 4. $\left\{-\frac{3}{2},5\right\}$ 5. $\left\{-\frac{4}{3},2\right\}$
6. $\left\{5,\frac{1}{5}\right\}$ 7. $\left\{-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right\}$ 8. $\left\{\frac{1}{b^2},\frac{1}{a^2}\right\}$ 9. $\left\{-\frac{5}{2},3\right\}$ 10. $\left\{7,\frac{8}{3}\right\}$

பயிற்சி 3.15

1. (i) $\{-7,1\}$ (ii) $\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$ (iii) $\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$

(iv) $\left\{\frac{a-b}{2},-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\}$ (v) $\{\sqrt{3},1\}$ (vi) $\{-1,3\}$

2. (i) $\{4,3\}$ (ii) $\left\{\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right\}$ (iii) $\left\{\frac{1}{2},2\right\}$ (iv) $\left\{-\frac{2b}{3a},\frac{b}{a}\right\}$

(v) $\left\{\frac{1}{a},a\right\}$ (vi) $\left\{\frac{a+b}{6},\frac{a-b}{6}\right\}$ (vii) $\left\{\frac{(9+\sqrt{769})}{8},\frac{(9-\sqrt{769})}{8}\right\}$ (viii) $\left\{-1,\frac{b^2}{a^2}\right\}$

பயிற்சி 3.16

1. 8 அல்லது $\frac{1}{8}$ 2. 9 மற்றும் 6 3. 20 மீ, 5 மீ அல்லது 10 மீ, 10 மீ 4. $\frac{3}{2}$ மீ
5. 45 கி.மீ / மணி 6. 5 கி.மீ / மணி 7. தந்தையின் வயது = 49, மகனின் வயது = 7
8. 24 செ.மீ 9. 12 நாட்கள்
10. முதல் தொடர்வண்டியின் வேகம் = 20கி.மீ / மணி ;
இரண்டாவது தொடர்வண்டியின் வேகம் = 15கி.மீ / மணி

பயிற்சி 3.17

1. (i) மெய்யெண்கள் (ii) மெய்யெண்கள் அல்ல (iii) மெய்யெண்கள் மற்றும் சம மூலங்கள் (iv) மெய்யெண்கள் மற்றும் சம மூலங்கள் (v) மெய்யெண்கள் அல்ல (vi) மெய்யெண்கள்

2. (i) $\frac{25}{2}$ (ii) ± 3 (iii) -5 அல்லது 1 (iv) 0 அல்லது 3

பயிற்சி 3.18

1. (i) 6,5 (ii) $-\frac{r}{k}, p$ (iii) $\frac{5}{3}, 0$ (iv) $0, -\frac{25}{8}$

2. (i) $x^2 - 7x + 12 = 0$ (ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ (iii) $4x^2 - 16x + 9 = 0$

3. (i) $\frac{13}{6}$ (ii) $\pm\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{35}{18}$ **4.** $\frac{4}{3}$ **5.** $4x^2 - 29x + 25 = 0$

6. $x^2 + 3x + 2 = 0$ **7.** $x^2 - 11x + 1 = 0$

8. (i) $x^2 - 6x + 3 = 0$ (ii) $27x^2 - 18x + 1 = 0$ (iii) $3x^2 - 18x + 25 = 0$

9. $x^2 + 3x - 4 = 0$ **10.** $k = -18$ **11.** $a = \pm 24$ **12.** $p = \pm 3\sqrt{5}$

பயிற்சி 3.19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	C	A	A	C	D	B	C	C	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	A	D	D	D	B	C
21	22	23	24	25					
D	A	C	C	A					

4. அணிகள்

பயிற்சி 4.1

1. $\begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 200 & 250 \\ 300 & 400 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 400 & 200 & 300 \\ 500 & 250 & 400 \end{pmatrix}, 3\times 2, 2\times 3$ **2.** $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 8 & 13 \end{pmatrix}$

3. (i) 2×3 (ii) 3×1 (iii) 3×3 (iv) 1×3 (v) 4×2

4. $1\times 8, 8\times 1, 2\times 4, 4\times 2$

5. $1\times 30, 30\times 1, 2\times 15, 15\times 2, 3\times 10, 10\times 3, 5\times 6, 6\times 5.$

6. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ **7.** (i) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

8. (i) 3×4 (ii) 4, 0 (iii) 2 ஆவது நிரை மற்றும் 3 ஆவது நிரல் **9.** $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

பயிற்சி 4.2

1. $x = 2,\ y = -4,\ z = -1$ **2.** $x = 4,\ y = -3$

3. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 16 & -6 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 14 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 33 & -45 \end{pmatrix}$ **6.** $a = 3,\ b = -4$

7. $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{12}{5} \\ -\frac{11}{5} & 3 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $x = -3, -3,\ y = -1, 4$

11.

	TV	DVD	Video	CD	
	55	27	20	16	கடை I
	72	30	25	27	கடை II
	47	33	18	22	கடை III

12.

