பகுதி - II & III

1. உறவுகளும் சார்புகளும்

பயிற்சி 1.1

1. $\boldsymbol{A \times B, A \times A}$ மற்றும் $\boldsymbol{B \times A}$ ஐக் காண்க. PTA-1 2M

(iii) $\boldsymbol{A = \{m, n\}; B = \emptyset}$

$A \times B = \{\ \}$

$A \times A = \{m, n\} \times \{m, n\}$

$= \{(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}), (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}), (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}), (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})\}$

$B \times A = \{\ \}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

1. $A \times B$, $B \times A$ மற்றும் $B \times B$ ஆகியவற்றை காண்க.
   (i) $A = \{2, -2, 3\}$ மற்றும் $B = \{1, -4\}$ (ii) $A = B = \{p, q\}$

எ.கா.1.1: $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 3\}$ எனில்
(i) $A \times B$ மற்றும் $B \times A$ ஐ காண்க. (ii) $A \times B = B \times A$ ஆகுமா? இல்லையெனில் ஏன்? (iii) $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$ எனக் காட்டுக. **(SEP-21)**

2. $\boldsymbol{A = \{1, 2, 3\}}$ மற்றும் $\boldsymbol{B = \{x | x}$ **என்பது 10-ஐ விடச் சிறிய பகா எண்}** எனில், $\boldsymbol{A \times B}$ மற்றும் $\boldsymbol{B \times A}$ **ஆகியவற்றைக் காண்க.** MAY-22 2M

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{x | x$ என்பது 10-ஐ விடச் சிறிய பகா எண்$\}$

$= \{2,3,5,7\}$

$A \times B = \{1,2,3\} \times \{2,3,5,7\}$

$\boldsymbol{=} \{(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{5}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{7}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{5}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{7}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{5}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{7})\}$

$B \times A = \{2,3,5,7\} \times \{1,2,3\}$

$= \{(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{5}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{5}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{5}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{7}, \boldsymbol{1}), (\boldsymbol{7}, \boldsymbol{2}), (\boldsymbol{7}, \boldsymbol{3})\}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

3. $B \times A = \{(-2,3), (-2,4), (0,3), (0,4), (3,3), (3,4)\}$ எனில் A மற்றும் B ஐ காண்க. **(APR-23)**

எ.கா.1.2: $A \times B = \{(3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$ எனில் A மற்றும் B ஐக் காண்க. **(SEP - 20, JUL - 22)**

6. $\boldsymbol{A = \{x \in \mathbb{W} | x < 2\}}$, $\boldsymbol{B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x \leq 4\}}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{C = \{3, 5\}}$ **எனில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.** 5M JUN-23, PTA-5, SEP-21

(ii) $\boldsymbol{A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)}$

LHS: $B \cap C = \{2,3,4\} \cap \{3,5\} = \{3\}$

$A \times (B \cap C) = \{0,1\} \times \{3\} = \{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{3}), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3})\}$ …………..(1)

RHS: $A \times B = \{0,1\} \times \{2,3,4\} = \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4)\}$

$A \times C = \{0,1\} \times \{3,5\} = \{(0,3), (0,5), (1,3), (1,5)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(0,2), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{3}), (0,4), (1,2), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}), (1,4)\} \cap \{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{3}), (0,5), (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{3}), (1,5)\}$

$= \{(0,3), (1,3)\}$ ……………(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $\boldsymbol{A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 5M

4. $A = \{5,6\}, B = \{4,5,6\}, C = \{5,6,7\}$ எனில், $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$ எனச் காட்டுக. **(JUL-22)**
5. $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,5\}, C = \{3,4\}$ மற்றும் $D = \{1,3,5\}$ எனில் $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (C \times D)$ என்பது உண்மையா என சோதிக்கவும்.
6. $A = \{x \in \mathbb{W} | x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x \leq 4\}$ மற்றும் $C = \{3,5\}$ எனில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடுகளைச் சரிபார்க்க.
   (i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ **(PTA-2)** (iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
7. A என்பது 8-ஐவிடக் குறைவான இயல் எண்களின் கணம், B என்பது 8-ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம் மற்றும் C என்பது இரட்டைப்படை பகா எண்களின் கணம் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைச் சரிபார்க்க.(i) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ **(SEP-20)**

எ.கா.1.3: $A = \{x \in \mathbb{N} | 1 < x < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{W} | 0 \leq x < 2\}$ மற்றும் $C = \{x \in \mathbb{N} | x < 3\}$ என்க.
(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ என்பனவற்றைச் சரிபார்க்க.

CQ: 1. $A = \{x \in W / x < 3\}$, $B = \{x \in N / 1 < x \leq 5\}$, $C = \{3,5,7\}$ எனில் $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ ஐச் சரிபார்க்க. **(APR-23)**

2. $A = \{x \in W | 0 < x < 5\}$, $B = \{x \in W | 0 \leq x \leq 2\}$, $C = \{x \in W | x < 3\}$ எனில் $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ ஐச் சரிபார்க்க. **(PTA-3)**

7. A என்பது 8-ஐவிடக் குறைவான இயல் எண்களின் கணம், B என்பது 8-ஐ விடக் குறைவான பகா எண்களின் கணம் மற்றும் C என்பது இரட்டைப்படை பகா எண்களின் கணம் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைச் சரிபார்க்க.

(ii) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

MAY-22 5M

LHS: $B-C=\{2,3,5,7\}-\{2\}=\{3,5,7\}$

$A\times(B-C)=\{1,2,3,4,5,6,7\}\times\{3,5,7\}$

$=\{(\mathbf{1},\mathbf{3}),(\mathbf{1},\mathbf{5}),(\mathbf{1},\mathbf{7}),(\mathbf{2},\mathbf{3}),(\mathbf{2},\mathbf{5}),(\mathbf{2},\mathbf{7}),(\mathbf{3},\mathbf{3}),(\mathbf{3},\mathbf{5}),(\mathbf{3},\mathbf{7}),(\mathbf{4},\mathbf{3}),(\mathbf{4},\mathbf{5}),(\mathbf{4},\mathbf{7}),(\mathbf{5},\mathbf{3}),(\mathbf{5},\mathbf{5}),(\mathbf{5},\mathbf{7}),(\mathbf{6},\mathbf{3}),(\mathbf{6},\mathbf{5}),(\mathbf{6},\mathbf{7}),(\mathbf{7},\mathbf{3}),(\mathbf{7},\mathbf{5}),(\mathbf{7},\mathbf{7})\}$............(1)

RHS: $A\times B=\{1,2,3,4,5,6,7\}\times\{2,3,5,7\}$

$=\{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7),(4,2),(4,3),(4,5),(4,7),(5,2),(5,3),(5,5),(5,7),(6,2),(6,3),(6,5),(6,7),(7,2),(7,3),(7,5),(7,7)\}$

$A\times C=\{1,2,3,4,5,6,7\}\times\{2\}=\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2)\}$

$(A\times B)-(A\times C)$

$=\{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7),(4,2),(4,3),(4,5),(4,7),(5,2),(5,3),(5,5),(5,7),(6,2),(6,3),(6,5),(6,7),(7,2),(7,3),(7,5),(7,7)\}$
$-\{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2)\}$

$=\{(\mathbf{1},\mathbf{3}),(\mathbf{1},\mathbf{5}),(\mathbf{1},\mathbf{7}),(\mathbf{2},\mathbf{3}),(\mathbf{2},\mathbf{5}),(\mathbf{2},\mathbf{7}),(\mathbf{3},\mathbf{3}),(\mathbf{3},\mathbf{5}),(\mathbf{3},\mathbf{7}),(\mathbf{4},\mathbf{3}),(\mathbf{4},\mathbf{5}),(\mathbf{4},\mathbf{7}),(\mathbf{5},\mathbf{3}),(\mathbf{5},\mathbf{5}),(\mathbf{5},\mathbf{7}),(\mathbf{6},\mathbf{3}),(\mathbf{6},\mathbf{5}),(\mathbf{6},\mathbf{7}),(\mathbf{7},\mathbf{3}),(\mathbf{7},\mathbf{5}),(\mathbf{7},\mathbf{7})\}$............(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $\boldsymbol{A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)}$

பயிற்சி 1.2

1. $A=\{1,2,3,7\}$ & $B=\{3,0,-1,7\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எவை A லிருந்து B க்கான உறவுகளாகும்?

2M

(i) $R_1=\{(2,1),(7,1)\}$

$A\times B=\{1,2,3,7\}\times\{3,0,-1,7\}$

$=\{(1,3),(1,0),(1,-1),(1,7),(2,3),(2,0),(2,-1),(2,7),(3,3),(3,0),(3,-1),(3,7),(7,3),(7,0),(7,-1),(7,7)\}$

$(2,1)$ மற்றும் $(7,1)\in R_1$

ஆனால் $(2,1),(7,1)\notin A\times B$

R_1 ஆனது **A லிருந்து B க்கான உறவு இல்லை**

(iii) $R_3=\{(2,-1),(7,7),(1,3)\}$

இங்கு $R_3\subseteq A\times B$

R_3 ஆனது **A லிருந்து B க்கான உறவு ஆகும்.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

1. $A=\{1,2,3,7\}$ மற்றும் $B=\{3,0,-1,7\}$ எனில், பின்வருவனவற்றில் எவை A லிருந்து B க்கான உறவுகளாகும்?
(ii) $R_2=\{(-1,1)\}$ (iv) $R_4=\{(7,-1),(0,3),(3,3),(0,7)\}$

எ.கா.1.4: $A=\{3,4,7,8\}$ மற்றும் $B=\{1,7,10\}$ எனில் உள்ள கணங்களில் எவை A -லிருந்து B -க்கு ஆன உறவைக் குறிக்கின்றது? (i) $R_1=\{(3,7),(4,7),(7,10),(8,1)\}$
(ii) $R_2=\{(3,1),(4,12)\}$
(iii) $R_3=\{(3,7),(4,10),(7,7),(7,8),(8,11),(8,8),(8,10)\}$

2. $A=\{1,2,3,4,\ldots,45\}$ மற்றும் R என்ற உறவு "A -யின் மீது, ஓர் எண்ணின் வர்க்கம்" என வரையறுக்கப்பட்டால், $R-$ ஐ $A\times A$- யின் உட்கணமாக எழுதுக. மேலும் R- க்கான மதிப்பகத்தையும், வீச்சகத்தையும் காண்க.

SEP-21 2M

கொடுக்கப்பட்டது: $A=\{1,2,3,4,\ldots,45\}$

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\ldots\ldots(45,45)\}$

R என்ற உறவு "A - யின் மீது, ஓர் எண்ணின் வர்க்கம்" என வரையறுக்கபடுகிறது.

$R=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25),(6,36)\}$

$R\subseteq A\times A$

R -க்கான மதிப்பகம்= $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6}\}$

R -க்கான வீச்சகம்= $\{\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{9},\mathbf{16},\mathbf{25},\mathbf{36}\}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

3. R என்ற ஒரு உறவு $\{(x,y)/y=x+3,\ x\in\{0,1,2,3,4,5\}\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மதிப்பகத்தையும் வீச்சகத்தையும் கண்டறிக. **(JUN-23, PTA-5)**

CQ: R என்ற ஒரு உறவு $\{(x,y)/y=x^2+3,x\in\{0,1,2,3,4,5\}\}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் மதிப்பகத்தையும் வீச்சகத்தையும் கண்டறிக. **(PTA-2)**

4. **கொடுக்கப்பட்ட உறவுகள் ஒவ்வொன்றையும் (1) அம்புக்குறி படம் (2) வரைபடம் (3) பட்டியல் முறையில் குறிக்க.** 5M

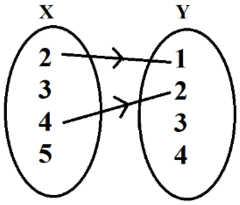
(i) $\{(x,y)|x=2y, x \in \{2,3,4,5\}, y \in \{1,2,3,4\}\}$

(1) அம்புக்குறி படம்

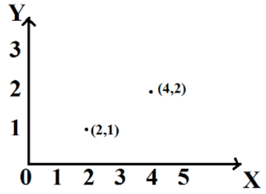
கொடுக்கப்பட்டது, $x = 2y$

$y = 1$ எனில், $x = 2$

$y = 2$ எனில், $x = 4$



(2) வரைபடம்

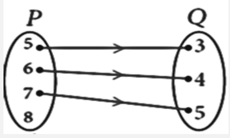


(3) பட்டியல் முறை: $R = \{(2,1),(4,2)\}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

4. கொடுக்கப்பட்ட உறவுகள் ஒவ்வொன்றையும் (1) அம்புக்குறி படம் (2) வரைபடம் (3) பட்டியல் முறையில் குறிக்க. (ii) $\{(x,y)|y=x+3, x, y$ ஆகியவை இயல் எண்கள் $<10\}$ **(JUL - 22)** 5M

எ.கா.1.5: படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ள அம்புகுறி படமானது P மற்றும் Q கணங்களுக்கான உறவைக் குறிக்கின்றது. இந்த உறவை (i) கணகட்டமைப்பு முறை (ii) பட்டியல் முறைகளில் எழுதுக. (iii) R ன் மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க. **(MAY-22)**



5. **ஒரு நிறுவனத்தின் உதவியாளர்கள் (A) எழுத்தர்கள் (C), மேலாளர்கள் (M) மற்றும் நிர்வாகிகள் (E) ஆகிய நான்கு பிரிவுகளில் பணியாளர்கள் உள்ளனர். A, C, M மற்றும் E பிரிவு பணியாளர்களுக்கு ஊதியங்கள் முறையே ₹ 10,000, ₹ 25,000, ₹ 50,000, ₹ 1,00,000 ஆகும். A_1, A_2, A_3, A_4 மற்றும் A_5 ஆகியோர் உதவியாளர்கள். C_1, C_2, C_3, C_4 ஆகியோர் எழுத்தர்கள். M_1, M_2, M_3 ஆகியோர்கள் மேலாளர்கள். மற்றும் E_1, E_2 ஆகியோர் நிர்வாகிகள் ஆவர். $x\mathbb{R}y$ என்ற உறவில் x என்பது y என்பவருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட ஊதியம் எனில் R - என்ற உறவை, வரிசைச் சோடிகள் மூலமாகவும் அம்புக்குறி படம் மூலமாகவும் குறிப்பிடுக.** 2M

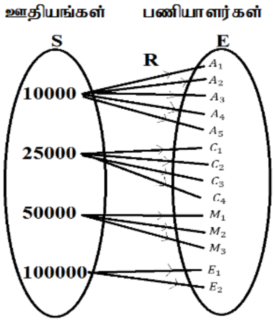
ஊதியங்கள் $(S) = \{10000, 25000, 50000, 100000\}$

பணியாளர்கள் $(E) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, C_1, C_2, C_3, C_4, M_1, M_2, M_3, E_1, E_2\}$

(a) வரிசைச் சோடிகள்

$R = \{(10000, A_1), (10000, A_2), (10000, A_3), (10000, A_4), (10000, A_5), (25000, C_1), (25000, C_2), (25000, C_3), (25000, C_4), (50000, M_1), (50000, M_2), (50000, M_3), (100000, E_1), (100000, E_2)\}$

(b) அம்புக்குறி படம்



பயிற்சி 1.3

1. **$f = \{(x,y)|x, y \in \mathbb{N}$ மற்றும் $y = 2x\}$ ஆனது $\mathbb{N}$-ன் மீதான ஓர் உறவு என்க. மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க. இந்த உறவு சார்பாகுமா?** 2M

$y = f(x) = 2x$

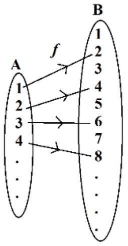
$f(1) = 2(1) = 2$

$f(2) = 2(2) = 4$

$f(3) = 2(3) = 6$

$f(4) = 2(4) = 8$

$\vdots$



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.1.6: $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{2,4,6,8,10\}$ மற்றும் $R = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8)\}$ எனில் R ஆனது ஒரு சார்பு எனக் காட்டுக. மேலும் அதன் மதிப்பகம், துணை மதிப்பகம் மற்றும் வீச்சகத்தைக் காண்க. 2M

f ஆனது Nன் மீதான ஓர் உறவு

f ன் மதிப்பகம் $= \{1,2,3,4,...\}$, f ன் துணை மதிப்பகம் $= \{1,2,3,4,...\}$

f ன் வீச்சகம் $= \{2,4,6,8,...\}$

f ன் அம்புகுறி படத்திலிருந்து, $x \in A$ க்கும் ஒரே ஒரு $y \in B$ இருக்கும். **ஆம்,** f ஒரு சார்பு ஆகும்.

2. $X=\{3,4,6,8\}$ என்க. $\mathbb{R}=\{(x,f(x))|x\in X, f(x)=x^2+1\}$ என்ற உறவானது X-லிருந்து $\mathbb{N}$-க்கு ஒரு சார்பாகுமா? (2M)

கொடுக்கப்பட்டது, $X=\{3,4,6,8\}$

$Y=\{1,2,3,4,\ldots.\}$

$R=\{(x,f(x)/x\in X, f(x)=x^2+1)\}$

$y=f(x)=x^2+1$

$f(3)=3^2+1=10$

$f(4)=4^2+1=17$

$f(6)=6^2+1=37$

$f(8)=8^2+1=65$

$R=\{(3,10),(4,17),(6,37),(8,65)\}$

மதிப்பகம் X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் N-ல் ஒரு நிழல் உரு உள்ளது.