சிறுவர்	வயதுவந்தோர்	
5	5	பிற்பகல் 2 மணிக்கு முன்பு
10	10	பிற்பகல் 2 மணிக்கு பின்பு

பயிற்சி 4.3

1. (i) 4×2 (ii) வரையறுக்கப்படவில்லை (iii) 3×5 (iv) 2×2

2. (i) (6) (ii) $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ 22 & 12 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -40 & 64 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 12 & -42 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1750 \\ 1600 \\ 1650 \end{pmatrix}$ முதல் நாள், இரண்டாம் நாள், மூன்றாம் நாள் , (5000) **4.** $x = 3,\ y = 0$ **5.** $x = 2,\ y = -5$

7. $AB = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 12 & 0 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 17 & 6 \end{pmatrix},\ AB \neq BA$ **11.** $x = -3, 5$

பயிற்சி 4.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	**D**	**A**	**D**	**B**	**D**	**B**	**C**	**C**	**A**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	**D**	**D**	**B**	**C**	**B**	**A**	**C**	**B**	**D**

5. ஆயத்தொலைவு வடிவியல்

பயிற்சி 5.1

1. (i) $(-2, 1)$ (ii) $(0, 2)$ **2.** (i) $(5, -2)$ (ii) $(2, -1)$ **3.** $(-12, 8)$

4. $(2, -2)$ **6.** $(-24, -2)$ **7.** $(-2, 3)$ **8.** $(-6, -3)$ **9.** $(-1, 0), (-4, 2)$

10. $\left(-3, \frac{3}{2}\right), (-2, 3), \left(-1, \frac{9}{2}\right)$ **11.** 4 : 7 உட்புறமாக

12. 5:2 உட்புறமாக, $\left(0, \frac{17}{7}\right)$ **13.** $\frac{\sqrt{130}}{2}, \sqrt{13}, \frac{\sqrt{130}}{2}$

பயிற்சி 5.2

1. (i) 3 ச.அலகுகள் (ii) 32 ச.அலகுகள் (iii) 19 ச.அலகுகள்

2. (i) $a = -3$ (ii) $a = \frac{13}{2}$ (iii) $a = 1, 3$

3. (i) ஒரு கோடமைவன (ii) ஒரு கோடமைவன அல்ல (iii) ஒரு கோடமைவன

4. (i) $k = 1$ (ii) $k = 2$ (iii) $k = \frac{7}{3}$

5. (i) 17 ச.அலகுகள் (ii) 43 ச.அலகுகள் (iii) 60.5 ச.அலகுகள் **7.** 1 ச.அலகு, 1 : 4

பயிற்சி 5.3

1. (i) 45° (ii) 60° (iii) 0° **2.** (i) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) வரையறுக்கப்படவில்லை

3. (i) 1 (ii) –2 (iii) 1 **4.** (i) 45° (ii) 30° (iii) $\tan\theta = \frac{b}{a}$

5. $-\frac{1}{2}$ **6.** (i) 0 (ii) வரையறுக்கப்படவில்லை (iii) 1 **7.** $\sqrt{3}$, 0 **10.** $a = -1$

11. $b = 6$ **12.** $-\frac{9}{10}$ **13.** $\frac{11}{7}, -13, -\frac{1}{4}$ **14.** $\frac{1}{12}, -\frac{4}{5}, \frac{9}{2}$

பயிற்சி 5.4

1. $y = 5$, $y = -5$ **2.** $y = -2$, $x = -5$

3. (i) $3x + y - 4 = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 3 = 0$ **4.** $x - 2y + 6 = 0$

5. (i) சாய்வு 1, y-வெட்டுத்துண்டு 1 (ii) சாய்வு $\frac{5}{3}$, y-வெட்டுத்துண்டு 0

(iii) சாய்வு 2, y-வெட்டுத்துண்டு $\frac{1}{2}$ (iv) சாய்வு $-\frac{2}{3}$, y-வெட்டுத்துண்டு $-\frac{2}{5}$

6. (i) $4x + y - 6 = 0$ (ii) $2x - 3y - 22 = 0$ **7.** $2x - 2\sqrt{3}y + (3\sqrt{3} - 7) = 0$

8. (i) $x - 5y + 27 = 0$ (ii) $x + y + 6 = 0$ **9.** $6x + 5y - 2 = 0$

11. (i) $3x + 2y - 6 = 0$ (ii) $9x - 2y + 3 = 0$ (iii) $15x - 8y - 6 = 0$

12. (i) 3, 5 (ii) –8, 16 (iii) $-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}$

13. $2x + 3y - 18 = 0$ **14.** $2x + y - 6 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$ **15.** $x - y - 8 = 0$

16. $x + 3y - 6 = 0$ **17.** $2x + 3y - 12 = 0$ **18.** $x + 2y - 10 = 0, 6x + 11y - 66 = 0$

19. $x + y - 5 = 0$ **20.** $3x - 2y + 4 = 0$

பயிற்சி 5.5

1. (i) $-\frac{3}{4}$ (ii) 7 (iii) $\frac{4}{5}$ **4.** $a = 6$ **5.** $a = 5$ **6.** $p = 1,2$ **7.** $h = \frac{22}{9}$

8. $3x - y - 5 = 0$ **9.** $2x + y = 0$ **10.** $2x + y - 5 = 0$ **11.** $x + y - 2 = 0$

12. $5x + 3y + 8 = 0$ **13.** $x + 3y - 7 = 0$ **14.** $x - 3y + 6 = 0$ **15.** $x - 4y + 20 = 0$