ஆம், R ஆனது X-லிருந்து N-க்கு ஒரு சார்பாகும்.

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)
>
> **எ.கா.1.7:** '$f: X\longrightarrow Y$' என்ற உறவானது $f(x)=x^2-2$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. இங்கு $x=\{-2,-1,0,3\}$ மற்றும் $Y=R$ எனக் கொண்டால் (i) f -யின் உறுப்புகளை பட்டியலிடுக. (ii) f ஒரு சார்பாகுமா?
>
> **எ.கா.1.8:** $X=\{-5,\ 1,\ 3,\ 4\}$ மற்றும் $Y=\{a,\ b,\ c\}$ எனில், X -லிருந்து Y -க்கு பின்வரும் உறவுகளில் எவை சார்பாகும்?
> (i) $R_1=\{(-5,a),(1,a),(3,b)\}$
> (ii) $R_2=\{(-5,b),(1,b),(3,a),(4,c)\}$
> (iii) $R_3=\{(-5,a),(1,a),(3,b),(4,c),(1,b)\}$

3. கொடுக்கப்பட்ட சார்பு $f: x\to x^2-5x+6$, எனில், (i) $f(-1)$ (ii) $f(2a)$ (iii) $f(2)$ (iv) $f(x-1)$ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக. (2M)

$f(x)=x^2-5x+6$

(i) $f(-1)=(-1)^2-5(-1)+6$

$=1+5+6=\mathbf{12}$

(ii) $f(2a)=(2a)^2-5(2a)+6$

$=\mathbf{4a^2-10a+6}$

(iii) $f(2)=2^2-5(2)+6$

$=4-10+6=0$

(iv) $f(x-1)=(x-1)^2-5(x-1)+6$

$=x^2-2x+1-5x+5+6$

$=\mathbf{x^2-7x+12}$

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)
>
> 5. $f(x)=2x+5$ என்க. $x\neq 0$ எனில் $\frac{f(x+2)-f(2)}{x}$ ஐக் காண்க.
> 6. ஒரு சார்பு f ஆனது $f(x)=2x-3$ என வரையறுக்கப்பட்டால் (i) $\frac{f(0)+f(1)}{2}$ - ஐக் காண்க. (ii) $f(x)=0$ எனும்பொழுது, x ஐக் காண்க. (iii) $f(x)=x$ எனில் x ஐக் காண்க. (iv) $f(x)=f(1-x)$ எனில் x ஐக் காண்க.
>
> **எ.கா.1.9:** $f(x)=2x-x^2$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், (i) $f(1)$ (ii) $f(x+1)$ (iii) $f(x)+f(1)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. அருகில் உள்ள அட்டவணையில் நான்கு நபர்களின் முன்னங்கைகளின் நீளம் மற்றும் அவர்களுடைய உயரங்களின் தகவல்கள் வழங்கப்பட்டுள்ளன. அந்த விவரங்களின் அடிப்படையில் ஒரு மாணவர், உயரம் (y) மற்றும் முன்னங்கை நீளம் (x)-க்கான உறவை $y=ax+b$ எனக் கண்டுபிடித்தார். இங்கு a & b ஆகியவை மாறிலிகள்.

முன்னங்கைகளின் நீளம் (செ.மீ) 'x'	உயரம் (அங்குலம்)'y'
35	56
45	65
50	69.5
55	74

(i) இந்த உறவானது சார்பாகுமா என ஆராய்க. (5M) PTA-4

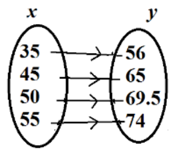
(ii) a மற்றும் b –ஐக் காண்க.

(iii) முன்னங்கையின் நீளம் 40 செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரத்தைக் காண்க.

(iv) உயரம் 53.3 அங்குலம் எனில் அந்த நபரின், முன்னங்கையின் நீளத்தைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது $y=ax+b$

(i) அம்புக்குறிப்படம்



x-ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் y-ல் ஒரே ஒரு நிழல் உரு கொண்டுள்ளது.

ஆம், எனவே இந்த உறவு சார்பாகும்.

(ii) a மற்றும் b -ஐக் காண

அட்டவணையிலிருந்து

$35a+b=56$ ....(1)

$45a+b=65$ ....(2)

$(-)\quad(-)\quad(-)$

$-10a\quad=-9$

$a=\frac{9}{10}=0.9$

$a=0.9$ என (1) ல் பிரதியிட

$35(0.9)+b=56$

$31.5+b=56$

$b=56-31.5=24.5$

$\mathbf{a=0.9}$ மற்றும் $\mathbf{b=24.5}$

(iii) நீளம் $=40$ செ.மீ, $a=0.9, b=24.5$

$y=ax+b$

$=(0.9)(40)+24.5\ =60.5$

முன்னங்கையின் நீளம் 40 செ.மீ எனில்,

அந்த நபரின் உயரம் **= 60.5 அங்குலம்**

(iv) உயரம் $=53.3$ அங்குலம்

$y=ax+b$

$53.3=(0.9)x+24.5\ =0.9x+24.5$

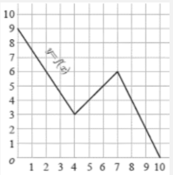
$0.9x=53.3-24.5\ =28.8$

$x=\frac{28.8}{0.9}=$ **32 செ.மீ**

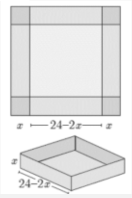
அந்த நபரின், முன்னங்கையின் நீளம் **= 32 செ.மீ**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M



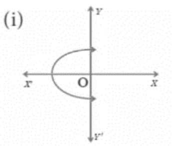
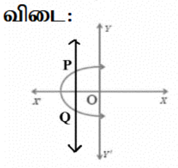
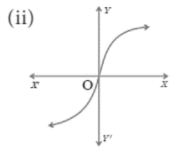
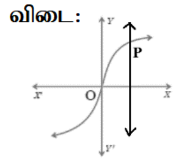
4. படத்தில் கொடுக்கப்பட்ட வரைபடம் $f(x)$ -ன் மூலமாக, $f(9) = 2$ என்பது தெளிவாகிறது.
   (i) பின்வரும் சார்புகளின் மதிப்புகளைக் காண்க
   (அ) $f(0)$ (ஆ) $f(7)$ (இ) $f(2)$ (ஈ) $f(10)$
   (ii) x-ன் எம்மதிப்பிற்கு $f(x) = 1$ ஆக இருக்கும்?
   (iii) $f(x)$-ன் (1) மதிப்பகம் (2) வீச்சகம் காண்க.
   (iv) f என்ற சார்பில் 6-ன் நிழல் உரு என்ன?



7. 24 செ.மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவத் துண்டிலிருந்து நான்கு மூலைகளிலும் சம அளவுள்ள சதுரங்களை வெட்டி படத்தில் உள்ளவாறு மேல்புறம் திறந்த ஒரு பெட்டி செய்யப்படுகிறது. இந்த பெட்டியின் கன அளவு V எனில், V ஐ x-யின் சார்பாகக் குறிப்பிடுக.
8. f என்ற சார்பு $f(x) = 3 - 2x$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $f(x^2) = (f(x))^2$ எனில் x-ஐக் காண்க.
9. ஒரு விமானம் 500 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. விமானம் ‘d’ தொலைவு செல்வதற்கு ஆகும் காலத்தை t(மணியில்)-ன் சார்பாக வெளிப்படுத்துக.

பயிற்சி 1.4

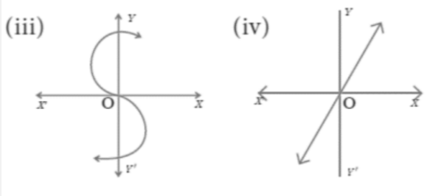
1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்கள் சார்பைக் குறிக்கின்றனவா எனத் தீர்மானிக்கவும். விடைகளுக்கான காரணத்தையும் கொடுக்கவும். 2M

 **விடை:**  குத்துக்கோட்டுச் சோதனையிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையானது, **சார்பை குறிக்கவில்லை** என தெளிவாகிறது. ஏனெனில் வளைவரையை குத்துக்கோடு P மற்றும் Q ஆகிய இரு புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.	 **விடை:**  கொடுக்கப்பட்ட வளைவரையானது, **சார்பை குறிக்கிறது.** ஏனெனில் வளைவரையை குத்துக்கோடு P என்ற ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே சந்திக்கிறது.

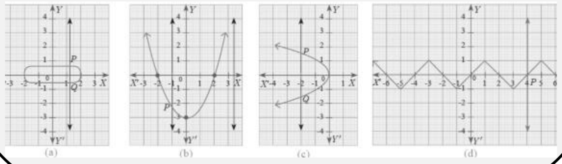
இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. **கீழே கொடுக்கப்பட்ட வரைபடங்கள் சார்பைக் குறிக்கின்றனவா எனத் தீர்மானிக்கவும். விடைகளுக்கான காரணத்தையும் கொடுக்கவும்.**

2M



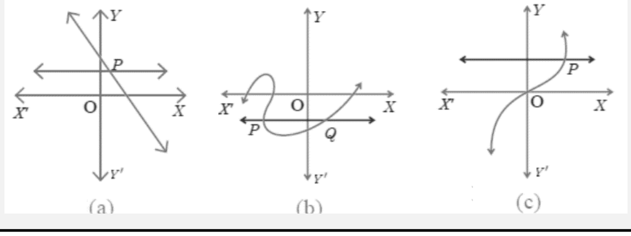
எ.கா.1.10: குத்துக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வரைபடங்களில் எவை சார்பினைக் குறிக்கும் எனத் தீர்மானிக்கவும் ? 2M



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.1.12 கிடைமட்டக்கோடு சோதனையைப் பயன்படுத்தி கீழ்க்கண்ட சார்புகளில் எவை ஒன்றுக்கொன்றானவை எனக் காண்க.

2M



2. **$f: A \to B$ என்ற சார்பானது $f(x) = \frac{x}{2} - 1$, என வரையறுக்கப்படுகிறது.இங்கு, $A = \{2, 4, 6, 10, 12\}$, $B = \{0, 1, 2, 4, 5, 9\}$. ஆக இருக்கும் பொழுது சார்பு f-ஐ பின்வரும் முறைகளில் குறிக்க.** 5M

(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம் (ii) அட்டவணை (iii) அம்புக்குறி படம் (iv) வரைபடம் APR-23

$A = \{2,4,6,10,12\},\ B = \{0,1,2,4,5,9\}$

$f(x) = \frac{x}{2} - 1$

$f(2) = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

$f(4) = \frac{4}{2} - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(6) = \frac{6}{2} - 1 = 3 - 1 = 2$

$f(10) = \frac{10}{2} - 1 = 5 - 1 = 4$

$f(12) = \frac{12}{2} - 1 = 6 - 1 = 5$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

3. $f = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,3), (5,4)\}$ என்ற சார்பினை (i) அம்புக்குறி படம் (ii) அட்டவணை (iii) வரைபடம் மூலமாகக் குறிக்கவும். **5M**

எ.கா.1.11: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ மற்றும் $B = \{2, 5, 8, 11, 14\}$ என்பன இரு கணங்கள் என்க. $f: A \to B$ எனும் சார்பு $f(x) = 3x - 1$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இச்சார்பினைக் கொண்டு (i) அம்புக்குறி படம் (ii) அட்டவணை (iii) வரிசைச்சோடிகளின் கணம் (iv) வரைபடம் ஆகியவற்றைக் குறிக்க. **(PTA-3, SEP-20)**

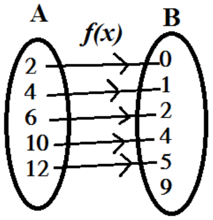
(i) வரிசைச் சோடிகளின் கணம்

$f = \{(2,0), (4,1), (6,2), (10,4), (12,5)\}$

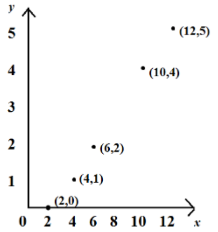
(ii) அட்டவணை

x	2	4	6	10	12
$f(x)$	0	1	2	4	5

(iii) அம்புக்குறி படம்



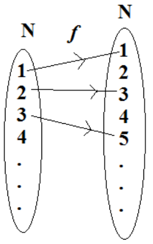
(iv) வரைபடம்



4. **$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x - 1$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான ஆனால் மேல் சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.** 2M

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அம்புக்குறிபடம்



$x = 1$ எனில், $f(1) = 2(1) - 1 = 1$

$x = 2$ எனில், $f(2) = 2(2) - 1 = 3$

$x = 3$ எனில், $f(3) = 2(3) - 1 = 5$

$f: N \to N$ என்ற சார்பில் N ல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் N ல் வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் தொடர்புபடுத்தப்பட்டுள்ளது. எனவே **f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.** ஆனால் துணைமதிப்பகத்தில் உள்ள இரட்டைப்படை எண்களுக்கு மதிப்பகத்தில் முன்உரு இல்லை எனவே **f ஆனது மேல் சார்பு இல்லை.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M

எ.கா.1.13: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ மற்றும் $f = \{(1,4),\ (2,5),\ (3,6)\}$ ஆனது A -லிருந்து B க்கான சார்பு f ஆகும். f ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு ஆனால் மேல் சார்பு இல்லை எனக் காட்டுக.

5. **$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(m) = m^2 + m + 3$ என வரையறுக்கப்பட்டால் அது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு எனக் காட்டுக.** 2M SEP-20

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பு $f(m) = m^2 + m + 3$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$m = 1, f(1) = (1)^2 + 1 + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$

$m = 2, f(2) = (2)^2 + 2 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$

$m = 3, f(3) = (3)^2 + 3 + 3 = 9 + 3 + 3 = 15$

$m = 4, f(4) = (4)^2 + 4 + 3 = 16 + 4 + 3 = 23$

N-ன் வெவ்வேறான உறுப்புகளை N ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் f ஆனது தொடர்புபடுத்துவதால், f ஆனது **ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு** ஆகும்.

6. $\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 4\}}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{B = \mathbb{N}}$ **என்க. மேலும்** $\boldsymbol{f: A \to B}$ **ஆனது,** $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ **என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், (i)** $\boldsymbol{f}$**-யின் வீச்சகத்தைக் காண்க (ii)** $\boldsymbol{f}$ **எவ்வகை சார்பு எனக் காண்க.** (2M)

$A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,3, \ldots\}$

கொடுக்கப்பட்டது: $f: A \to B$ மற்றும் $f(x) = x^3$

(i) $f(1) = 1^3 = 1, f(3) = 3^3 = 27$

$f(2) = 2^3 = 8,\ f(4) = 4^3 = 64$

f-ன் வீச்சகம் $= \{\mathbf{1, 8, 27, 64}\}$

(ii) A-யின் வெவ்வேறான உறுப்புகளை B-ல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகளுடன் f ஆனது தொடர்புபடுத்துவதால், f என்பது **ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு** ஆகும். $2 \in B$ -க்கு A-ல் முன்உரு இல்லாததால் இது ஒரு **உட்சார்பு** ஆகும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா.1.15: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ என்ற சார்பானது $f(x) = 3x + 2, x \in \mathbb{N}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்
(i) $1, 2, 3$ யின் நிழல் உருக்களைக் காண்க.
(ii) 29 & 53-யின் முன் உருக்களைக் காண்க.**(PTA-3)**
(iii) சார்பின் வகையைக் காண்க. **(MDL)**

CQ: $A = \{1,2,3,4\}$ & $B = \mathbb{N}$ என்க.மேலும் $f: A \to B$ ஆனது $f(x) = x^2$என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், (i) f-யின் வீச்சகத்தைக் காண்க.
(ii) f எவ்வகை சார்பு எனக் காண்க. **(PTA-5)**

7. கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு சார்பும் இருபுறச் சார்பா, இல்லையா? உன் விடைக்கான காரணத்தைக் கூறுக.

(i) $\boldsymbol{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ **ஆனது** $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$ (5M)

$f(x) = 2x + 1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$

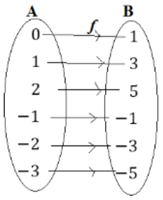
$f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$f(2) = 2(2) + 1 = 5$

$f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$

$f(-2) = 2(-2) + 1 = -3$

$f(-3) = 2(-3) + 1 = -5$



f- இன் வீச்சகம்$= \{1, 3, 5, -1, -3, -5\}$

A இன் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B இல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது மற்றும் Bஇன் ஒவ்வொரு உறுப்பிற்கும் Aஇல் நிழல் உரு உள்ளது.எனவே f **இருபுறச் சார்பு** ஆகும்.

(ii) $\boldsymbol{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ **ஆனது** $\boldsymbol{f(x) = 3 - 4x^2}$ (5M)

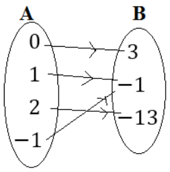
$f(x) = 3 - 4x^2$

$f(0) = 3 - 4(0)^2 = 3$

$f(1) = 3 - 4(1)^2 = -1$

$f(2) = 3 - 4(2)^2 = -13$

$f(-1) = 3 - 4(-1)^2 = -1$



A இல் உள்ள வெவ்வேறு உறுப்புகள் 1 மற்றும் -1 க்கு B இல் ஒரே நிழல் உரு உள்ளது. **எனவே** $\boldsymbol{f}$ **ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்ல.** ஆனால் B இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் A இல் முன்உரு உள்ளது எனவே $\boldsymbol{f}$ **ஆனது மேல்சார்பு ஆகும்.**

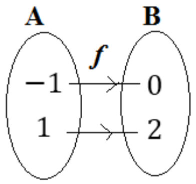
எனவே f **இருபுறச் சார்பு அல்ல.**

8. $\boldsymbol{A = \{-1, 1\}}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{B = \{0, 2\}}$ **என்க. மேலும்,** $\boldsymbol{f: A \to B}$ **ஆனது** $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ **என வரையறுக்கப்பட்ட மேல்சார்பு எனில்,** $\boldsymbol{a}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{b -}$ **ஐக் காண்க.** (2M)

$A = \{-1,1\}$ மற்றும் $B = \{0,2\}$

$f: A \to B$ ஆனது

$f(x) = ax + b$ என வரையறுக்கப்பட்ட மேல்சார்பு



[f ன் வீச்சகம் = துணைமதிப்பகம்]

$f(-1) = 0 \Rightarrow a(-1) + b = 0$

$f(1) = 2 \Rightarrow a(1) + b = 2$

$-a + b = 0$ ....(1)

$a + b = 2$ ......(2)

(1)+(2) $\quad 2b = 2$

$b = 1$

$b = 1$ என (2) ல் பிரதியிட

$a + 1 = 2 \Rightarrow a = 2 - 1 = 1$

எனவே, $\boldsymbol{a = 1}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{b = 1}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா.1.14: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ மற்றும் $f: A \to B$ என்ற சார்பானது $f(x) = x^2 + x + 1$ மேல் சார்பு எனில், B ஐ காண்க.

எ.கா.1.17: f ஆனது $\mathbb{R}$ -லிருந்து $\mathbb{R}$ -க்கு ஆன சார்பு. மேலும் அது $f(x) = 3x - 5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $(a, 4)$ மற்றும் $(1, b)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால் a மற்றும் b -யின் மதிப்புகளைக் காண்க. **(PTA-6)**

CQ: $R = \{(x, -2), (-5, y)\}$ என்பது சமனிச் சார்பைக் குறிக்குமெனில் x மற்றும் y ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. **(PTA-6)**

10. $f:[-5,9] \to \mathbb{R}$ என்ற சார்பானது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது $f(x)=\begin{cases} 6x+1 & ; -5 \le x < 2 \\ 5x^2-1 & ; 2 \le x < 6 \\ 3x-4 & ; 6 \le x \le 9 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (5M)

(i) $f(-3)+f(2)$ (ii) $f(7)-f(1)$ (iii) $2f(4)+f(8)$ (iv) $\frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}$

$$f(x)=\begin{cases} 6x+1 \quad if -5 \le x < 2 & ; \text{இங்கு } x=-5,-4,-3,-2,-1,0,1 \\ 5x^2-1 \quad if\ 2 \le x < 6 & ; \text{இங்கு } x=2,3,4,5 \\ 3x-4 \quad if\ 6 \le x \le 9 & ; \text{இங்கு } x=6,7,8,9 \end{cases}$$

(i) $f(-3)+f(2)$ $x=-3$ எனில், $f(x)=6x+1$ $f(-3)=6(-3)+1=-18+1=-17$ $x=2$ எனில், $f(x)=5x^2-1$ $f(2)=5(2)^2-1=20-1=19$ $f(-3)+f(2)=-17+19=\mathbf{2}$	(ii) $f(7)-f(1)$ PTA-4 $x=7$ எனில், $f(x)=3x-4$ $f(7)=3(7)-4=21-4=17$ $x=1$ எனில், $f(x)=6x+1$ $f(1)=6(1)+1=6+1=7$ $\therefore f(7)-f(1)=17-7=\mathbf{10}$
(iii) $2f(4)+f(8)$ $x=4$ எனில், $f(x)=5x^2-1$ $f(4)=5(4)^2-1$ $=80-1=79$ $x=8$ எனில், $f(x)=3x-4$ $f(8)=3(8)-4$ $=24-4=20$ $2f(4)+f(8)=2(79)+20$ $=158+20=\mathbf{178}$	(iv) $\frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}$ PTA-4 $x=-2$ எனில், $f(x)=6x+1$ $f(-2)=6(-2)+1=-12+1=-11$ $x=6$ எனில், $f(x)=3x-4$ $f(6)=3(6)-4=18-4=14$ $x=4$ எனில், $f(x)=5x^2-1$ $f(4)=5(4)^2-1=80-1=79$ $\frac{2f(-2)-f(6)}{f(4)+f(-2)}=\frac{2(-11)-14}{79+(-11)}=\frac{-22-14}{79-11}=\frac{-36}{68}=-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{17}}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(5M)

9. f என்ற சார்பானது $f(x)=\begin{cases} x+2; & x>1 \\ 2; & -1 \le x \le 1 \\ x-1; & -3 < x < -1 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்

(i) $f(3)$ (ii) $f(0)$ (iii) $f(-1.5)$ (iv) $f(2)+f(-2)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

எ.கா.1.18: சார்பு $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது $f(x)=\begin{cases} 2x+7, & x<-2 \\ x^2-2, & -2 \le x < 3 \\ 3x-2, & x \ge 3 \end{cases}$ என வரையறுக்கப்பட்டால்,

(i) $f(4)$ (ii) $f(-2)$ (iii) $f(4)+2f(1)$ (iv) $\frac{f(1)-3f(4)}{f(-3)}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

11. **புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக t வினாடிகளில் ஒரு பொருள் கடக்கும் தூரமானது $S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு a, b ஆகியவை மாறிலிகள் (g ஆனது புவியீர்ப்பு விசையின் காரணமாக ஏற்படும் முடுக்கம்). $S(t)$ ஆனது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகுமா என ஆராய்க.** (5M) PTA-3

$S(t)=\frac{1}{2}gt^2+at+b$ (a, b ஆகியவை மாறிலிகள்)

$t=1,2,3,\ldots$ வினாடிகள் என எடுத்துக்கொள்ள

$t=1,\ S(1)=\frac{1}{2}g(1)^2+a(1)+b$

$=\frac{1}{2}g+a+b = \mathbf{0.5g+a+b}$

$t=2, S(2)=\frac{1}{2}g(2)^2+a(2)+b=\mathbf{2g+2a+b}$

$t=3, S(3)=\frac{1}{2}g(3)^2+a(3)+b=\mathbf{4.5g+3a+b}$

ஆம், A யின் வெவ்வேறு உறுப்புகளுக்கு B ல் வெவ்வேறு நிழல் உரு உள்ளது.
எனவே **இது ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.**

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.1.16: தடயவியல் விஞ்ஞானிகள், தொடை எலும்புகளைக் கொண்டு ஒருவருடைய உயரத்தை (செ.மீட்டரில்) கணக்கிடுகிறார்கள். அவர்கள் பொதுவாக, $h(b)=2.47b+54\cdot 10$ என்ற சார்பை இதற்குப் பயன்படுத்துகிறார்கள். இங்கு b ஆனது தொடை எலும்பின் நீளமாகும். (5M)

(i) h ஆனது ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா எனச் சோதிக்க.
(ii) தொடை எலும்பின் நீளம் 50செ.மீ எனில், அந்த நபரின் உயரத்தைக் காண்க.
(iii) நபரின் உயரம் 147.96 செ.மீ எனில், அவர் தொடை எலும்பின் நீளத்தைக் காண்க.

12. t என்ற சார்பானது செல்சியஸில் (C) உள்ள வெப்பநிலையையும், பாரன்ஹீட்டில் (F) உள்ள வெப்பநிலையையும் இணைக்கும் சார்பாகும். மேலும் அது $t(C)=F$ என வரையறுக்கப்பட்டால், (இங்கு $F=\frac{9}{5}C+32$). (i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) $t(C)=212$ ஆக இருக்கும்போது C-ன் மதிப்பு (v) செல்சியஸ் மதிப்பும் பாரன்ஹீட் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும் பொழுது வெப்பநிலை ஆகியவற்றைக் கண்டறிக.

t என்ற சார்பானது $t(C)=F$ என வரையறுக்கபடுகிறது. இங்கு $F=\frac{9}{5}C+32$ PTA-1

(i) $t(0)=\frac{9}{5}(0)+32 = 32°F$

(ii) $t(28)=\frac{9}{5}(28)+32$
$=9(5.6)+32$
$=50.4+32$
$=\mathbf{82.4°F}$

(iii) $t(-10)=\frac{9}{5}(-10)+32$
$=-18+32$
$=\mathbf{14°F}$

(iv) $t(C)=212$ எனில்
$\frac{9}{5}C+32=212$
$\frac{9}{5}C=212-32=180$
$C=\frac{180\times5}{9}=\mathbf{100°C}$

(v) $t(C)=F$ இங்கு $F=\frac{9}{5}C+32$ 5M

$t(F)=C$ இங்கு $C=\frac{9}{5}F+32$

செல்சியஸ் மதிப்பும் பாரன்ஹீட் மதிப்பும் சமமாக இருக்கும் பொழுது வெப்பநிலையை t என கொள்ள

$t=\frac{9}{5}t+32°$

$t-\frac{9}{5}t=32°$

இருபுறமும் $\left(-\frac{5}{4}\right)$ ஆல் பெருக்க

$-\frac{5}{4}\left(t-\frac{9}{5}t\right)=32°\times\left(-\frac{5}{4}\right)$

$-\frac{5}{4}t+\frac{9}{4}t=-40°$

$\frac{-5t+9t}{4}=-40°$

$\frac{4t}{4}=-40° \Rightarrow \mathbf{t=-40°}$

பயிற்சி 1.5

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள f மற்றும் g எனும் சார்புகளைப் பயன்படுத்தி $f\circ g$ மற்றும் $g\circ f$-ஐக் காண்க. $f\circ g=g\circ f$ என்பது சரியா சோதிக்க. 2M

(i) $f(x)=x-6,\ g(x)=x^2$ JUN-23

$f\circ g=f\circ g(x)$
$=f(g(x))$
$=f(x^2)$
$=x^2-6$..............(1)

$g\circ f(x)=g(f(x))$
$=g(x-6)$
$=(x-6)^2$...............(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $f\circ g\neq g\circ f$, சமமில்லை

(iv) $f(x)=3+x, g(x)=x-4$

$f\circ g(x)=f(g(x))$
$=f(x-4)$
$=3+x-4$
$=x-1$ ....(1)

$g\circ f(x)=g(f(x))$
$=g(3+x)$
$=3+x-4$
$=x-1$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $f\circ g=g\circ f$, சமம்

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள f மற்றும் g எனும் சார்புகளைப் பயன்படுத்தி $f\circ g$ மற்றும் $g\circ f$-ஐக் காண்க. $f\circ g=g\circ f$ என்பது சரியா சோதிக்க. (ii) $f(x)=\frac{2}{x}$, $g(x)=2x^2-1$ (iii) $f(x)=\frac{x+6}{3}$, $g(x)=3-x$ (v) $f(x)=4x^2-1, g(x)=1+x$

எ.கா.1.19: $f(x)=2x+1$ மற்றும் $g(x)=x^2-2$ எனில் $f\circ g$ மற்றும் $g\circ f$ -ஐ காண்க.

எ.கா.1.20: $f(x)=\sqrt{2x^2-5x+3}$ ஐ இரு சார்புகளின் சேர்ப்பாக குறிக்க.

2. $f \circ g = g \circ f$ எனில் k-யின் மதிப்பைக் காண்க. (5M)

(i) $f(x) = 3x + 2,\ g(x) = 6x - k$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(6x - k)$

$= 3(6x - k) + 2 = 18x - 3k + 2$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x + 2)$

$= 6(3x + 2) - k = 18x + 12 - k$

கொடுக்கப்பட்டது: $f \circ g = g \circ f$

$18x - 3k + 2 = 18x + 12 - k$

$18x - 18x - 3k + k = 12 - 2$

$-2k = 10$

$\boldsymbol{k = -5}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. $f \circ g = g \circ f$ எனில் k –யின் மதிப்பைக் காண்க. (5M)
 (ii) $f(x) = 2x - k,\ g(x) = 4x + 5$

எ.கா.1.21: $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = 2x + k$ மற்றும் $f \circ g = g \circ f$ எனில், k யின் மதிப்பைக் காண்க. (5M)

எ.கா.1.22: $f \circ f(k) = 5, f(k) = 2k - 1$ எனில், k -யின் மதிப்பைக் காண்க. (APR-23, PTA-4) (2M)

3. $f(x) = 2x - 1, g(x) = \frac{x+1}{2}$ எனில், $f \circ g = g \circ f = x$ எனக் காட்டுக. (2M)

$f(x) = 2x - 1,$

$g(x) = \frac{x+1}{2}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1$

$= x + 1 - 1 = x$ ....(1)

$g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g(2x - 1) = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$ ...(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து, $\boldsymbol{f \circ g = g \circ f = x}$

4. $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x - 2$ மற்றும் $g \circ f(a) = 1$ எனில், a –ஐக் காண்க. (PTA-2) (5M)

கொடுக்கப்பட்டது:

$f(x) = x^2 - 1,\ g(x) = x - 2$

$g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 - 1) = x^2 - 1 - 2 = x^2 - 3$

கொடுக்கப்பட்டது: $g \circ f(a) = 1$

$a^2 - 3 = 1$

$a^2 = 1 + 3$

$a^2 = 4$

$\boldsymbol{a = \pm 2}$

5. $A, B, C \subseteq N$ மற்றும் $f: A \to B$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x + 1$ எனவும் மற்றும் $g: B \to C$ ஆனது $g(x) = x^2$ எனவும் வரையறுக்கப்பட்டால் $f \circ g$ மற்றும் $g \circ f$ –ன் வீச்சகத்தைக் காண்க. (2M)

$f: A \to B$ என்ற சார்பு $f(x) = 2x + 1$, $g: B \to C$ ஆனது $g(x) = x^2$ எனவும் வரையறுக்கப்படுகிறது மற்றும் $A, B, C \subseteq N$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \boldsymbol{2x^2 + 1}$, $f \circ g$ யின் வீச்சகம்= $\{y/y = 2x^2 + 1, x \in N\}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = \boldsymbol{(2x + 1)^2}$, $g \circ f$யின் வீச்சகம் $= \{y/y = (2x + 1)^2, x \in N\}$

6. $f(x) = x^2 - 1$ எனில் (i) $f \circ f$ (ii) $f \circ f \circ f$ –ஐக் காண்க. (2M)

(i) $f \circ f$

$f \circ f(x) = f(f(x))$

$= f(x^2 - 1)$

$= (x^2 - 1)^2 - 1$

$= x^4 - 2x^2 + 1 - 1$

$= \boldsymbol{x^4 - 2x^2}$

(ii) $f \circ f \circ f$

$f \circ f \circ f(x) = f\left(f(f(x))\right)$

$= f(f(x^2 - 1))$

$= f((x^2 - 1)^2 - 1)$

$= f(x^4 - 2x^2 + 1 - 1)$

$= f(x^4 - 2x^2)$

$= \boldsymbol{[x^4 - 2x^2]^2 - 1}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(2M)

எ.கா.1.24: $(x) = 3x + 1$, $g(x) = x + 3$ ஆகியவை இரு சார்புகள், மேலும் $gff(x) = fgg(x)$ எனில் x-ஐக் காண்க.

அலகுப் பயிற்சி:

8. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$ என்க. $x \neq 0$ எனில், $f(f(x)) = -\frac{1}{x}$, எனக் காட்டுக.

9. சார்பு f மற்றும் g ஆகியவை $f(x) = 6x + 8$; $g(x) = \frac{x-2}{3}$ எனில், i) $gg\left(\frac{1}{2}\right)$ –யின் மதிப்பைக் காண்க. ii) $gf(x)$ -ஐ எளிய வடிவில் எழுதுக.

7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ மற்றும் $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ஆனது முறையே, $f(x)=x^5$, $g(x)=x^4$ என வரையறுக்கப்பட்டால், f, g ஆகியவை ஒன்றுக்கு ஒன்றானதா மற்றும் $f\circ g$ ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகுமா என்று ஆராய்க. PTA-6 (5M)

$f:R\to R$ ஆனது $f(x)=x^5$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$f\circ f(x)=f(f(x))$

$=f(x^5)=(x^5)^5=x^{25}$

$f\circ f(1)=(1)^{25}=1$

$f\circ f(2)=(2)^{25}$

$f\circ f(3)=(3)^{25}$

f ல் ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் வெவ்வேறான நிழல் உரு உள்ளது. எனவே **f ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பாகும்.**

$g:R\to R$ ஆனது $g(x)=x^4$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$g\circ g(x)=g(g(x))$

$=g(x^4)=(x^4)^4=x^{16}$

$g\circ g(-1)=(-1)^{16}=1$

$g\circ g(1)=(1)^{16}=1$

$g\circ g(2)=(2)^{16}$

-1 மற்றும் 1 ஆகியவை ஒரே நிழல் உருவை கொண்டுள்ளன. எனவே g ஆனது **ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்ல.**

$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x^4)$

$=(x^4)^5=x^{20}$

$f\circ g(1)=(1)^{20}=1$

$f\circ g(-1)=(-1)^{20}=1$

-1 மற்றும் 1 ஆகியவை ஒரே நிழல் உருவை கொண்டுள்ளன. எனவே $f\circ g$ ஆனது **ஒன்றுக்கு ஒன்றான சார்பு அல்ல.**

8. கொடுக்கப்பட்ட $f(x), g(x), h(x)$ ஆகியவற்றை கொண்டு $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ எனக் காட்டுக.