16. (3, 2) **17.** 5 அலகுகள் **18.** $x + 2y - 5 = 0$ **19.** $2x + 3y - 9 = 0$

பயிற்சி 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	**B**	**A**	**D**	**A**	**B**	**D**	**A**	**D**	**C**	**C**	**B**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
C	**C**	**C**	**D**	**B**	**B**	**D**	**A**	**A**	**B**	**B**	

6. வடிவியல்

பயிற்சி 6.1

1. (i) 20 செ.மீ (ii) 6 செ.மீ (iii) 1 **2.** 7.5 செ.மீ **3** (i) இல்லை (ii) ஆம்

4. 10.5 செ.மீ **6.** 12 செ.மீ, 10 செ.மீ **9.** (i) 7.5 செ.மீ (ii) 5.8 செ.மீ (iii) 4 செ.மீ

10. (i) ஆம் (ii) இல்லை **11.** 18 செ.மீ

பயிற்சி 6.2

1. (i) $x = 4$ செ.மீ, $y = 9$ செ.மீ (ii) $x = 3.6$ செ.மீ, $y = 2.4$ செ.மீ, $z = 10$ செ.மீ

(iii) $x = 8.4$ செ.மீ, $y = 2.5$ செ.மீ **2.** 3.6 மீ **3.** 1.2 மீ **4.** 140 மீ

6. 6 செ.மீ **7.** 64 செ.மீ ^{2} **8.** 166.25 செ.மீ **9.** (i) $\frac{9}{64}$ (ii) $\frac{55}{64}$ **10.** 6.3 ச.கி.மீ

11. 72 செ.மீ **12.** 9 மீ **13.** (i) $\triangle XWY$, $\triangle YWZ$, $\triangle XYZ$ (ii) 4.8 மீ

பயிற்சி 6.3

1. 65° **2.** (i) 4 செ.மீ (ii) 12 செ.மீ **3.** (i) 12 செ.மீ (ii) 5 செ.மீ **6.** 30 செ.மீ

பயிற்சி 6.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	B	A	D	B	C	B	D	B	B
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	C	D	D	A	B	B	D	C

7. முக்கோணவியல்

பயிற்சி 7.1

1. (i) இல்லை (ii) இல்லை

பயிற்சி 7.2

1. 1.8மீ **2.** 30° **3.** இல்லை **4.** 174.7மீ **5.** 40 செ.மீ

6. காகம் B **7.** $5\sqrt{6}$ மீ **8.** 1912.40 மீ **9.** $30\sqrt{2}$ மீ **10.** 1.098 மீ

11. $19\sqrt{3}$ மீ **12.** ஆம் **13.** 87மீ **14.** 3 நிமிடங்கள் **15.** 3464 கி.மீ

16. 40 மீ **17.** 60 மீ ; $40\sqrt{3}$ மீ **18.** 90 மீ

பயிற்சி 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	**C**	**C**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**C**	**B**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	**C**	**A**	**D**	**C**	**C**	**D**	**B**	**B**	**D**

8. அளவியல்

பயிற்சி 8.1

1. 704 செ.மீ ^{2}, 1936 செ.மீ ^{2} 2. $h = 8$ செ.மீ, 352 செ.மீ ^{2} 3. $h = 40$ செ.மீ, $d = 35$ செ.மீ
4. ₹ 2640 5. $r = 3.5$ செ.மீ, $h = 7$ செ.மீ 6. $h = 28$ செ.மீ
7. $C_1 : C_2 = 5 : 2$ 8. 1300π செ.மீ ^{2} 9. 3168 செ.மீ ^{2}
10. 550 செ.மீ ^{2}, 704 செ.மீ ^{2} 11. $h = 15\sqrt{3}$ செ.மீ, $l = 30$ செ.மீ 12. 1416 செ.மீ ^{2}
13. 23.1 மீ ^{2} 14. 10.5 செ.மீ 15. $301\frac{5}{7}$ செ.மீ ^{2} 16. 2.8 செ.மீ 17. 4158 செ.மீ ^{2}
18. $C_1 : C_2 = 9 : 25$, $T_1 : T_2 = 9 : 25$ 19. 44.1π செ.மீ ^{2}, 57.33π செ.மீ ^{2} 20. ₹ 246.40

பயிற்சி 8.2

1. 18480 செ.மீ ^{3} 2. 38.5 லிட்டர் 3. 4620 செ.மீ ^{3} 4. $r = 2.1$ செ.மீ
5. $V_1 : V_2 = 20:27$ 6. 10 செ.மீ 7. 4158 செ.மீ ^{3} 8. 7.04 செ.மீ ^{3}
9. 8800 செ.மீ ^{3} 10. 616 செ.மீ ^{3} 11. 5 செ.மீ 12. 1408.6 செ.மீ ^{3}
13. $314\frac{2}{7}$ செ.மீ ^{3} 14. $2\sqrt{13}$ செ.மீ 15. 8 செ.மீ 16. 2.29 கி.கி
17. $3050\frac{2}{3}$ செ.மீ ^{3} 18. 288π செ.மீ ^{2} 19. $718\frac{2}{3}$ செ.மீ ^{3} 20. $1 : 8$

பயிற்சி 8.3

1. 11.88π செ.மீ ^{2} 2. 7623 செ.மீ ^{3} 3. 220 மி.மீ ^{2} 4. 1034 ச.மீ
5. 12 செ.மீ 6. 12.8 கி.மீ 7. 2 செ.மீ 8. 1 செ.மீ
9. 1386 லிட்டர் 10. 3 மணி 12 நிமிடங்கள் 11. 16 செ.மீ 12. 16 செ.மீ
13. 750 கோள வடிவ குண்டுகள் 14. 10 கூம்புகள் 15. 70 செ.மீ
16. $r = 36$ செ.மீ, $l = 12\sqrt{13}$ செ.மீ 17. 11 மீ

பயிற்சி 8.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	**C**	**A**	**A**	**B**	**C**	**A**	**B**	**D**	**C**	**C**
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
D	**D**	**B**	**D**	**B**	**C**	**B**	**D**	**A**	**D**	**C**

10. வரைபடங்கள்

பயிற்சி 10.1

2. (i) $\{-2, 2\}$ (ii) $\{-2, 5\}$ (iii) $\{5, 1\}$ (iv) $\left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$
3. $\{-1, 5\}$ 4. $\{-2, 3\}$ 5. $\{-2.5, 2\}$ 6. $\{-3, 5\}$ 7. மெய் மூலங்கள் ஏதும் இல்லை

பயிற்சி 10.2

1. 120 கி.மீ 2. (i) ₹105 (ii) 11 நோட்டுப் புத்தகங்கள்
3. (i) $y = 8$ (ii) $x = 6$ 4. (i) $k = 15$ (ii) ₹ 45 5. $y = 4$; $x = 2$ 6. 24 நாட்கள்

11. புள்ளியியல்

பயிற்சி 11.1

1. (i) 36, 0.44 (ii) 44, 0.64 **2.** 71 **3.** 3.38 கி.கி **4.** $2\sqrt{5}$, 20 **5.** 3.74

6. (i) 5.97 (ii) 4.69 **7.** 6.32 **8.** 1.107 **9.** 15.08 **10.** 36.76, 6.06

11. 416, 20.39 **12.** 54.19 **13.** 4800, 240400 **14.** 10.2, 1.99 **15.** 25

16. 20.41 **17.** 12 **18.** 5.24 **19.** 1159, 70 **20.** மாணவர் *A*

பயிற்சி 11.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	**A**	**C**	**B**	**D**	**C**	**C**	**B**	**A**	**D**
11	12	13	14	15					
D	**B**	**C**	**D**	**B**					

12. நிகழ்தகவு

பயிற்சி 12.1

1. $\frac{1}{10}$ **2.** $\frac{1}{9}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{1}{5}$ **5.** $\frac{3}{4}$

6. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{12}{13}$ **7.** (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{1}{2}$ **8.** (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{5}$

9. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **10.** $\frac{1}{2}$ **11.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{2}{3}$

12. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{17}{20}$ **13.** $\frac{1}{3}$ **14.** $\frac{1}{36}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **16.** 12

17. (i) $\frac{22}{25}$ (ii) $\frac{24}{25}$ **18.** (i) $\frac{1}{4}$ (ii) 3 **19.** (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{17}{18}$

பயிற்சி 12. 2

1. $\frac{4}{5}$ **2.** $\frac{3}{20}$ **3.** (i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ **4.** $\frac{5}{9}$ **5.** $\frac{8}{25}$

6. $\frac{5}{8}$ **7.** $\frac{4}{9}$ **8.** $\frac{9}{10}$ **9.** $\frac{3}{5}$ **10.** $\frac{4}{13}$

11. $\frac{8}{13}$ **12.** $\frac{2}{3}$ **13.** $\frac{5}{13}, \frac{4}{13}$ **14.** (i) 0.45 (ii) 0.3 **15.** $\frac{101}{105}$

பயிற்சி 12. 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	**D**	**B**	**A**	**A**	**B**	**A**	**A**	**D**	**A**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	**C**	**C**	**B**	**B**	**D**	**D**	**A**	**A**	**B**

www.tntextbooks.in

பல்வகைக் கணக்குகள்

(தேர்வுக்குரியவை அல்ல)

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, x \neq -1$ எனில், $f(2x) = \dfrac{3f(x)+1}{f(x)+3}$ என நிறுவுக.

2. x-ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளுக்கும் $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர் $\left(\text{விடை : } x = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right)$

3. $\log_{10} 2$, $\log_{10}(2^x - 1)$ மற்றும் $\log_{10}(2^x + 3)$ என்பன அதே வரிசையில் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையினை அமைத்தால் x-ன் மதிப்புகளைக் காண்க? (விடை: $x = \log_5 2$)

4. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் பொதுவிகிதம் r, முதல் நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 15 மற்றும் முதல் நான்கு உறுப்புகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 85 எனில், $14r^4 - 17r^3 - 17r^2 - 17r + 14 = 0$ என நிறுவுக.

5. $\{b_n\}_1^\infty$ -ல் $n > 1$ எனும்போது $b_n^2 = b_{n-1}\, b_{n+1}$ என இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே $\{b_n\}_1^\infty$ என்பது ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசை ஆகும் என நிறுவுக. (விடை 1110)

6. 17, 21, $\cdots$ மற்றும் 16, 21, $\cdots$ ஆகிய இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளிலும் சில எண்கள் பொது உறுப்புகளாக உள்ளன. இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளிலும் வரும் முதல் 10 பொது எண்களின் கூடுதல் காண்க.

7. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1$ எனில், எனில் மட்டுமே $\{a_n\}_1^\infty$ என்ற தொடர்வரிசை ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசை என நிறுவுக.

8. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$ என நிரூபி.

9. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$ எனக் காட்டுக.

10. ஓர் ஈரிலக்க எண்ணை, அவ்வெண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதலால் வகுக்க ஈவு 4, மீதி 3 எனக் கிடைக்கும். அதே ஈரிலக்க எண்ணை, அதன் இலக்கங்களின் பெருக்கல் பலனால் வகுக்க ஈவு 3, மீதி 5 எனக் கிடைக்கும் எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.

(விடை : 23)

11. 4 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 1 கிடைக்குமாறு அமைந்த அனைத்து ஈரிலக்க எண்களின் கூடுதலைக் காண்க. (விடை : 1210)

12. சுருக்குக : $\left(\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}\right)\left(1 + \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)(a+b+c)^{-2}$ (விடை : $\dfrac{1}{2bc}$)

13. $ax^2 + bx + c = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் இல்லை மற்றும் $a + b + c < 0$ எனில், எண் c-யின் குறியினைக் காண்க. (குறிப்பு : $f(x) = 0$-க்கு மெய்யெண்களாலான மூலங்கள் இல்லை எனில், x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x)$ -ன் மதிப்புகள் அனைத்தும் ஒரே குறியினைக் கொண்டிருக்கும்) (விடை: $c < 0$)

14. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 6} > 0$ என்றவாறு அமையும் x-ன் எல்லா மெய்யெண் மதிப்புகளைக் காண்க. (விடை $x > 1$)

15. $1 + a + a^2 + \cdots + a^x = (1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்

(விடை: $x = 15$)

16. கணக்கிடுக $\dfrac{6x_1^2x_2 - 4x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 4x_2^3}{3x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2^2}$, இங்கு x_1 மற்றும் x_2 ஆகியன

$x^2 - 5x + 2 = 0$ என்பதின் மூலங்களாகும். (விடை : $-\dfrac{320}{73}$)

17. $\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha - \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sec\alpha - 1}{\sin\alpha} = -1$ என்ற முற்றொருமையை நிறுவுக.

18. ஒரு ஒட்டக மந்தையில் உள்ள ஒட்டகங்களில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஒட்டகங்கள் காட்டில் காணப்பட்டன. மந்தையில் உள்ள ஒட்டகங்களில் மொத்த எண்ணிக்கையின் வர்க்க மூலத்தின் இரு மடங்கு எண்ணிக்கையுள்ள ஒட்டகங்கள் மலைக்குச் சென்று உள்ளன. எஞ்சியுள்ள 15 ஒட்டகங்கள் ஆற்றங்கரையில் காணப்பட்டன எனில், மந்தையில் உள்ள ஒட்டகங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (விடை: 36)

19. ஒரு தொடர் வண்டியானது 30 கி.மீ தூரத்தை ஒரு சீரான வேகத்தில் கடந்த பிறகு அதன் இயந்திரத்தில் (Engine) சிறு கோளாறு ஏற்பட்டது. ஆகையால் வண்டியின் வேகம் அதன் சீரான வேகத்தில் $\dfrac{4}{5}$ பங்காக குறைக்கப்பட்டது. இதனால், தொடர்வண்டி அது போய்ச் சேர வேண்டிய நிலையத்தை 45 நிமிடங்கள் காலதாமதமாக சென்று அடைந்தது. இக்கோளாறு இன்னும் 18 கி.மீ தூரம் கடந்த பின் ஏற்பட்டிருக்குமானால், தொடர்வண்டி 9 நிமிடங்கள் முன்னதாக போய்ச் சேர்ந்திருக்கும். தொடர்வண்டியின் வேகம் மற்றும் தொடர்வண்டி பயணம் செய்த தூரம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

(விடை: தொடர்வண்டியின் வேகம் 30 கி.மீ/மணி; பயணம் செய்த தூரம் 120 கி.மீ)

20. $\sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta = 1$ எனில், $\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4$ என நிறுவுக.

21 $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = l$ மற்றும் $\sec\theta - \cos\theta = m$ எனில், $l^2m^2(l^2 + m^2 + 3) = 1$ என நிறுவுக.

22. ஒரு மலையின் அடிவாரத்திலிருந்து மலையின் சிகரம் 45° ஏற்றத்தில் உள்ளது 1000 மீ தூரம் மலை மீது 30° சாய்வுக் கோணத்தில் ஏறிய பின், மலை சிகரத்தின் ஏற்றம் 60° ஆக உள்ளது. மலையின் உயரத்தைக் காண்க. (விடை: 1.366 கி.மீ)

23. ஒரு சதுரத்தின் எதிர் கோண முனைகள் (3, 4) மற்றும் (1, –1) எனில், மற்றக் கோண முனைகளைக் காண்க. (விடை: $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)$ மற்றும் $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$)

24. ஒரு கூடும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் மற்றும் கடைசி உறுப்புகளின் கூடுதல் 66, இரண்டாவது மற்றும் கடைசி உறுப்பிற்கு முந்தைய உறுப்பு ஆகியவற்றின் பெருக்கல் பலன் 128 மற்றும் அவ்வரிசையின் எல்லா உறுப்புகளின் கூடுதல் 126 எனில், இத்தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (விடை : 6)

25. ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி ஆனது தரையில் A என்ற புள்ளியில் α கோணத்தை ஏற்படுத்துகிறது. அதே புள்ளி A-யிலிருந்து b உயரத்தில் கோபுரத்தின் அடிக்கு இறக்கக்கோணம் β எனில், கோபுரத்தின் உயரம் $b\cot\beta\tan\alpha$ என நிறுவுக.