(iii) $f(x)=x-4, g(x)=x^2$ மற்றும் $h(x)=3x-5$ PTA-2 (5M)

$f\circ g(x)=f(g(x))$

$=f(x^2)=x^2-4$

$(f\circ g)\circ h(x)=f\circ g(h(x))$

$=f\circ g(3x-5)$

$=(3x-5)^2-4$

$=9x^2-30x+25-4$

$=9x^2-30x+21$…(1)

$g\circ h(x)=g(h(x))$

$=g(3x-5)=(3x-5)^2$

$=9x^2-30x+25$

$f\circ(g\circ h)(x)=f(9x^2-30x+25)$

$=9x^2-30x+25-4$

$=9x^2-30x+21$ ……….(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து,

$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

8. கொடுக்கப்பட்ட $f(x), g(x), h(x)$ ஆகியவற்றை கொண்டு $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ எனக் காட்டுக.

(i) $f(x)=x-1, g(x)=3x+1$ மற்றும் $h(x)=x^2$ (ii) $f(x)=x^2, g(x)=2x$ மற்றும் $h(x)=x+4$

எ.கா.1.23: $f(x)=2x+3$, $g(x)=1-2x$ மற்றும் $h(x)=3x$ எனில் $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ என நிறுவுக. **(PTA-5)**

அலகுப் பயிற்சி: **6.** $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ மற்றும் $h(x)=x-2$ எனில், $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ என நிறுவுக.

9. $f=\{(-1,3),(0,-1),(2,-9)\}$ ஆனது $\mathbb{Z}$-லிருந்து $\mathbb{Z}$-க்கான ஒரு நேரிய சார்பு எனில், $f(x)$-ஐக் காண்க. (2M)

$f=\{(-1,3),(0,-1),(2,-9)\}$ ஆனது Z-லிருந்து Z-க்கான நேரிய சார்பு ஆகும்.

$f(x)=mx+c$ ஐ

$f=\{(x,mx+c)/\ x\in Z\}$ என எழுத

$f(-1)=3\Rightarrow -m+c=3$ …..(1)

$f(0)=-1\Rightarrow c=-1$ ……… (2)

$c=-1$ என (1) ல் பிரதியிட

$-m+c=3\Rightarrow -m-1=3$

$m=-1-3=-4$

$\therefore f(x)=-4x-1$

10. ஒரு மின்சுற்றுக் கோட்பாட்டின் படி, $C(t)$ என்ற ஒரு நேரிய சுற்று, $C(at_1+bt_2)=aC(t_1)+bC(t_2)$-ஐ பூர்த்தி செய்கிறது. மேலும் இங்கு a, b ஆகியவை மாறிலிகள் எனில், $C(t)=3t$ ஆனது ஒரு நேரிய சுற்று எனக் காட்டுக. (2M)

$C(t_1)=t$

$C(t_2)=2t$ இங்கு $t=t_1+t_2$

$C(t)=C(t_1+t_2)=C(t_1)+C(t_2)$

$t+2t=3t$

$\therefore$ **$C(t)=3t$ ஆனது நேரிய சுற்று ஆகும்.**

அலகுப் பயிற்சி - 1

4. $A = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ **என்க. மற்றும்** $f: A \to N$ **ஆனது** $f(n) = n$**-ன் அதிகபட்சப் பகா காரணி** $(n \in A)$ **என வரையறுக்கப்பட்டால்** f**—ன் வரிசைச் சோடிகளின் கணத்தை எழுதுக மற்றும்** f **—ன் வீச்சகத்தைக் காண்க.** (2M)

$A = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$

$f: A \to N$ ஆனது $f(n) = n$ -ன் அதிகபட்சப் பகா காரணி $(n \in A)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$f = \{(9, 3), (10, 5), (11, 11), (12, 3), (13, 13), (14, 7), (15, 5), (16, 2), (17, 17)\}$

f ன் வீச்சகம் $= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$

$9 = 3 \times 3$	$10 = 5 \times 2$	$11 = 1 \times 11$
$12 = 3 \times 4$	$13 = 1 \times 13$	$14 = 2 \times 7$
$15 = 5 \times 3$	$16 = 2 \times 8$	$17 = 1 \times 17$

அலகுப்பயிற்சிக்கான குறிப்பு

வினா எண்: 1,2,3 — பயிற்சிக்காக

வினா எண்: 6 — பயிற்சி 1.5 ல் - 8 ஆம் வினா போன்றது.

வினா எண்: 8,9 — பயிற்சி 1.5 ல் - 6 ஆம் வினா போன்றது.

5. $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}$ **என்ற சார்பின் மதிப்பகத்தைக் காண்க** (2M)

$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ எனில், $f(x)$ ஆனது மெய் அல்ல.

$x \in [-1, 1]$எனில், $f(x)$ ஆனது மெய் ஆகும்.

$\therefore$ மதிப்பகம் $\{-1, 0, 1\}$, $-1 \le x \le 1$

7. $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$ **மற்றும்** $D = \{5, 6, 7, 8\}$ **எனில்,** $A \times C$ **ஆனது** $B \times D$ **உட்கணமா எனச் சரிபார்க்க.** (2M)

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$, $D = \{5, 6, 7, 8\}$

$A \times C = \{1, 2\} \times \{5, 6\} = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$ ..... (1)

$B \times D = \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8\}$

$= \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4,5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)\}$ ...... (2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து $A \times C \subseteq B \times D$.

10. பின்வருவனவற்றின் மதிப்பகங்களை எழுதுக. (2M) PTA-6

i) $f(x) = \frac{2x+1}{x-9}$ PTA-6

$x = 9$ எனில் $f(9)$ வரையறுக்கப்படவில்லை. எனவே, f ஆனது $x = 9$ஐ தவிர எல்லா மெய்யெண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\therefore f$ ன் மதிப்பகம் $= \boldsymbol{R} - \{9\}$

ii) $p(x) = \frac{-5}{4x^2+1}$

p ஆனது எல்லா இயல் எண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\therefore$ எனவே, மதிப்பகம் $= \boldsymbol{R}$

iii) $g(x) = \sqrt{x - 2}$

$x \in (-\infty, 2)$ எனில் $g(x)$ ஆனது மெய் அல்ல

$x \in [2, \infty)$ எனில் $g(x)$ ஆனது மெய்

$\therefore$ எனவே மதிப்பகம் $[2, \infty)$

iv) $h(x) = x + 6$

h ஆனது எல்லா இயல் எண்களுக்கும் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\therefore$ எனவே, மதிப்பகம் $= \boldsymbol{R}$

பயிற்சிக்காக:

1. $(x^2 - 3x,\ y^2 + 4y)$ மற்றும் $(-2,5)$ ஆகிய வரிசைச் சோடிகள் சமம் எனில், x மற்றும் y-ஐக் காண்க. **(2M)**
2. $A \times A$ கார்டீசியன் பெருக்கல் பலனின் 9 உறுப்புகளில், உறுப்புகள் $(-1, 0)$ மற்றும் $(0, 1)$-ம் இருக்கிறது எனில், A-ல் உள்ள உறுப்புகளைக் காண்க. மற்றும் $A \times A$ —ன் மீதமுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க. **(2M)**
3. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \ge 1 \\ 4 & x < 1 \end{cases}$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால்,

(i) $f(0)$ (ii) $f(3)$ (iii) $f(a + 1)$ ($a \ge 0$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது) ஆகியவற்றை காண்க. **(2M)**

2. எண்களும் தொடர்வரிசைகளும்

பயிற்சி 2.1

1. 3 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 2-ஐத் தரக்கூடிய அனைத்து மிகை முழுக்களையும் காண்க. (2M)

q என்பது மிகை முழுக்கள் என்க.

வகுத்தி $= 3$ மற்றும் மீதி $= 2$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$

$q = 0,1,2,3,4$ ...என்க.

$3q + 2 = a \quad (\because b = 3, r = 2)$

$q = 0 \Rightarrow 3(0) + 2 = 0 + 2 = 2$

$q = 1 \Rightarrow 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5$

$q = 2 \Rightarrow 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8$

$q = 3 \Rightarrow 3(3) + 2 = 9 + 2 = 11$

$\therefore$ மிகை முழுக்கள் $\mathbf{2, 5, 8, 11}$ ...

2. ஒரு நபரிடம் 532 பூந்தொட்டிகள் உள்ளன. அவர் வரிசைக்கு 21 பூந்தொட்டிகள் வீதம் அடுக்க விரும்பினார். எத்தனை வரிசைகள் முழுமை பெறும் எனவும் மற்றும் எத்தனை பூந்தொட்டிகள் மீதமிருக்கும் எனவும் காண்க. (2M) PTA-1

ஒரு நபரிடம் 532 பூந்தொட்டிகள் உள்ளன. அவர் வரிசைக்கு 21 பூந்தொட்டிகள் வீதம் அடுக்க விரும்பினார்.

வகுபடும் எண் $= 532$

வகுக்கும் எண் $= 2$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி, $a = bq + r \;, 0 \leq r < b$

```
     25
21 | 532
     42
     112
     105
       7
```

$532 = 21(25) + 7$

ஈவு $= 25,$ மீதி $= 7$

$\therefore$ **$\mathbf{25}$ வரிசைகள்** முழுமை பெறும் **7 பூந்தொட்டிகள்** மீதமிருக்கும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.2.1: நம்மிடம் 34 கேக் துண்டுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் 5 கேக்குகள் மட்டுமே வைக்க இயலுமெனில் கேக்குகளை வைக்க எத்தனை பெட்டிகள் தேவை மற்றும் எத்தனை கேக்குகள் மீதமிருக்கும் எனக் காண்க. (2M)

அலகுப் பயிற்சி:.

2. ஒரு பால்காரரிடம் 175 லிட்டர் பசும் பாலும் 105 லிட்டர் எருமைப்பாலும் உள்ளது. இவற்றை அவர் சம கொள்ளளவுக் கொண்ட இருவகையான கலன்களில் அடைத்து விற்க விருப்பப்படுகிறார். (i) இவ்வாறு விற்பதற்குத் தேவைப்படும் கலன்களின் அதிகபட்ச கொள்ளளவு எவ்வளவு? இவ்வாறாக (ii) எத்தனை கலன் பசும்பால் மற்றும் (iii) எருமைப்பால் விற்கப்பட்டிருக்கும்? (5M)

4. 107 ஆனது $4q$+3, q என்பது ஏதேனும் ஒரு முழு என்ற வடிவில் அமையும் என நிறுவுக. (2M)

3. தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்களின் பெருக்கற்பலன் 2 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.

n மற்றும் $n + 1$ ஆகியன தொடர்ச்சியான இரு மிகை முழுக்கள் என்க. $(n + 1) = n^2 + n$

$n = 2m + 1$ என்பது ஒற்றைப்படை எண் என்க.

$n^2 + n = (2m + 1)^2 + (2m + 1)$ (2M)

$= 4m^2 + 2(2m)(1) + 1^2 + (2m + 1)$

$= 4m^2 + 4m + 1 + 2m + 1$

$= 4m^2 + 6m + 2 = 2(2m^2 + 3m + 1)$

இது 2 ஆல் வகுபடும்

$n = 2m$ என்பது இரட்டைப்படை எண் என்க.

$n^2 + n = (2m)^2 + 2m = 4m^2 + 2m$

$= 2(2m^2 + m).$

இது 2 ஆல் வகுபடும். $\therefore$ **நிருபிக்கப்பட்டது.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

5. எந்த மிகை முழுவின் வர்க்கத்தையும் 4 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 0 (அ) 1 மட்டுமே கிடைக்கும் என நிறுவுக.

எ.கா.2.3: ஒற்றை முழுக்களின் வர்க்கமானது $4q + 1$. (இங்கு q ஆனது முழுக்கள்) என்ற வடிவில் அமையும் எனக் காட்டுக. (2M)

அலகுப் பயிற்சி: 1. எல்லா மிகை முழுக்கள் n –க்கும் $n^2 - n$ ஆனது 2 –ஆல் வகுப்படும் என நிறுவுக. (5M)

4. a, b மற்றும் c என்ற மிகை முழுக்களை 13-ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7, 10 எனில் $a + b + c$ ஆனது 13 ஆல் வகுபடும் என நிருபி. (5M)

a, b மற்றும் c என்ற மிகை முழுக்களை 13 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7, 10.

$a + b + c$ ஆனது 13 ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க வேண்டும். எனவே, வகுத்தி $= 13$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r \;, 0 \leq r < b$

$a = 13q_1 + 9, b = 13q_2 + 7, c = 13q_3 + 10$

$a + b + c = 13q_1 + 9 + 13q_2 + 7 + 13q_3 + 10$

$= 13q_1 + 13q_2 + 13q_3 + 26$

$a + b + c = 13(q_1 + q_2 + q_3 + 2) + 0$ (மீதி $= 0$)

$a + b + c$ ஆனது 13 ன் மடங்காக உள்ளது.

$\therefore$ **இது 13 ஆல் வகுபடும்.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப் பயிற்சி:

3. a, b, c என்ற எண்களை 13 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதிகள் முறையே 9, 7 மற்றும் 10. a + 2b + 3c ஐ 13-ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க. (5M)

6. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க.

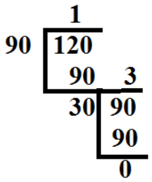
(iv) $84, 90$ மற்றும் 120 (2M)

$a = 120, b = 90, c = 84$ என்க

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, 0 \leq r < b$

$120 = 90(1) + 30$



மீதி $30 \neq 0$

$90 = 30(3) + 0$

மீதி 0.

$\therefore 120$ மற்றும் 90 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ 30.

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.
>
> 6. யூக்ளிடின் வகுத்தல் வழிமுறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க. (2M)
> (i) 340 மற்றும் 412 (ii) 867 மற்றும் 255
> (iii) 10224 மற்றும் 9648
>
> **எ.கா.2.2:** பின்வரும் ஒவ்வொன்றிலும் a-யை b-ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் ஈவு மற்றும் மீதியைக் காண்க.
> (i) $a = -12, b = 5$ (ii) $a = 17, b = -3$
> (iii) $a = -19, b = -4$ (2M)
>
> **எ.கா.2.6:** $396, 504, 636$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ காண்க. (5M) **(SEP-21)**

$d = 30$ மற்றும் $c = 84$ ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ -ஐக் காண வேண்டும்.

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$c > d$

$84 = 30(2) + 24$

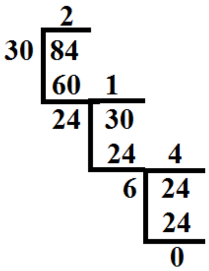
மீதி $24 \neq 0$

$30 = 24(1) + 6$

மீதி $6 \neq 0$

$24 = 6(4) + 0$

மீதி 0



$\therefore 84, 90$ மற்றும் 120 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ **6.**

7. 1230 & 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12-ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண்க.

JUL-22 (5M)

1230 மற்றும் 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12-ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண வேண்டும்.

$1230 - 12 = 1218$ மற்றும்

$1926 - 12 = 1914.$

$a = 1914$ மற்றும் $b = 1218$ என்க

$a > b$

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.
>
> 9. ஒரு மிகை முழுவை 88 ஆல் வகுக்கும்போது மீதி 61 கிடைக்கிறது. அதே மிகை முழுவை 11 ஆல்வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க. (2M)
>
> **எ.கா.2.5:** 445 மற்றும் 572ஐ ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் வகுக்கும் போது முறையே மீதி 4 மற்றும் 5-ஐ தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண்ணைக் கண்டறிக.

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, 0 \leq r < b$

$1914 = 1218(1) + 696$

மீதி $696 \neq 0$

$1218 = 696(1) + 522$

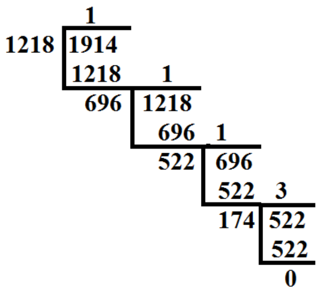
மீதி $522 \neq 0$

$696 = 522(1) + 174$

மீதி $174 \neq 0$

$522 = 174(3) + 0$

மீதி 0



$\therefore$ 1230 மற்றும் 1926 ஆகிய எண்களை வகுக்கும்போது மீதி 12 –ஐத் தரக்கூடிய மிகப்பெரிய எண் **174.**

8. 32 மற்றும் 60 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி d என்க. $d = 32x + 60y$ எனில் x மற்றும் y என்ற முழுக்களைக் காண்க. **5M**

கொடுக்கப்பட்டது: 32 மற்றும் 60 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தி d,

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r \ , 0 \le r < b$

$a = 60, b = 32, a > b$

$60 = 32\,(1) + 28$ .... (1)

$32 = 28\,(1) + 4$ .... (2)

$28 = 4(7) + 0$ ....(3)

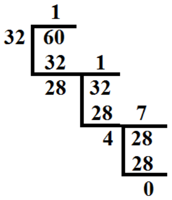
$\therefore \quad d = 4 \Rightarrow d = 32x + 60$

$4 = 32x + 60$

(2) லிருந்து $\quad 32 = 28(1) + 4$

$32 - (28 \times 1) = 4$

(1) லிருந்து ⇒ $60 = 32(1) + 28$



$60 - (32 \times 1) = (28 \times 1)$

$4 = 32 - [60 - (32 \times 1)]$

$4 = (32 \times 1) - 60 + (32 \times 1)$

$4 = 32(1 + 1) - 60(1)$

$4 = 32(2) + 60(-1)$

$\therefore \boldsymbol{x = 2, \ y = -1}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.2.4: 210 & 55 ஆகியவற்றின் மீப்பெரு பொது வகுத்தியை $55x - 325$ என்ற வடிவில் எழுதினால் x-யின் மதிப்புக் காண்க. **5M**

10. **எந்த இரு அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்கள் சார்பகா எண்கள் என நிறுவுக.** **5M**

$n, (n+1)$ என்பன அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்கள் என்க.