26. ஒரு செவ்வக வடிவக் குளம் 40 அடி × 20 அடி அளவுகளைக் கொண்டுள்ளது. குளத்தைச் சுற்றி சீரான அகலமும் ஆழமும் கொண்ட சுற்று பாதை அமைக்க நம்மிடம் 99 கனஅடி கான்கிரிட் உள்ளது. சுற்றுப்பாதையின் ஆழம் 3 அங்குலம் என்க. கான்கிரிட் முழுமையாக பயன்படுத்தப்பட்டால் பாதையின் அகலம் காண்க. (விடை : 3 அடி)

27. சுருக்குக: $(1+\frac{2}{2})(1+\frac{2}{3})(1+\frac{2}{4})\cdots(1+\frac{2}{n})$. (விடை : $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$)

28. மூன்று வட்டவடிவ வட்டுகளில் இரண்டின் ஆரங்கள் r அங்குலம். மூன்றாவதின் ஆரம் $2r$ அங்குலம். ஒரு வட்டின் எல்லைக்கும் மற்றதின் எல்லைக்கும் பொதுப் புள்ளி ஒன்றே ஒன்று இருக்குமாறு மூன்று வட்டுகளும் ஒரே தளத்தில் வைக்கப்படுகின்றன. இவ்வட்டுகளின் மையப் புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. (விடை : $2\sqrt{2}\,r^2 n$)

29. 8 அங்குல ஆரமுள்ள 6 வட்டவடிவ வட்டுகள் ஒவ்வொன்றும் அதன் அருகிலுள்ள மற்ற இரண்டு வட்டுகளை ஒவ்வொரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுமாறு வட்டவடிவில் அமைக்கப்பட்டன. அதன் மையப்பகுதியில் 7வது வட்டினை 6 வட்டுகளையும் ஒவ்வொரு புள்ளியில் மட்டும் தொடுமாறு வைக்க இயலும் எனில், 6 வட்டுகளால் மையப்பகுதியில் உண்டாக்கப்பட்ட இடத்தின் பரப்பளவைக் காண்க. (விடை : $192\sqrt{3}$)

30. ஆரம் 4 செ.மீ மற்றும் உயரம் 5 செ.மீ உடைய உருளை வடிவ மரத்துண்டிலிருந்து அதே அளவு அடிப்பக்க ஆரம் மற்றும் 3 செ.மீ உயரம் கொண்ட நேர்வட்டக் கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது எனில், மீதி உள்ள மரத்துண்டின் மொத்த புறப்பரப்பளவு 76π செ.மீ^{2} எனக் காட்டுக.

31. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$ எனக்காட்டு .
இங்கு $n! = 1\times2\times3\times\cdots\times n$.

www.tntextbooks.in

பார்வை நூல்கள்

1. Peter J. Eccles, Introduction to Mathematical Reasoning, Cambridge University Press 2007

2. Ann Xavier Gantert, Algebra 2 and Trigonometry, Amsco School Publications Inc., 2009

3. Boris A Kordemsky, The Moscow Puzzles: 359 Mathematical Recreations, Dover Publications

4. Imre Lakatos, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, January 1976

5. Krishnan Namboodiri, Richard G. Niemi, Matrix Algebra, An Introduction, Sage Publications 1984

6. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, Dover Publications

7. Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind, Challenging Problems in Algebra, Dover Publications

8. James Stewart, Lothar Redlin, Saleem Watson, College Algebra, Thomson Brooks/Cole, Jan 2010

9. Michael Sullivan, College Algebra, Pearson Publishing, January 2007

10. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html

11. V.Govorov, P.Dybov, N.Miroshin, S.Smirnova, Problems in Mathematics, G.K. Publications 2010

12. H.S.Hall, S.R. Knight, Elementary Algebra for Schools, Surjeet Publications 2007

13. H.S.Hall, S.R. Knight, Higher Algebra, A.I.T.B.S Publishers 2009

14. D.Dorokhin, Z.Plaksenko, G.Bazhora, Collection of Problems and Exercises in Mathematics, Mir Publications 1990

வினாத் தாள் வடிவமைப்பு

பாடம்: கணிதம் காலம் : 2.30 மணி

வகுப்பு : X மொத்த மதிப்பெண்கள் : 100

கற்றலின் நோக்கங்களுக்கு ஏற்ப மதிப்பெண் பங்கீடு

குறிக்கோள்	சதவீதம்
அறிவுத் திறன்	19
புரிந்து கொள்ளல்	31
பயன்படுத்துதல்	23
திறன்	27
மொத்தம்	100

வினாக்களில் மதிப்பெண் பங்கீடு

வினாக்களின் விவரம்	பிரிவு - அ மிகக் குறுகிய விடை	பிரிவு - ஆ குறுகிய விடை	பிரிவு - இ பெரிய விடை	பிரிவு - ஈ மிகப் பெரிய விடை	மொத்தம்
வினாக்களின் எண்ணிக்கை	15	10	9	2	36
மதிப்பெண்	15	20	45	20	100
மதிப்பெண் (நிமிடங்களில்)	20	35	65	30	2.30 மணி நேரம்

வினாக்களின் தர அடிப்படை

அளவு	மதிப்பெண் சதவீதம்
கடினம்	12
நடுத்தரம்	28
எளியது	60

பிரிவுகளும் வாய்ப்புகளும்

பிரிவுகள்	வினா எண்		வினாக்களின் எண்ணிக்கை	விடையளிக்கப்பட வேண்டிய வினாக்கள்
	முதல்	வரை		
அ	1	15	15	15
ஆ	16	30	16 30 வது வினா 'கட்டாய வினா' இது 'இரண்டில் ஒன்று' வடிவில் இருக்கும்	10
இ	31	45	16 45 வது வினா 'கட்டாய வினா'. கட்டாய வினா 'இரண்டில் ஒன்று' வடிவில் இருக்கும்	9
ஈ	46		2 இரண்டில் ஒன்று (either or)	1
	47		2 இரண்டில் ஒன்று (either or)	1

பொருளடக்கத்திற்கு ஏற்ப மதிப்பெண் பங்கீடு

பாடப்பிரிவு எண்.	பாடப்பிரிவு	வினாக்களின் எண்ணிக்கை				மொத்த மதிப்பெண்கள்
		1 மதிப்பெண்	**2** மதிப்பெண்	**5** மதிப்பெண்	**10** மதிப்பெண்	
1	கணங்களும் சார்புகளும்	1	2	2		15
2	தொடர்களும் தொடர் வரிசைகளும்	2	1	2		14
3	இயற்கணிதம்	2	2	3		21
4	அணிகள்	1	2	1		10
5	ஆயத்தொலை வடிவியல்	2	2	2		16
6	வடிவியல்	2	1	1		9
7	முக்கோணவியல்	2	2	1		11
8	அளவியல்	1	2	2		15
9	செய்முறை வடிவியல்				2	20
10	வரைபடங்கள்				2	20
11	புள்ளியியல்	1	1	1		8
12	நிகழ்தகவு	1	1	1		8
மொத்தம்		15	16	16	4	167

எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிகள், தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள் ஆகியவற்றிற்கான மதிப்பெண் பங்கீடு

	பிரிவு அ (1 மதிப்பெண்)	பிரிவு ஆ (2 மதிப்பெண்)	பிரிவு இ (5 மதிப்பெண்)	பிரிவு ஈ (10 மதிப்பெண்)	மொத்தம்	சதவீதம்
பாடநூலில் உள்ள எடுத்துக்காட்டுகள்	---	6 (2)	6 (5)	1 (10)	52	31
பயிற்சிக் கணக்குகள்	10 (1)	8 (2)	8 (5)	3 (10)	96	58
குறிப்பிட்ட பாடப்பிரிவுகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்	5 (1)	2 (2)	2 (5)	---	19	11
மொத்தம்	15 (1)	16 (2)	16 (5)	4 (10)	167	100

● அடைப்புகளுக்குள் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண்கள், ஒவ்வொரு வினாவிற்கான மதிப்பெண்ணைக் குறிக்கும்.

பிரிவு - அ

1. 1 முதல் 15 வரை எண்ணுள்ள அனைத்து 15 வினாக்களும் கட்டாய வினாக்கள், அவை 'உரிய விடையைத் தெரிவு செய்' வினாக்கள் ஆகும். ஒவ்வொரு வினாவிலும், 4 மாற்று விடைகள் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும். அவற்றுள் சரியான அல்லது மிகப்பொருத்தமான விடையை தேர்ந்தெடுத்து எழுத வேண்டும். ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் ஒரு மதிப்பெண்.
2. 15 வினாக்களில் 10 வினாக்கள் பாட நூலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 'உரிய விடையைத் தெரிவு செய்' வினாக்கள் ஆகும். மீதி 5 வினாக்கள் 2, 3, 5, 6 மற்றும் 7 ஆகிய பாடப் பிரிவுகளிலிருந்து தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள் ஆகும். அவை பாட நூலிலுள்ளத் தேற்றங்கள், முடிவுகள், எடுத்துக்காட்டுகள் மற்றும் பயிற்சிக் கணக்குகள் ஆகியவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டிருக்கும்.

பிரிவு - ஆ

1. 16 முதல் 30 வரை எண்ணுள்ள வினாக்களில் 10 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் 2 மதிப்பெண்கள்.
2. முதல் 14 வினாக்களில் ஏதேனும் 9 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் 30 ஆவது வினா 'கட்டாய வினா' ஆகும். அது 'இரண்டில் ஒன்று' என்ற வடிவில் இருக்கும்.
3. முதல் 14 வினாக்கள் பாட நூலில் உள்ள பாடப் பிரிவுகளின் வரிசையில் இருக்கும்.
4. 14 வினாக்களில் 6 வினாக்கள் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்தும் 8 வினாக்கள் பயிற்சிகளிலிருந்தும் கேட்கப்படும்.
5. 30 ஆவது எண் வினாவிலுள்ள இரண்டு வினாக்கள் 'தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்' ஆகும். அவை 2, 3, 5 மற்றும் 8 ஆகியப்பாடப் பிரிவுகளிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிக் கணக்குகள் ஆகியனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமையும். இரண்டு கணக்குகளும் வெவ்வேறு பிரிவுகளிலிருந்து கேட்கப்படும்.