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r \quad 0 \le r < b$

$n + 1 > n.$ எனவே

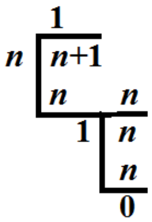
$(n + 1) = n(1) + 1$

$n = (1)(n) + 0$

மீதி $= 0.$ வகுத்தி $= 1.$

$n, (n+1)$ என்பனவற்றின் மீ.பொ.வ 1

∴ **இவை சார்பகா எண்கள் ஆகும்.**



பயிற்சி 2.2

1. **n ஓர் இயல் எண் எனில், எந்த n மதிப்புகளுக்கு 4^n ஆனது 6 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?** **2M**

கொடுக்கப்பட்டது: $n \in N$ மற்றும் 4^n,

$n = 1,2,3,4 \ldots.$

$4^1 = 4$

$4^2 = 16$

$4^3 = 64$

$4^4 = 256$

$4^5 = 1024$

$4^6 = 4096$

⋮

இதிலிருந்து, 4^nஆனது n ன் மதிப்பு **இரட்டைப்படை எண்ணாக** இருக்கும் போது 6 இல் முடிகிறது.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். **2M**

எ.கா.2.8: 6^n ஆனது, n ஓர் இயல் எண் என்ற வடிவில் அமையும் எண்கள் 5 என்ற இலக்கத்தை கொண்டு முடியுமா? உனது விடைக்குக் காரணம் கூறுக.

2. **m மற்றும் n இயல் எண்கள் எனில், எந்த m-யின் மதிப்புகளுக்கு $2^n \times 5^m$ என்ற எண் 5 என்ற இலக்கத்தைக் கொண்டு முடியும்?** **2M** SEP-20

கொடுக்கப்பட்டது:

$m, n \ \in N$ மற்றும் $2^n \times 5^m$

$n = 1, m = 1 \ \Rightarrow 2^1 \times 5^1 = 2 \times 5 = 10$

$n = 1, m = 2 \ \Rightarrow 2^1 \times 5^2 = 2 \times 25 = 50$

$n = 2, m = 3 \ \Rightarrow 2^2 \times 5^3 = 4 \times 125 = 500$

$\therefore 2^n$ ஆனது இரட்டைப்படை எண் ஆகும்.

5ன் பெருக்கற்பலன் 0 ல் முடிகிறது.

$2^n \times 5^m$ல் 5 ல் முடியும்படி m க்கு எந்த **மதிப்பும் இல்லை.**

3. 252525 மற்றும் 363636 என்ற எண்களின் மீ.பொ.வ காண்க. (2M)

252525 ன் காரணிகள்

$= 5 \times 5 \times 10101$

5	252525
5	50505
	10101

363636 ன் காரணிகள்

$= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 10101$

2	363636
2	181818
3	90909
3	30303
	10101

∴ 252525 மற்றும் 363636 ஆகியவற்றின் **மீ.பொ.வ 10101**

4. $13824 = 2^a \times 3^b$ எனில், a மற்றும் b –யின் மதிப்புக் காண்க. MAY-22 (2M)

$13824 = 2^a \times 3^b$

13824 ஐ காரணிப்படுத்த,

$13824 = 2^9 \times 3^3$

எனவே, $2^a \times 3^b = 2^9 \times 3^3$

∴ $a = 9$ மற்றும் $b = 3$

3	13824
3	4608
3	1536
2	512
2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா.2.10: $a^b \times b^a = 800$ என்றவாறு அமையும் இரு மிகை முழுக்கள் 'a' மற்றும் 'b' ஐ காண்க.

CQ: $p^2 \times q^1 \times r^4 \times s^3 = 3{,}15{,}000$ என்றவாறு அமையும் எனில் p, q, r & s ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. (APR-23)

6. அடிப்படை எண்ணியல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி 408 மற்றும் 170 என்ற எண்களின் மீ.பொ.ம மற்றும் மீ.பொ.வ காண்க. (2M)

408 மற்றும் 170 ஆகிய எண்களை காரணிப்படுத்த,

$408 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 17 = 2^3 \times 3 \times 17$ மற்றும்

$170 = 2 \times 5 \times 17$

2	408
2	204
2	102
3	51
	17

408 மற்றும் 170 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம $= 2^3 \times 3 \times 5 \times 17 = 8 \times 15 \times 17 = \mathbf{2040}$

408 மற்றும் 170 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.வ $= 2 \times 17$

$= \mathbf{34}$

2	170
5	85
	17

7. 24, 15, 36 ஆகிய எண்களால் மீதியின்றி வகுபடும் மிகப்பெரிய ஆறிலக்க எண்ணைக் காண்க. (2M)

$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 = 360$

24, 15, 36 ஆகியவற்றின் மீ.பொ.ம 360.

அந்த எண் 360 ஆல் வகுபடும்.

மிகப்பெரிய 6 இலக்க எண் 999999

$= 999999 - 279$

$= \mathbf{999720}$

3	24, 15, 36
2	8, 5, 12
2	4, 5, 6
	2, 5, 3

```
        2777
360 ) 999999
      720
      2799
      2520
       2799
       2520
        2799
        2520
         279
```

8. 35, 56 மற்றும் 91 ஆல் வகுக்கும் போது மீதி 7 ஐத் தரக்கூடிய மிகச்சிறிய எண் எது? (2M)

35, 56 மற்றும் 91 ஆகியவற்றின்

மீ.பொ.ம $= 3640$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி,

$a = bq + r, \quad 0 \le r < b$

$n = 35q_1 + 7$

$n = 56q_2 + 7$

$n = 91q_3 + 7$

$n = 3640 + 7$

$= 3647$

7	35, 56, 91
	5, 8 ,13

$7 \times 5 \times 8 \times 13 = 3640$

∴ தேவையான, மிகச்சிறிய எண் **3647.**

9. முதல் 10 இயல் எண்களால் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய சிறிய எண் எது? (2M) JUN-23, JUL-22

முதல் 10 இயல் எண்கள்

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.

1,2,3,4,5,6,7,8,9 மற்றும் 10 ஆகியவற்றின்

மீ.பொ.ம $= 1 \times 2^3 \times 3^2$

$= 8 \times 9 \times 35$

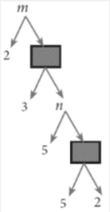
$= 2520$

∴ முதல் 10 இயல் எண்களால் மீதியின்றி வகுபடக்கூடிய சிறிய எண் **2520.**

பயிற்சிக்காக:

5. $p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times p_4^{x_4} = 113400$ இங்கு, p_1, p_2, p_3, p_4 என்பன ஏறு வரிசையில் அமைந்த பகா எண்கள் மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 என்பன முழுக்கள் எனில், p_1, p_2, p_3, p_4 மற்றும் x_1, x_2, x_3, x_4 ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. **(2M)**

எ.கா.2.7: கொடுக்கப்பட்ட காரணி பிரித்தலில், m மற்றும் n என்ற எண்களைக் காண்க. **(2M)**



எ.கா.2.9: $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 3$ என்பது ஒரு பகு எண்ணா? உனது விடையை நியாயப்படுத்துக. **(PTA-3) (2M)**

பயிற்சி 2.3

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை முழு x –ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $71 \equiv x$ (மட்டு 8) (2M)

கொடுக்கப்பட்டது: $71 \equiv x$(மட்டு 8)

$71 - x = 8k$, k –ஒரு முழு

$71 - x$ ஆனது 8 இன் மடங்காகும்.

குறைந்தபட்ச மிகை முழு $x = 7$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. பின்வரும் சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை முழு x-ன் மதிப்பைக் காண்க. (2M)
(ii) $78 + x \equiv 3$ (மட்டு 5) (iii) $89 \equiv (x+3)$(மட்டு 4)
(iv) $96 \equiv \frac{x}{7}$ (மட்டு 5) (v) $5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

எ.கா.2.12: $15 \equiv 3$(மட்டு d) என்றவாறு அமையும் d-யின் மதிப்பைத் தீர்மானிக்க.

எ.கா.2.13: பின்வருவனவற்றிற்குப் பொருந்தக்கூடிய குறைந்தபட்ச மிகை x-ஐக் காண்க. (i) $67 + x \equiv 1$(மட்டு 4)
(ii) $98 \equiv (x+4)$(மட்டு 5)

2. x ஆனது மட்டு 17 –யின் கீழ் 13 உடன் ஒருங்கிசைவாக உள்ளது எனில், $7x - 3$ ஆனது எந்த எண்ணுடன் ஒருங்கிசைவாக இருக்கும்? PTA-2 (2M)

[$a \equiv b$(மட்டு m) எனில் $a \times c \equiv b \times c$ (மட்டு m)]

கொடுக்கப்பட்டது: $x \equiv 13$ (மட்டு17)

7 ஆல் பெருக்க $7x \equiv 91$ (மட்டு17)

$7x - 3 \equiv 91 - 3$ (மட்டு17)

$7x - 3 \equiv 88$(மட்டு 17)

$7x - 3 \equiv 3$ (மட்டு 17) [$\because 88 \equiv 3$ (மட்டு 17)]

$\therefore 7x - 3$ ஆனது **3 உடன்** ஒருங்கிசைவாக இருக்கும்.

	5
17	88
	85
	3

3. தீர்க்க: $5x \equiv 4$ (மட்டு 6) (2M)

கொடுக்கப்பட்டது: $5x \equiv 4$ (மட்டு 6)

$5x - 4 = 6k$, k ஒரு முழு

$5x = 6k + 4$

$x = \frac{6k+4}{5}$

$6k + 4$ ஆனது 5 ஆல் வகுபடும்.

$k = 1, 6, 11, 16 \ldots$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{6(1)+4}{5} = \frac{6+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$

$k = 6 \Rightarrow x = \frac{6(6)+4}{5} = \frac{36+4}{5} = \frac{40}{5} = 8$

$k = 11 \Rightarrow x = \frac{6(11)+4}{5} = \frac{66+4}{5} = \frac{70}{5} = 14$

$\therefore \boldsymbol{x = 2, 8, 14 \ldots}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

4. தீர்க்க: $3x - 2 \equiv 0$ (மட்டு 11)

எ.கா.2.14: தீர்க்க $8x \equiv 1$ (மட்டு 11)

எ.கா.2.15: $10^4 \equiv x$ (மட்டு 19) என்றவாறு அமையும் x-மதிப்பைக் கணக்கிடுக. **(MDL)**

எ.கா.2.16: $3x \equiv 1$ (மட்டு 15) என்ற சமன்பாட்டிற்கு எத்தனை முழு எண் தீர்வுகள் உள்ளன எனக் காண்க. **(SEP-21)**

5. முற்பகல் 7 மணிக்கு 100 மணி நேரத்திற்குப் பிறகு நேரம் என்ன? (2M)

தொடங்கும் நேரம் முற்பகல் 7 மணி, அதன் பின் 100 மணி நேரத்திற்கு பிறகு நேரம் காண வேண்டும். மட்டு 24ஐ பயன்படுத்த

$$100 + 7 \text{ (மட்டு 24)} = 107 \text{ (மட்டு 24)}$$

$$= 11 \text{ (மட்டு24)}$$

24 | 107 → 4; 96; 11

∴ முற்பகல் 7 மணிக்கு 100 மணி நேரத்திற்குப் பிறகு **முற்பகல் 11 மணி.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

6. பிற்பகல் 11 மணிக்கு 15 மணி நேரத்திற்கு முன்பு நேரம் என்ன?

10. பிரிட்டிஷ் ஏர்லைன்ஸ் விமானத்தில் சென்னையிலிருந்து லண்டன் செல்லப் பயணநேரம் தோராயமாக 11 மணிநேரம். விமானம் தனது பயணத்தை ஞாயிற்றுக்கிழமை 23:30 மணிக்குத் தொடங்கியது. சென்னையின் திட்ட நேரமானது லண்டனின் திட்ட நேரத்தைவிட 4.30 மணி நேரம் முன்னதாக இருக்குமெனில், விமானம் லண்டனில் தரையிறங்கும் நேரத்தைக் காண்க.

7. இன்று செவ்வாய் கிழமை, என்னுடைய மாமா 45 நாட்களுக்குப் பிறகு வருவதாகக் கூறியுள்ளார். என்னுடைய மாமா எந்தக் கிழமையில் வருவார்? (2M)

0,1,2,3,4,5 மற்றும் 6 என்பன முறையே ஞாயிறு முதல் சனி வரை உள்ள கிழமைகளைக் குறிப்பதாக கொள்வோம்.

இன்று செவ்வாய் கிழமை, என்னுடைய மாமா 45 நாட்களுக்குப் பிறகு வருவார்.

$$2 + 45 \text{ (மட்டு 7)} = 47 \text{(மட்டு 7)}$$

$$= 5 \text{ (மட்டு 7)} (\because 47 \equiv 5 \text{ மட்டு 7})$$

7 | 47 → 6; 42; 5

∴ என்னுடைய மாமா **வெள்ளிக் கிழமையில்** வருவார்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா.2.17: ஒருவர் சென்னையிலிருந்து டெல்லிக்குச் செல்ல இரயிலில் புறப்படுகிறார். அவர் தனது பயணத்தைப் புதன்கிழமை 22.30 மணிக்குத் தொடங்குகிறார். எந்தவிதத் தாமதமுமின்றி இரயில் செல்வதாகக் கொண்டால் மொத்த பயண நேரம் 32 மணி நேரம் ஆகும். அவர் எப்பொழுது டெல்லியைச் சென்றடைவார்?

எ.கா.2.18: கலா மற்றும் வாணி இருவரும் நண்பர்கள். "இன்று எனது பிறந்தநாள்" எனக் கலா கூறினாள். வாணியிடம், "உனது பிறந்தநாளை எப்போது நீ கொண்டாடினாய்?" எனக் கேட்டாள். அதற்கு வாணி "இன்று திங்கள்கிழமை, நான் என்னுடைய பிறந்த நாளை 75 நாட்களுக்கு முன் கொண்டாடினேன்" எனப் பதிலளித்தாள். வாணியின் பிறந்தநாள் எந்தக் கிழமையில் வந்திருக்கும் எனக் காண்க.

9. 2^{81} ஐ 17 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி காண்க. (2M)

$$512 \equiv 2 \text{ (மட்டு 17)}$$

$$2^9 \equiv 2 \text{ (மட்டு 17)}$$

$$(2^9)^9 \equiv 2^9 \text{ (மட்டு17)}$$

$$2^{81} \equiv 512 \text{(மட்டு17)} [\because 512 = 2 \text{(மட்டு17)}]$$

17 | 512 → 30; 510; 2

$$2^{81} \equiv 2 \text{ (மட்டு17)}$$

$\therefore 2^{81} - 2 = 17k$, k ஒரு முழு

$$2^{81} = 17k + 2.$$

யூக்ளிட் வகுத்தல் துணைத்தேற்றத்தின் படி, $a = bq + r, 0 \le r < b$. ∴ எனவே **மீதி 2.**

பயிற்சிக்காக:

8. எந்த ஒரு மிகை முழு எண் n–ற்கும் $2^n + 6 \times 9^n$ ஆனது 7 ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக. **(5M)**

எ.கா.2.11: 70004 மற்றும் 778 ஆகிய எண்களை 7 ஆல் வகுக்க கிடைக்கும் மீதியைக் காண்க. **(2M)**

பயிற்சி 2.4

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க. (i) $8, 24, 72, \ldots$ (2M)

மேற்கண்ட தொடர்வரிசையில், ஒவ்வொரு உறுப்பையும் 3ஆல் பெருக்க

$8 \times 3 = 24$,

$24 \times 3 = 72$,

$72 \times 3 = 216$

$216 \times 3 = 648$

$648 \times 3 = 1944$

∴ அடுத்த மூன்று உறுப்புகள்

$216, 648, 1944$.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க.
(ii) $5, 1, -3, \ldots$ (iii) $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \ldots$

எ.கா.2.19: பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் அடுத்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \ldots$
(ii) $5, 2, -1, -4, \ldots$ (iii) $1, 0.1, 0.01, \ldots$

2. பின்வரும் n –வது உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர்வரிசைகளின் முதல் நான்கு உறுப்புகளைக் காண்க.

(i) $a_n = n^3 - 2$ (2M)

(i) $a_n = n^3 - 2$

$n = 1 \Rightarrow a_1 = (1)^3 - 2 = 1 - 2 = -1$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^3 - 2 = 27 - 2 = 25$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^3 - 2 = 64 - 2 = 62.$

∴ முதல் நான்கு உறுப்புகள்: **$-1, 6, 25, 62.$**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

2. பின்வரும் n-வது உறுப்புகளைக் கொண்ட தொடர்வரிசைகளின் முதல் நான்கு உறுப்புகளைக் காண்க.
(ii) $a_n = (-1)^{n+1}\, n(n+1)$ (iii) $a_n = 2n^2 - 6$

6. $a_1 = 1, a_2 = 1$ மற்றும் $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3, n \in N$, எனில், தொடர்வரிசையின் முதல் ஆறு உறுப்புகளைக் காண்க.

எ.கா.2.22: பின்வரும் தொடர்வரிசையின் முதல் ஐந்து உறுப்புகளைக் காண்க.
$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}+3};\ n \geq 3, n \in N$

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்வரிசைகளின் n-வது உறுப்பைக் காண்க. (2M)

(i) $2, 5, 10, 17, \ldots$

$1^2 + 1 = 2$

$2^2 + 1 = 5$

$3^2 + 1 = 10$

$4^2 + 1 = 17$

$\vdots$

$n^2 + 1 = a_n$

∴ n –வது உறுப்பு **$n^2 + 1$**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்வரிசைகளின் n –வது உறுப்பைக் காண்க. (ii) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$ (iii) $3, 8, 13, 18, \ldots$

எ.கா.2.20: பின்வரும் தொடர்வரிசைகளின் பொது உறுப்பு காண்க.
(i) 3, 6, 9,..... (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$,..... (iii) $5, -25, 125$,.....

5. $a_n = \begin{cases} \frac{n^2-1}{n+3}; & \text{ஓர் இரட்டை எண் } n \in N \\ \frac{n^2}{2n+1}; & \text{ஓர் ஒற்றை எண் } n \in N \end{cases}$ என்பது n-வது உறுப்பு எனில், a_8 மற்றும் a_{15} காண்க. (2M)

$n = 8$ (இரட்டை)

$a_n = \frac{n^2-1}{n+3}$

$a_8 = \frac{8^2-1}{8+3} = \frac{64-1}{11} = \frac{63}{11}$

$n = 15,$ (ஒற்றை)

$a_n = \frac{n^2}{2n+1};$

$a_{15} = \frac{(15)^2}{2(15)+1}$

$= \frac{225}{30+1} = \frac{225}{31}$

∴ $a_8 = \frac{63}{11},\ a_{15} = \frac{225}{31}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

4. கீழ்க்கண்ட தொடர்வரிசைகள் ஒவ்வொன்றிலும் n –வது உறுப்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அதில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள உறுப்புகளைக் காண்க
(i) $a_n = \frac{5n}{n+2}$; a_6 மற்றும் a_{13} (ii) $a_n = -(n^2 - 4)$; a_4 மற்றும் a_{11}

எ.கா.2.21: ஒரு தொடர்வரிசையின் பொது உறுப்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.
$a_n = \begin{cases} n(n+3); n \in N & \text{ஓர் ஒற்றை எண்} \\ n^2 + 1\ ; n \in N & \text{ஓர் இரட்டை எண்} \end{cases}$ 11-வது உறுப்பு மற்றும் 18-வது உறுப்புக் காண்க.

CQ: 1. ஒரு தொடர் வரிசையின் பொது உறுப்பு $a_n = \begin{cases} n^2; & n \text{ ஒரு ஒற்றை எண்} \\ \frac{n^2}{2}; & n \text{ ஒரு இரட்டை எண்} \end{cases}$ எனில் 3-வது மற்றும் 4 -வது உறுப்புகளைக் காண்க. **(SEP-20)**

பயிற்சி 2.5

1. பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையா எனச் சோதிக்கவும். (2M)

(i) $a - 3, a - 5, a - 7, \ldots$

$d = t_2 - t_1$

$= a - 5 - (a - 3)$

$= \cancel{a} - 5 - \cancel{a} + 3 = -2$......... (1)

$d = t_3 - t_2$

$= a - 7 - (a - 5)$

$= \cancel{a} - 7 + 5 - \cancel{a} = -2$ ....(2)

(1) மற்றும்(2) லிருந்து, $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு **கூட்டுத்தொடர் வரிசையாகும்.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

1. பின்வரும் தொடர் வரிசைகள் ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையா எனச் சோதிக்கவும்.
(ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ (iii) $9, 13, 17, 21, 25, \ldots$
(iv) $\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$ (v) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

எ.கா.2.23: பின்வரும் தொடர்வரிசைகள் கூட்டுத்தொடர் வரிசையா, இல்லையா எனச் சோதிக்க. (i) $x + 2,\ 2x + 3,\ 3x + 4$,....
(ii) 2, 4, 8, 16,.... (iii) $3\sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ 7\sqrt{2},\ 9\sqrt{2}$,....

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு a & பொது வித்தியாசம் d-க்குக் கூட்டுத்தொடர்வரிசைகளைக் காண்க.

(i) $a = 5, d = 6$

2M

கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வடிவம்

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$

$5, (5+6), (5+(2\times 6)), 5+3(6), \ldots$

$5, 11, 5+12, 5+18, \ldots$

$\mathbf{5, 11, 17, 23}, \ldots$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு a மற்றும் பொது வித்தியாசம் d –க்குக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க. (ii) $a = 7, d = -5$ (iii) $a = \frac{3}{4}, d = \frac{1}{2}$

எ.கா.2.24: முதல் உறுப்பு 20 ஆகவும் பொது வித்தியாசம் 8 ஆகவும் கொண்ட கூட்டுத் தொடர்வரிசையை எழுதவும்.

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொது உறுப்புகளையுடைய கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் காண்க. (i) $t_n = -3 + 2n$

2M

கொடுக்கப்பட்டது $t_n = -3 + 2n$

முதல் உறுப்பு $a = t_1$

$= -3 + 2(1)$

$= -3 + 2$

$\mathbf{a = -1}$

$n = 2 \Rightarrow t_2 = -3 + 2(2)$

$= -3 + 4$

$t_2 = 1$

பொது வித்தியாசம்

$d = t_2 - t_1$

$= 1 - (-1)$

$= 1 + 1$

$\mathbf{d = 2}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பொது உறுப்புகளையுடைய கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது வித்தியாசம் காண்க. (ii) $t_n = 4 - 7n$

CQ: ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் $t_{18} - t_{14} = 32$ எனில் அதன் பொது வித்தியாசத்தைக் காண்க. **(PTA-6)**

4. $-11, -15, -19, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர் வரிசையின் 19-வது உறுப்பைக் காண்க. MDL, JUL-22

2M

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர் வரிசை $-11, -15, -19, \ldots$

$a = -11,$

$d = t_2 - t_1$

$= -15 + 11$

$d = -4$

n ஆவது உறுப்பு $t_n = a + (n-1)d$

$n = 19$

$\Rightarrow t_{19} = -11 + (19-1)(-4)$

$= -11 + 18(-4)$

$= -11 - 72$

$t_{19} = -83$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

எ.கா.2.25: $3, 15, 27, 39, \ldots\ldots$ என்ற தொடர்வரிசையின் 15-வது, 24-வது மற்றும் n-வது உறுப்பு (பொது உறுப்பு) காண்க.

எ.கா.2.27: ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 7-வது உறுப்பு -1 மற்றும் 16-வது உறுப்பு 17 எனில், அதன் பொது உறுப்பைக் காண்க.

அலகுப் பயிற்சி:. 6. $-2, -4, -6, \ldots . -100$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் இறுதி உறுப்பிலிருந்து 12வது உறுப்பைக் காண்க.

5. $16, 11, 6, 1, \ldots$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் -54 என்பது எத்தனையாவது உறுப்பு? MAY-22

2M

கொடுக்கப்பட்ட கூட்டுத்தொடர்வரிசை $16, 11, 6, 1, \ldots$

$t_n = -54$,

$a = 16,$

$d = t_2 - t_1 = 11 - 16 = -5$

$n = \left(\frac{l-a}{d}\right) + 1$

$= \left(\frac{-54-16}{-5}\right) + 1$

$= \left(\frac{-70}{-5}\right) + 1$

$n = 14 + 1 = 15$

$\therefore \mathbf{t_{15} = -54}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M

எ.கா.2.26: $3, 6, 9, 12, \ldots\ldots 111$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. **(SEP-21)**

CQ: $21, 18, 15, \ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் -81 எத்தனையாவது உறுப்பு? மேலும் இக்கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் 0 ஓர் உறுப்பாகுமா என்பதை காரணத்துடன் விளக்குக. **(PTA-5)**

6. $9, 15, 21, 27, \ldots, 183$ என்ற கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் நடு உறுப்புகளைக் காண்க.

PTA-1 2M

$9,15,21,27, \ldots 183.$

$a = 9, \quad d = t_2 - t_1 = 15 - 9$

$l = 183, \quad d = 6$

கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.

$n = \frac{l-a}{d} + 1 = \frac{183-9}{6} + 1 = \frac{174}{6} + 1$

$= 29 + 1 = 30$

$n = 30$ ஒரு இரட்டை எண்,

நடு உறுப்பு $= \frac{n}{2}$ஆவது உறுப்பு மற்றும் $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ஆவது உறுப்பு

$= \frac{30}{2}$ ஆவது உறுப்பு $\frac{30}{2} + 1$ ஆவது உறுப்பு

$= 15$ ஆவது உறுப்பு $+$ 16 ஆவது உறுப்பு

$t_n = a + (n-1)d$

$n = 15 \Rightarrow$

$t_{15} = 9 + (15-1)(6) = 9 + (14)(6) = 93$

$n = 16 \Rightarrow$

$t_{16} = 9 + (16-1)(6) = 9 + (15)(6) = 99$

∴ நடு உறுப்புகளாவன $\boldsymbol{t_{15} = 93,\ t_{16} = 99}$

7. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் ஒன்பதாவது உறுப்பின் ஒன்பது மடங்கும், பதினைந்தாவது உறுப்பின் பதினைந்து மடங்கும் சமம் எனில் இருபத்து நான்காவது உறுப்பின் ஆறு மடங்கானது பூச்சியம் என நிறுவுக.

5M JUL-22

$9t_9 = 15t_{15} \quad (\because t_n = a + (n-1)d)$

$9[a + (9-1)]d = 15[a + (15-1)d]$

$9(a + 8d) = 15(a + 14d)$

$9a + 72d = 15a + 210d$

$9a - 15a + 72d - 210d = 0$

$-6a - 138d = 0$

$-6(a + 23d) = 0$

$6[a + (24-1)d] = 0$

$6t_{24} = 0$

∴ நிறுவப்பட்டது.

8. $3 + k, 18 - k, 5k + 1$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், k–யின் மதிப்புக் காண்க.

SEP-21, PTA-3, 5 2M

$3 + k, 18 - k, 5k + 1$ என்பவை ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையில் உள்ளன.

ie, $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$

$18 - k - (3 + k) = 5k + 1 - (18 - k)$

$18 - k - 3 - k = 5k + 1 - 18 + k$

$15 - 2k = 6k - 17$

$15 + 17 = 6k + 2k$

$32 = 8k$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

9. $x, 10, y, 24, z$ என்பவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன எனில், x, y, z –ஆகியவற்றின் மதிப்புக் காண்க. 2M

10. ஒரு சினிமா அரங்கின் முதல் வரிசையில் 20 இருக்கைகளும் மொத்தம் 30 வரிசைகளும் உள்ளன. அடுத்தடுத்த ஒவ்வொரு வரிசையிலும் அதற்கு முந்தைய வரிசையைவிட இரண்டு இருக்கைகள் கூடுதலாக உள்ளன. கடைசி வரிசையில் எத்தனை இருக்கைகள் இருக்கும்?

2M PTA-4

சினிமா அரங்கில் மொத்தம் 30 வரிசைகள் உள்ளன. $n = 30$.

முதல் வரிசையில் 20 இருக்கைகள் உள்ளன. $a = 20$

ஒவ்வொரு வரிசையிலும் 2 இருக்கைகள் அதிகப்படுத்தப்படுகின்றன. 1,2,3,… வரிசைகள் முறையே $20, 22, 24, \ldots$ ஆகும்.

இது ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையை அமைக்கிறது.

$d = t_2 - t_1 = 22 - 20 = 2$

t_{30} ஐக் காண வேண்டும்.

$t_n = a + (n-1)d$

$t_{30} = 20 + (30-1)2$

$= 20 + (29)(2)$

$= 20 + 58$

$t_{30} = 78$

78 இருக்கைகள் கடைசி வரிசையில் அமையும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப் பயிற்சி: 5M

5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் $(m+1)^{th}$ வது உறுப்பானது $(n+1)^{th}$ வது உறுப்பின் இரு மடங்கு எனில், $(3m+1)^{th}$ வது உறுப்பானது $(m+n+1)^{th}$ வது உறுப்பின் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

7. இரண்டு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகள் ஒரே பொதுவித்தியாசம் கொண்டுள்ளன. ஒரு தொடர் வரிசையின் முதல் உறுப்பு 2 மற்றும் மற்றொரு தொடர்வரிசையின் முதல் உறுப்பு 7. இரு தொடர்வரிசைகளின் 10வது உறுப்புளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம், 21-வது உறுப்புகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்குச் சமம் என நிரூபித்து உள்ளது. இந்த வித்தியாசம் அந்தக் கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் பொது வித்தியாசத்திற்குச் சமமாக உள்ளது என நிறுவுக.

11.ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமைந்த அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 27 மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் 288 எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க. SEP-21

5M

அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள்

$a-d, a,\ a+d$

கூடுதல்: $a-d+a+a+d=27$

$3a\ =27 \Rightarrow a=9$

பெருக்கற்பலன், $(a-d)(a)(a+d)=288$

$(a^2-d^2)a=288$

$(9^2-d^2)=\frac{288}{9}$

$81-d^2=32$

$-d^2=32-81$

$-d^2=-49$

$d=\pm 7$

$a=9, d=7$ எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை

$9-7,\ 9,\ \ 9+7\ \Rightarrow\ \mathbf{2},\ \ \mathbf{9},\ \ \mathbf{16}$

$a=9,\ d=\ -7$ எனில் கூட்டுத்தொடர் வரிசை

$9+7,\ 9,\ 9-7\ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{16},\ \ \mathbf{9},\ \ \mathbf{2}.$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.2.29: ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த நான்கு உறுப்புகளின் கூடுதல் 28 மற்றும் அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 276. அந்த நான்கு எண்களைக் காண்க. 5M

12. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 6-வது மற்றும் 8-வது உறுப்புகளின் விகிதம் 7:9 எனில், 9-வது மற்றும் 13-வது உறுப்புகளின் விகிதம் காண்க.

$t_6 : t_8 = 7:9 \Rightarrow \frac{t_6}{t_8}=\frac{7}{9}$ 5M MDL, MAY-22

$\frac{a+(6-1)d}{a+(8-1)d}=\frac{7}{9}$ $\quad [\because t_n=a+(n-1)d]$

$9(a+5d)=7(a+7d)$

$9a+45d=7a+49d$

$9a-7a=49d-45d$

$2a=4d$

$a=2d$ ....(1)

$t_9 : t_{13}=\frac{t_9}{t_{13}} \Rightarrow \frac{a+(9-1)d}{a+(13-1)d}=\frac{a+8d}{a+12d}$

$=\frac{2d+8d}{2d+12d}$ ($a=2d$ என பிரதியிட)

$=\frac{10d}{14d}=\frac{5}{7}$

$\therefore\ \ \boldsymbol{t_9 : t_{13} = 5:7}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.2.28: ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையின் l, m மற்றும் n-ஆவது உறுப்புகள் முறையே x, y மற்றும் z எனில், பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க. 5M

(i) $x(m-n)+y(n-l)+z(l-m)=0$

(ii) $(x-y)n+(y-z)l+(z-x)m=0$ **(MAY-22)**

CQ: ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் முதல் p உறுப்புகளின் கூடுதல் ap^2+bp எனில் அதன் பொது வித்தியாசத்தினைக் காண்க. **(PTA-6)**

13.ஒரு குளிர்காலத்தில் திங்கள்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை ஊட்டியின் வெப்பநிலை கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன. திங்கள் கிழமை முதல் புதன்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $\mathbf{0°C}$ மற்றும் புதன்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $\mathbf{18°C}$ எனில், ஐந்து நாட்களின் வெப்பநிலைகளைக் காண்க.

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$ என்பன முறையே ஊட்டியில் திங்கள் முதல் வெள்ளி வரை நிலவும் வெப்பநிலை என்க. 5M

திங்கள் முதல் புதன் வரை வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $0°C$

$a+a+d+a+2d=0$

$3a+3d=0$

$a+d=0$

$a=-d$ ....(1)

புதன் கிழமை முதல் வெள்ளி கிழமை வரை உள்ள வெப்பநிலைகளின் கூடுதல் $18°C$.

$a+2d+a+3d+a+4d=18$

$3a+9d=18$

$-3d+9d=18$

($a=-d$ என பிரதியிட)

$6d=18$

$d=3$

$d=3$ என (1) ல் பிரதியிட, $a=-3$

ஒவ்வொரு நாளின் வெப்பநிலை

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$

$(-3), (-3+3), \big(-3+2(3)\big),$

$\big(-3+3(3)\big), \big(-3+3(4)\big)$

$-3, 0,\ -3+6,\ -3+9,\ -3+12,$

$= \mathbf{-3°C,\ 0°C,\ 3°C,\ 6°C,\ 9°C}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

14. பிரியா தனது முதல் மாத வருமானமாக ₹ 15,000 ஈட்டுகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வோர் ஆண்டும் அவரது மாத வருமானம் ₹ 1500 உயர்கிறது. அவளுடைய முதல் மாத செலவு ₹ 13,000 மற்றும் அவளது மாதாந்திரச் செலவு ஒவ்வோர் ஆண்டும் ₹ 900 உயர்கிறது. பிரியாவின் மாதாந்திரச் சேமிப்பு ₹ 20,000 அடைய எவ்வளவு காலம் ஆகும்? 5M

எ.கா.2.30: ஒரு தாய் தன்னிடம் உள்ள ₹ 207 ஐ கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும் மூன்று பாகங்களாகப் பிரித்துத் தனது மூன்று குழந்தைகளுக்கும் கொடுக்க விரும்பினார். அவற்றில் இரு சிறிய தொகைகளின் பெருக்கற்பலன் ₹ 4623 ஆகும். ஒவ்வொரு குழந்தையும் பெறும் தொகையினைக் காண்க.