பிரிவு - இ

1. 31 முதல் 45 வரை எண்ணுள்ள வினாக்களிலிருந்து 9 வினாக்களுக்கு விடையளிக்கப்பட வேண்டும். ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் **5** மதிப்பெண்.
2. முதல்14 வினாக்களில் ஏதேனும் 8 வினாக்களுக்கு விடையளிக்க வேண்டும் 45 ஆவது வினா 'கட்டாய வினா'வாகும். இது 'இரண்டில் ஒன்று' என்ற வடிவில் இருக்கும்.
3. முதல்14 வினாக்கள் பாட நூலிலுள்ள பாடப் பிரிவுகளின் வரிசையில் அமைந்திருக்கும்.
4. முதல்14 வினாக்களில், 6 வினாக்கள் எடுத்துக் காட்டுகளிலிருந்தும், 8 வினாக்கள் பயிற்சிகளிலிருந்தும் கேட்கப்படும்.
5. 45 வது எண் வினாவிலுள்ள இரண்டு வினாக்கள் 'தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்' ஆகும். அவை 2, 3, 5 மற்றும் 8 ஆகியப் பாடப்பிரிவுகளிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிக் கணக்குகள் ஆகியனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு அமையும். இரண்டு கணக்குகளும் வெவ்வேறு பிரிவுகளிலிருந்துக் கேட்கப்படும்.
6. 30(a), 30(b), 45(a) மற்றும் 45(b) எண்களுள்ள வினாக்கள் 2, 3, 5 மற்றும் 8 ஆகிய பாடப்பிரிவுகளிலுள்ள எடுத்துக்காட்டுகள், பயிற்சிகளிலுள்ள கணக்குகள் ஆகியனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டு தயாரிக்கப்படும். ஒவ்வொரு வினாவும் வெவ்வேறு பிரிவுகளிலிருந்து கேட்கப்பட வேண்டும் என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டுத் தயாரிக்கப்படும்.

பிரிவு - ஈ

1. இப்பிரிவில், 9 வது பாடப்பிரிவு மற்றும் 10 வது பாடப்பிரிவு ஆகியவற்றிலிருந்து ஒரு பாடப்பிரிவில் இரண்டு வினாக்கள் வீதம் கேட்கப்படும். அவை 'இரண்டில் ஒன்று' (Either or) என்ற வடிவில் இருக்கும். ஒவ்வொரு வினாவிற்கும் 10 மதிப்பெண்கள்.
2. இரண்டு வினாக்களுக்கும் விடையளிக்க வேண்டும்.
3. 46(a), 47(a), 46(b) மற்றும் 47(b) ஆகிய எண்ணுள்ள வினாக்களில், ஒரு வினா, பாடநூலிலுள்ள எடுத்துக் காட்டுகளிலிருந்து கேட்கப்படும்.

வினாத்தாள் வடிவமைப்பு - X ஆம் வகுப்பு

குறிக்கோள் / பாடப்புரிவு	அறிவுத்திறன்				புரிந்துகொள்ளல்				பயன்படுத்துதல்				திறன்				மொத்த மதிப்பெண்
	மிகுவி	குவி	நீவி	மிநீவி	மிகுவி	குவி	நீவி	மிநீவி	மிகுவி	குவி	நீவி	மிநீவி	மிகுவி	குவி	நீவி	மிநீவி	
கணங்களும் சார்புகளும்	1(1)	2(1)	5(1)			2(1)					5(1)						15
மெய் எண்களின் தொடர் வரிசைகளும் தொடர்களும்		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)		5(1)						14
இயற்கணிதம்		2(1)	5(1)		1(1)				1(1)	2(1)	5(1)				5(1)		21
அணிகள்						4(2)	5(1)		1(1)								10
ஆயத்தொலை வடிவியல்		2(1)			1(1)	2(1)	5(1)		1(1)		5(1)						16
வடிவியல்					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)								9
முக்கோணவியல்					1(1)	2(1)	5(1)		1(1)	2(1)							11
அளவியல்	1(1)					2(1)	5(1)			2(1)	5(1)						15
செய்முறை வடிவியல்																10(2)	20
வரைபடங்கள்																10(2)	20
புள்ளியியல்			5(1)			2(1)			1(1)								8
நிகழ்தகவு		2(1)					5(1)		1(1)								8
மொத்தம்	2(2)	10(5)	20(4)		5(5)	16(8)	30(6)		8(8)	6(3)	25(5)				5(1)	40(4)	167

- அடைப்புகளுக்குள் குறிக்கப்பட்டுள்ள எண் வினாக்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கும்
- மற்ற எண்கள் மதிப்பெண்ணினைக் குறிக்கும்

மிகுவி – மிக குறுகிய விடை
குவி – குறுகிய விடை
நீவி – நீளமான விடை
மிநீவி – மிக நீளமான விடை

www.tntextbooks.in