பயிற்சி 2.6

1. பின்வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.

5M

(i) $3, 7, 11, \ldots 40$ உறுப்புகள் வரை

$3,7,11,\ldots 40$ ஆகியன கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

$a = 3, d = t_2 - t_1 = 7 - 3 = 4, n = 40$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{40} = \frac{40}{2}[2(3) + (40-1)4]$

$= 20[6 + 39(4)]$

$= 20(6 + 156) \quad = 20(162)$

$\boldsymbol{S_{40} = 3240}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

1. பின்வருவனவற்றின் கூடுதல் காண்க.
   (ii) $102, 97, 92, \ldots 27$ உறுப்புகள் வரை

எ.கா.2.31: $8, 7\frac{1}{4}, 6\frac{1}{2}, 5\frac{3}{4}, \ldots\ldots$ என்ற கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் முதல் 15 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

(iii) $6 + 13 + 20 + \cdots + 97$

5M

$6 + 13 + 20 + \cdots + 97$ ஆகியன கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளன.

$a = 6,\ d = t_2 - t_1 = 13 - 6 = 7,\ l = 97$

$n = \frac{l-a}{d} + 1$

$n = \frac{97-6}{7} + 1 = \frac{91}{7} + 1 = 13 + 1 = 14$

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$S_{14} = \frac{14}{2}[6 + 97] \quad = 7[103]$

$\boldsymbol{S_{14} = 721}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.2.32: $0.40 + 0.43 + 0.46 + \ldots\ldots + 1$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க. 5M

2. 5–லிருந்து தொடங்கி எத்தனை தொடர்ச்சியான ஒற்றை முழுக்களைக் கூட்டினால் கூடுதல் 480 கிடைக்கும்?

5M

தேவையான கூட்டுத்தொடர் $5 + 7 + 9 + \cdots$

$a = 5,\ d = t_2 - t_1 = 7 - 5\ d = 2$

$S_n = 480$

$\frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = 480$

$\frac{n}{2}[2(5) + (n-1)2] = 480$

$\frac{2n}{2}[5 + n - 1] = 480$

$n(4 + n) = 480$

$n^2 + 4n - 480 = 0$

$(n - 20)(n + 24) = 0$

$n - 20 = 0$ (அல்லது) $n + 24 = 0$

$n = 20$ (அல்லது) $n = -24,\ \ n = -24$ என்பது ஏற்புடையதல்ல, எனவே $n = 20$.

$\therefore$ **20 தொடர்ச்சியான ஒற்றை முழுக்களை கூட்டினால் கூடுதல் 480 கிடைக்கும்.**

$S_{20} = 480$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M

எ.கா.2.33: $1 + 5 + 9 + \ldots..$ என்ற தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 190 கிடைக்கும்?

3. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் n –வது உறுப்பு $4n - 3$ எனில், அதன் முதல் 28 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க. 2M

$t_n = 4n - 3$

$n = 1 \Rightarrow t_1 = 4(1) - 3 = 4 - 30 \Rightarrow t_1 = a = 1$

$n = 2 \Rightarrow t_2 = 4(2) - 3 = 8 - 3 = 5$

$n = 3 \Rightarrow t_3 = 4(3) - 3 = 12 - 3 = 9$

A.P = 1, 5, 9, ...

$a = 1,\ \ d = t_2 - t_1 \Rightarrow 5 - 1 = 4$

$n = 28,\ \ S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{28} = \frac{28}{2}[2(1) + (28-1)4]$

$= 14[2 + 27(4)] = 14[2 + 108]$

$= 14(110)$

$\boldsymbol{S_{28} = 1540}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

4. ஒரு குறிப்பிட்ட தொடரின் முதல் 'n' உறுப்புகளின் கூடுதல் $2n^2 - 3n$ எனில், அது ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசை என நிரூபிக்க.

எ.கா.2.35: ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் $\frac{5n^2}{2} + \frac{3n}{2}$ எனில், 17வது உறுப்பைக் காண்க. 2M

5. ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையின் 104-வது உறுப்பு மற்றும் 4-வது உறுப்புகள் முறையே 125 & 0. அத்தொடர்வரிசையின் முதல் 35 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க. (5M)

$t_{104} = 125, \quad t_n = a + (n-1)d$

$t_4 = 0 \Rightarrow \; a + (4-1)d = 0$

$a + 3d = 0$

$a = -3d$ …….(1)

$t_{104} = 125 \Rightarrow a + (104-1)d = 125$

$a + 103d = 125$

$a = -3d$ என பிரதியிட,

$-3d + 103d = 125$

$100d = 125$

$d = \frac{125}{100}$

$d = \frac{5}{4}$

$a = \frac{5}{4}$ என (1) ல் பிரதியிட, $a = -3\left(\frac{5}{4}\right)$

தொடர்வரிசையின் முதல் 35 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண வேண்டும், $n = 35.$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{35} = \frac{35}{2}\left[2\left(\frac{-15}{4}\right) + (35-1)\frac{5}{4}\right]$

$= \frac{35}{2}\left[\frac{-15}{2} + 34\left(\frac{5}{4}\right)\right] = \frac{35}{2}\left[\frac{-15+85}{2}\right]$

$= \frac{35}{2}\left(\frac{70}{2}\right) = \frac{1225}{2}$

$\boldsymbol{S_{35} = 612.5}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

எ.கா.2.34: ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் 13 -வது உறுப்பு 3 மற்றும் முதல் 13 உறுப்புகளின் கூடுதல் 234 எனில், கூட்டுத்தொடர் வரிசையின் பொது வித்தியாசம் மற்றும் முதல் 21 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.

7. 602-க்கும் 902-க்கும் இடையே 4 ஆல் வகுபடாத இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க. (5M)

602 க்கும் 902 க்கும் இடையே உள்ள வரிசை

$603 + 604 + 605 + \cdots + 901$

$a = 603, d = 1, l = 901$

$n = \frac{l-a}{d} + 1$

$= \frac{901-603}{1} + 1$

$= 298 + 1 = 299$

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$S_{299} = \frac{299}{2}(603 + 901)$

$= \frac{299}{2}(1504)$

$= 299(752) = 224848$

602-க்கும் 902-க்கும் இடையே 4 ஆல் வகுபடும் இயல் எண்களின் கூடுதல்

$604 + 608 + 612 + \cdots + 900$

$a = 604, d = 4, l = 900.$

$n = \frac{l-a}{d} + 1$

$= \frac{900-604}{4} + 1$

$= \frac{296}{4} + 1 = 74 + 1 = 75$

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_{75} = \frac{75}{2}(604 + 900)$

$= \frac{75}{2}(1504)$

$S_{75} = 56400$

4 ஆல் வகுபடாத இயல் எண்களின் கூடுதல்

$= S_{299} - S_{75}$

$= 224848 - 56400$

$= \mathbf{168448}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

6. 450-க்குக் குறைவாக உள்ள அனைத்து ஒற்றை மிகை முழுக்களின் கூடுதல் காண்க. (5M)

எ.கா.2.36: 300-க்கும் 600-க்கும் இடையே 7-ஆல் வகுபடும் அனைத்து இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க.

CQ: 100 -க்கும் 1000 -க்கும் இடையே 11 -ஆல் வகுபடும் அனைத்து இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க. **(SEP - 20)**

CQ: 9 ஆல் வகுபடும் அனைத்து மூன்றிலக்க இயல் எண்களின் கூடுதல் காண்க. **(PTA - 3)**

8. இரகு ஒரு மடிக்கணினி வாங்க விரும்புகிறார். அவர் அதற்கான தொகையான ₹ 40,000-ஐ உடனடியாக பணமாகவும் செலுத்தலாம் அல்லது 10 மாதத் தவணைகளில் முதல் தவணை ₹ 4800, இரண்டாம் தவணை ₹ 4750, மூன்றாம் தவணை ₹ 4700 என்ற அடிப்படையிலும் செலுத்தலாம். அவர் இந்த வகையில் பணம் செலுத்துகிறார் எனில், (i) 10 மாதத் தவணைகளில் அவர் செலுத்திய மொத்தத் தொகை (ii) மாதத் தவணை அடிப்படையில் பணம் செலுத்தும்போது அவர் அசலைக் காட்டிலும் கூடுதலாகச் செலுத்திய தொகை ஆகியவற்றைக் காண்க. 5M

மடிகணினியின் விலை **₹ 40000.**

இரகு செலுத்திய மாதத் தவணை முறையே **₹** 4800, **₹** 4750, **₹** 4700...

$4800 + 4750 + 4700 + \cdots$ ஒரு கூட்டுத்தொடர்

$a = 4800, d = t_2 - t_1 = 4750 - 4800$
$= -50$

(i) $n = 10$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{10} = \frac{10}{2}[2(4800) + (10-1)(-50)]$

$= \frac{10}{2} \times 2[4800 + (9)(-25)]$

$= 10[4800 - 225]$

$= 10[4575]$

$S_{10} = 45750.$

∴ 10 மாதத் தவணைகளில் அவர் செலுத்திய மொத்தத் தொகை **₹ 45750.**

(ii) அவர் அசலைக் காட்டிலும் கூடுதலாகச் செலுத்திய தொகை

$= 45750 - 40000 \; = \textbf{₹ 5750}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப் பயிற்சி:. 5M

8. ஒரு நபர் 10 வருடங்களில் ₹16500 ஐ சேமிக்கிறார். ஒவ்வொரு வருடமும் அவர் சேமிக்கும் தொகையானது அதற்கு முந்தைய வருடம் சேமிக்கும் தொகையை விட ₹100 அதிகம். அவர் முதல் வருடம் எவ்வளவு சேமித்திருப்பார்?

11. $S_1, S_2, S_3, \ldots S_m$ என்பன m வெவ்வேறு கூட்டுத் தொடர்வரிசைகளின் n உறுப்புகளின் கூடுதலாகும். முதல் உறுப்புகள் $1, 2, 3, \ldots m$ மற்றும் பொது வித்தியாசங்கள் $1, 3, 5, \ldots, (2m-1)$ முறையே அமைந்தால், அந்த கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_m = \frac{1}{2}mn(mn+1)$ என நிரூபிக்க. 5M

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n, \; a = 1, \; d = 1$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_1 = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)(1)] = \frac{n}{2}[2 + n - 1]$

$S_1 = \frac{n}{2}[n+1]$

$S_2 \Rightarrow a = 2, d = 3$

$S_2 = \frac{n}{2}[2(2) + (n-1)3] = \frac{n}{2}[4 + 3n - 3]$

$S_2 = \frac{n}{2}[3n+1]$

$S_3 \Rightarrow a = 3, d = 5$

$S_3 = \frac{n}{2}[2(3) + (n-1)5]$

$= \frac{n}{2}[6 + 5n - 5]$

$S_3 = \frac{n}{2}[5n+1]$

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_m$

$= \frac{n}{2}[n+1] + \frac{n}{2}[3n+1] + \frac{n}{2}[5n+1] + \cdots$

$+m$ உறுப்புகள் வரை

$t_2 - t_1 = \frac{n}{2}(3n+1) - \frac{n}{2}(n+1)$

$= \frac{n}{2}[3n + 1 - n - 1]$

$= \frac{n}{2}[2n] = n^2$

$t_3 - t_2 = \frac{n}{2}(5n+1) - \frac{n}{2}(3n+1)$

$= \frac{n}{2}[5n + 1 - 3n - 1]$

$= \frac{n}{2} \times 2n = n^2$

∴ இது ஒரு கூட்டுத்தொடரை அமைக்கும்.

$a = \frac{n}{2}(n+1), \; d = n^2$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_m = \frac{m}{2}\left[2\left(\frac{n}{2}\right)(n+1) + (m-1)n^2\right]$

$= \frac{mn}{2}[n + 1 + (m-1)n]$

$= \frac{mn}{2}[n + 1 + mn - n]$

$= \frac{mn}{2}[mn+1]$

$\boldsymbol{S_m = \frac{1}{2}\, mn[mn+1]}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

12. $\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{3a-2b}{a+b} + \frac{5a-3b}{a+b} + \cdots 12 \text{ உறுப்புகள்}\right]$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

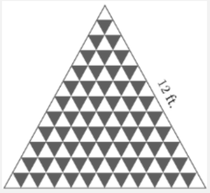
எ.கா.2.39: S_1, S_2 மற்றும் S_3 என்பன முறையே ஒரு கூட்டுத்தொடர்வரிசையின் முதல் n, $2n$, $3n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் ஆகும். $S_3 = 3(S_2 - S_1)$ என நிறுவுக. **(MDL)**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

9. ஒருவர் தான் பெற்ற ₹65,000 கடனை திருப்பிச் செலுத்த முதல் மாதம் ₹400 செலுத்துகிறார். அதன் பிறகு ஒவ்வொரு மாதமும் முந்தைய மாதம் செலுத்தியதைவிட ₹300 கூடுதலாகச் செலுத்துகிறார். அவர் இந்தக் கடனை அடைக்க எவ்வளவு காலம் தேவைப்படும்?

10. செங்கற்களினால் கட்டப்பட்ட ஒரு படிக்கட்டில் மொத்தம் 30 படிகட்டுகள் உள்ளன. கீழ்ப்படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு 100 செங்கற்கள் தேவைப்படுகிறது. அடுத்தடுத்த படிக்கட்டுகள் அமைப்பதற்கு முந்தைய படிக்கட்டை விட இரண்டு செங்கற்கள் குறைவாகத் தேவைப்படுகிறது.
   (i) உச்சியிலுள்ள படிக்கட்டை அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?
   (ii) படிக்கட்டுகள் முழுவதும் அமைப்பதற்கு எத்தனை செங்கற்கள் தேவை?



எ.கா.2.37: சிறிய தரையோடுகளைக் கொண்டு 12 அடி பக்க அளவுள்ள சமபக்க முக்கோண தரையோடுகள் (mosaic) அமைக்கப்படுகிறது. அவற்றில் உள்ள ஒவ்வொரு தரையோடும் 12 அங்குல அளவிலான சமபக்க முக்கோண வடிவில் உள்ளது. சிறிய தரையோடுகளின் வண்ணங்கள் படத்தில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளது போல மாறி மாறி உள்ளன. ஒவ்வொரு வண்ணத்திலும் உள்ள தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பில் உள்ள மொத்த தரையோடுகளின் எண்ணிக்கை காண்க.

எ.கா.2.38: ஒரு தெருவிலுள்ள வீடுகளுக்கு 1 முதல் 49 வரை தொடர்ச்சியாகக் கதவிலக்கம் வழங்கப்பட்டுள்ளது. செந்திலின் வீட்டிற்கு முன்னதாக உள்ள வீடுகளின் கதவிலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகையானது செந்திலின் வீட்டிற்குப் பின்னதாக உள்ள வீடுகளின் கதவிலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம் எனில் செந்திலின் வீட்டுக் கதவிலக்கத்தைக் காண்க. **(APR-23, PTA-2)**

பயிற்சி 2.7

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்? (2M)

(i) $3,9,27,81,\ldots$

$$a=3, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{9}{3}=3$$

$$r=\frac{t_3}{t_2}=\frac{27}{9}=3;\ r=\frac{t_4}{t_3}=\frac{81}{27}=3$$

$$\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{t_2}=\frac{t_4}{t_3}=r$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு **பெருக்குத்தொடர் வரிசையாகும்.**

(ii) $4,44,444,4444,\ldots$

$$r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{44}{4}=11$$

$$\frac{t_3}{t_2}=\frac{444}{44}=\frac{111}{11};\frac{t_4}{t_3}=\frac{4444}{444}=\frac{1111}{111}$$

$$\frac{t_2}{t_1}\neq\frac{t_3}{t_2}\neq\frac{t_4}{t_3}$$

∴ கொடுக்கப்பட்ட தொடர்வரிசை ஒரு **பெருக்குத்தொடர் வரிசை அல்ல.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M

1. பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்?
   (iii) $0.5,0.05,0.005,\ldots$ (iv) $\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\ldots.$ (v) $1,-5,25,-125,\ldots$ (vi) $120,60,30,18,\ldots$ (vii) $16,4,1,\frac{1}{4},\ldots$

எ.கா.2.40: பின்வரும் தொடர்வரிசைகளில் எவை பெருக்குத் தொடர்வரிசையாகும்?
   (i) $7, 14, 21, 28,\ldots\ldots\ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, 1, 2, 4,\ldots\ldots$ (iii) $5, 25, 50, 75,\ldots\ldots$

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு மற்றும் பொதுவிகிதம் உடைய பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.

(i) $a=6, r=3$ (2M)

பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகள் a, ar, ar^2

$$=6, 6(3), 6(3)^2=\mathbf{6,18,54}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் உறுப்பு மற்றும் பொதுவிகிதம் உடைய பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் முதல் மூன்று உறுப்புகளை எழுதுக.
   (ii) $a=\sqrt{2}, r=\sqrt{2}$ (iii) $a=1000, r=\frac{2}{5}$

எ.கா.2.41: பின்வருவனவற்றின் முதல் உறுப்பு மற்றும் பொது விகிதம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது, அதனுடைய பெருக்குத் தொடர்வரிசைகளைக் காண்க.
   (i) $a=-7,\ r=6$ **(PTA - 5)** (ii) $a=256,\ r=0.5$

3. $729, 243, 81,\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 7-வது உறுப்பைக் காண்க.

$729, 243, 81,\ldots$ ஆகியன பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன. (2M)

$$a=729,\ r=\frac{243}{729}=\frac{1}{3},\ n=7$$

$$t_n=ar^{n-1}$$

$$t_7=729\left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}=729\left(\frac{1}{3}\right)^6=729\left(\frac{1}{729}\right)$$

$$\mathbf{t_7=1}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2M

எ.கா.2.42: $9, 3, 1,\ldots\ldots$ என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 8 ஆவது உறுப்பைக் காண்க. **(JUN-23)**

CQ: $\frac{1}{4},-\frac{1}{2},1,-2\ldots,$ என்ற பெருக்குத் தொடர் வரிசையின் 10வது உறுப்பைக் காண்க. **(PTA - 4)**

4. $x+6, x+12$ மற்றும் $x+15$ என்பன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் தொடர்ச்சியான மூன்று உறுப்புகள் எனில், x-யின் மதிப்பைக் காண்க. APR-23 2M

$x+6, x+12, x+15$ ஆகியன பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ளன.

$\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{t_2} \Rightarrow \frac{x+12}{x+6}=\frac{x+15}{x+12}$

$(x+12)(x+12)=(x+15)(x+6)$

$x^2+12x+12x+144=x^2+6x+15x+90$

$x^2+24x+144=x^2+21x+90$

$x^2+24x-21x+144-90-x^2=0$

$3x+54=0$

$3x=-54$

$\boldsymbol{x=-18}$

5. பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. 2M

(i) $4, 8, 16, \dots, 8192$?

$a=4,$

$r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{8}{4}=2,$

$t_n=8192$

$t_n=ar^{n-1}$

$8192=4(2)^{n-1}$

$\frac{8192}{4}=(2)^{n-1}$

$2048=2^{n-1}$

$2^{11}=2^{n-1}$

$11=n-1$

$n=12$

$t_{12}=8192$

$\therefore$ 12 **உறுப்புகள்** உள்ளன.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

5 (ii). பின்வரும் பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{2187}$

6. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் 9-வது உறுப்பு 32805 மற்றும் 6-வது உறுப்பு 1215 எனில், 12-வது உறுப்பைக் காண்க. 5M

$t_9=32805,\ t_6=1215$

t_{12} ஐ காண வேண்டும்.

$t_n=a(r)^{n-1}$

$t_9=ar^{9-1}=ar^8=32805$ .....(1)

$t_6=ar^{6-1}=ar^5=1215$........(2)

$\frac{t_9}{t_6}=\frac{ar^8}{ar^5}=\frac{32805}{1215}$

$r^3=27 \Rightarrow \quad r=3$

$r=\mathbf{3}$ என (2) ல் பிரதியிட

$a(3)^5=1215$

$a=\frac{1215}{243}$

$a=5$

$t_{12}=a\,r^{12-1}=\mathbf{5(3^{11})}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 5M

எ.கா.2.43: ஒரு பெருக்குத்தொடர்வரிசையின் 4-வது உறுப்பு $\frac{8}{9}$ மற்றும் 7-வது உறுப்பு $\frac{64}{243}$ எனில், அந்தப் பெருக்குத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

அலகுப்பயிற்சி:

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் 2-வது உறுப்பு $\sqrt{6}$ மற்றும் 6-வது உறுப்பு $9\sqrt{6}$ எனில் அந்தத் தொடர்வரிசையைக் காண்க.

7. ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையின் 8-வது உறுப்பு 768 மற்றும் பொது விகிதம் 2 எனில், அதன் 10-வது உறுப்பைக் காண்க. 2M

கொடுக்கப்பட்டது**:** $t_8=768$ மற்றும் $r=2$

$ar^{8-1}=768 \qquad (\because t_n=ar^{n-1})$

$a(2)^7=768 \qquad (\because 2^7=128)$

$a=\frac{768}{128}$

$a=6$

$t_{10}=ar^{10-1}$

$=6(2)^9$

$=6(512)$

$\boldsymbol{t_{10}=3072}$

9. ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 27 மற்றும் அவைகளில் இரண்டிரண்டு உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலனின் கூடுதல் $\frac{57}{2}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க. 5M

$\frac{a}{r}, a, ar$ ஆகியன ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகள் என்க.

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 27$$

$$a^3 = 27$$

$$a = 3$$

மேலும்,

$$\frac{a}{r} \times a + a \times ar + ar \times \frac{a}{r} = \frac{57}{2}$$

$$a^2\left(\frac{1}{r} + r + 1\right) = \frac{57}{2}$$

$$(3)^2\left(\frac{1+r^2+r}{r}\right) = \frac{57}{2}$$

$$2\left(\frac{r^2+r+1}{r}\right) = \frac{57}{9} = \frac{19}{3}$$

$$6[r^2 + r + 1] = 19r$$

$$6r^2 + 6r - 19r + 6 = 0$$

$$6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$\left(r - \frac{3}{2}\right)\left(r - \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$r = \frac{3}{2}, \ r = \frac{2}{3}$$

இங்கு $a = 3, r = \frac{3}{2}$

$$\frac{3}{3/2}, 3, 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$2, \ 3, \frac{9}{2}$$

இங்கு $a = 3, r = \frac{2}{3}$

$$\frac{3}{2/3}, 3, 3\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{9}{2}, 3, 2$$

∴ மூன்று உறுப்புகள் $\mathbf{\frac{9}{2}, 3, 2}$, **(அ)** $\mathbf{2, 3, \frac{9}{2}}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.2.44: ஒரு பெருக்குத்தொடர்வரிசையின் அடுத்தடுத்த மூன்று உறுப்புகளின் பெருக்கற்பலன் 343 மற்றும் அவற்றின் கூடுதல் $\frac{91}{3}$ எனில், அந்த மூன்று உறுப்புகளைக் காண்க. 5M

10. ஒரு நபர் ஒரு நிறுவனத்தில் துணை மேலாளராகப் பணியில் சேர்கிறார். அவருக்கு அந்நிறுவனம் முதல் மாத ஊதியமாக ₹60,000 வழங்குகிறது மற்றும் ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5% வழங்குவதாக ஒப்புக்கொள்கிறது. 5 வருட முடிவில் அவருடைய மாத ஊதியம் எவ்வளவு? 5M PTA-6

அந்த நபரின் முதல் மாத ஊதியம் ₹ 60,000. ஆண்டு ஊதிய உயா்வு 5%

P = 60000, $r = 5\%, n = 5$ வருடங்கள்

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

$$= 60000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^5 = 60000\left(\frac{21}{20}\right)^5 = 60000\left(\frac{21\times21\times21\times21\times21}{20\times20\times20\times20\times20}\right) = \frac{12252303}{160} = 76576.89$$

$$A = ₹\,76577$$

5 வருட முடிவில் அவருடைய மாத ஊதியம் **₹ 76577**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

11. சிவமணி ஒரு பணிக்கான நேர்காணலில் பங்கேற்கிறார். அந்நிறுவனம் அவருக்கு இரண்டு விதமான வாய்ப்புகளை வழங்குகிறது.
வாய்ப்பு A: முதல் மாத ஊதியம் ₹20,000 மற்றும் நிச்சயமான 6% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு.
வாய்ப்பு B: முதல் மாத ஊதியம் ₹22,000 மற்றும் நிச்சயமான 3% ஆண்டு ஊதிய உயர்வு 5 ஆண்டுகளுக்கு. 5M
A மற்றும் B ஆகிய இரு வாய்ப்புகளிலும் அவருடைய 4-வது வருட ஊதியம் எவ்வளவு?

எ.கா.2.45: ஓர் இயந்திரத்தின் தற்போதைய மதிப்பு 40,000 மற்றும் ஒவ்வொரு வருடமும் அதன் மதிப்பு 10% குறைகிறது. 6-வது வருடத்தில் இயந்திரத்தின் தோராய மதிப்பைக் காண்க.

அலகுப்பயிற்சி: 10. ஒரு வாகனத்தின் மதிப்பு ஒவ்வோர் ஆண்டும் 15% குறைகிறது. வாகனத்தின் தற்போதைய மதிப்பு ₹ 45000 எனில், 3 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு வாகனத்தின் மதிப்பு என்ன?

12. **a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் உள்ள மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் மற்றும் x, y, z என்பன ஒரு பெருக்கு தொடர்வரிசையின் மூன்று அடுத்தடுத்த உறுப்புகள் எனில் $x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1$ என நிறுவுக.** (5M)

a, b, c ஆகியன ஒரு கூட்டுத்தொடர் வரிசையில் உள்ளன $\Rightarrow 2b = a + c$

x, y, z ஆகியன ஒரு பெருக்குத் தொடர் வரிசையில் அமைந்துள்ளன.

$$\frac{y}{x} = \frac{z}{y} = k$$

$$y^2 = xz \qquad \frac{y}{x} = k \qquad y = xk$$

$$\frac{z}{y} = k \qquad z = yk \qquad z = (xk)k \qquad z = xk^2$$

நிறுவ வேண்டியது: $x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1$

LHS : $x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b}$

$= x^{b-c} \times (xk)^{c-a} \times (xk^2)^{a-b}$

$= x^{b-c} \times x^{c-a} \times k^{c-a} \times x^{a-b} \times (k^2)^{a-b}$

$= x^{b-c+c-a+a-b} \times k^{c-a} \times k^{2a-2b}$

$= x^0\, k^{c-a+2a-2b}$

$= (1)k^{c+a-(c+a)}$

$= k^{c+a-c-a}$

$= k^0$

$= 1$:RHS

$\mathbf{x^{b-c} \times y^{c-a} \times z^{a-b} = 1}$ நிரூபிக்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

8. a, b, c என்பன ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனில் $3^a, 3^b, 3^c$ ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் அமையும் எனக் காட்டுக. (2M)

பயிற்சி 2.8

1. **பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க.** (5M)

(i) $5, -3, \frac{9}{5}, -\frac{27}{25}, \ldots.$

$a = 5, r = \frac{t_2}{t_1} = -\frac{3}{5}, r < 1$

$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

$= 5\left(\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}\right)$

$= 5\left(\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{5+3}{5}}\right) = 5 \times \frac{5}{8}\left(1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right) = \mathbf{\frac{25}{8}\left[1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right]}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க. (ii) $256, 64, 16, \ldots.$ (5M)
2. 5, 15, 45,… என்ற பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க. (5M)

எ.கா.2.46: $1, -3, 9, -27\ldots.$ என்ற பெருக்குத்தொடர்வரிசையின் முதல் 8 உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க. (2M)

3. **ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையின் பொது விகிதம் 5 மற்றும் முதல் 6 உறுப்புகளின் கூடுதல் 46872 எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க.** (5M)

$r = 5$ மற்றும் $S_6 = 46872$

$S_n = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right), r > 1$

$S_6 = a\left[\frac{5^6-1}{5-1}\right]$

$46872 = a\left[\frac{15625-1}{4}\right]$

$46872 = a\left(\frac{15624}{4}\right)$

$46872 = a(3906)$

$a = \frac{46872}{3906}$

$\mathbf{a = 12}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.2.47: (2M)
ஒரு பெருக்குத் தொடர்வரிசையில் $S_6 = 4095$ மற்றும் $r = 4$ எனில், அதன் முதல் உறுப்பைக் காண்க.

எ.கா.2.53: (5M)
ஒரு நபர் ஒவ்வோர் ஆண்டும் அதற்கு முந்தைய ஆண்டு சேமித்த தொகையில் பாதியைச் சேமிக்கிறார். 6 ஆண்டுகளில் அவர் ₹ 7875 -ஐச் சேமிக்கிறார் எனில், முதல் ஆண்டில் அவர் சேமித்த தொகை எவ்வளவு?

4. **பின்வரும் முடிவுறா தொடர்களின் கூடுதல் காண்க.** (2M)

(i) $9 + 3 + 1 + \cdots$

$S_\infty = \frac{a}{1-r}, -1 < r < 1$

$a = 9, r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{9}$

$S_\infty = \frac{9}{1-\frac{3}{9}} = \frac{9}{\frac{9-3}{9}} = 9 \times \frac{9}{6} = \mathbf{\frac{27}{2}}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

4. பின்வரும் முடிவுறா தொடர்களின் கூடுதல் காண்க. (ii) $21 + 14 + \frac{28}{3} + \cdots$
5. ஒரு முடிவுறா பெருக்குத் தொடரின் முதல் உறுப்பு 8 மற்றும் முடிவுறா உறுப்புகள் வரை கூடுதல் $\frac{32}{3}$ எனில் அதன் பொது விகிதம் காண்க.

எ.கா.2.49: $3 + 1 + \frac{1}{3} + \cdots \infty$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண்க.

6. பின்வரும் தொடர்களின் n உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க. (5M)

(i) $0.4+0.44+0.444+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் $0.4+0.44+0.444+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை

$=4(0.1+0.11+0.111+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை $)$

9 ஆல் பெருக்கி வகுக்க,

$=\frac{4}{9}[0.9+0.99+0.999+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை$]$

$=\frac{4}{9}[(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை $]$

$=\frac{4}{9}[(1+1+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை $)-(0.1+0.01+0.001+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை$)]$

$=\frac{4}{9}\left[(1+1+\cdots n \text{ உறுப்புகள் வரை })-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots n \text{ உறுப்புகள் வரை}\right)\right]$

$a=1, r=\frac{t_2}{t_1}=1$ $S_n=na$ $1+1+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை $=n(1)=n$	$a=\frac{1}{10}, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}}=\frac{1}{100}\times\frac{10}{1}=\frac{1}{10}\Rightarrow r=\frac{1}{10}$ $S_n=a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right), r<1$ $=\frac{1}{10}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right]$

$$=\frac{4}{9}\left[n-\frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{9}\left[n-\frac{1}{10}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{9}\left[n-\frac{1}{10}\times\frac{10}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\right]$$

$$\boldsymbol{S_n=\frac{4n}{9}-\frac{4}{81}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

6. பின்வரும் தொடரின் n உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.
(ii) $3+33+333+\cdots$ n உறுப்புகள் வரை **(JUN-23)**

எ.கா.2.48: $1+4+16+\cdots$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 1365 கிடைக்கும்?

எ.கா.2.51: $5+55+555+\ldots.$ என்ற தொடர்வரிசையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க. **(APR-23, PTA-4)**

7. $3+6+12+\cdots+1536$ என்ற பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் காண்க. (5M) PTA-3

$a=3, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{6}{3}=2, l=1536$

$t_n=ar^{n-1}$

$1536=3(2)^{n-1}$

$\frac{1536}{3}=2^{n-1}$

$512=2^{n-1}$

$2^9=2^{n-1}$

$9=n-1$

$n=10$

$S_n=a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right], r>1$

$S_{10}=3\left[\frac{2^{10}-1}{2-1}\right]$

$S_{10}=3(1024-1)$

$=3(1023)$

$=\mathbf{3069}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

எ.கா.2.50: $0.6666\ldots.$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க.

8. குமார் தனது நான்கு நண்பர்களுக்கு கடிதம் எழுதுகிறார். மேலும் தனது நண்பர்களை அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் நான்கு வெவ்வேறு நண்பர்களுக்குக் கடிதம் எழுதுமாறும் மற்றும் இந்தச் செயல்முறையைத் தொடருமாறும் கூறுகிறார். இந்தச் செயல்முறை தொடர்ச்சியாக நடைபெறுகின்றது. ஒரு கடிதத்திற்கான செலவு ₹2 எனில் 8 நிலைகள் வரை கடிதங்கள் அனுப்புவதற்கு ஆகும் மொத்தச் செலவைக் காண்க. (5M)

கொடுக்கப்பட்டது: குமார் தனது நான்கு நண்பர்களுக்கு கடிதம் எழுகிறார். மேலும் தனது நண்பர்களை அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் நான்கு வெவ்வேறு நண்பர்களுக்குக் கடிதம் எழுதுமாறும் மற்றும் இந்தச் செயல்முறையைத் தொடருமாறும் கூறுகிறார்.

$4+16+64+\cdots$ இது ஒரு பெருக்குத்தொடர் வரிசையில் அமைகிறது.

$a=4, r=\frac{t_2}{t_1}=\frac{16}{4}=4\ ,\ n=8$

$S_n=a\left[\frac{r^n-1}{r-1}\right], r>1$

$S_8=4\left[\frac{(4)^8-1}{4-1}\right]=4\left[\frac{65536-1}{3}\right]$

$=4\left[\frac{65535}{3}\right]=4[21845]$

$=87380$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(5M) **எ.கா.2.52:** $1+6+6^2+\cdots+6^n>5000$ என்றவாறு அமையும் மிகச் சிறிய மிகை முழு எண் n காண்க.

CQ: ஒரு நிறுவனம் 25 தெருக்களில் செடிகளை நட திட்டமிட்டது. முதல் தெருவில் 1 செடியும், இரண்டாவது தெருவில் 3 செடியும், மூன்றாவது தெருவில் 9 செடியும் நட முடிவு செய்யப்பட்டது. இவ்வேலை நிறைவடைய எத்தனை செடிகள் தேவை? **(MDL, PTA - 1)** (2M)

∴8 நிலைகள் வரை 87380 கடிதங்களை அனுப்பவேண்டும்.

ஒரு கடிதத்திற்கான செலவு ₹2 மொத்த செலவு $=2\times 87380=$ **₹174760**

9. $0.\overline{123}$ என்ற எண்ணின் விகிதமுறு வடிவம் காண்க. (5M)

$0.\overline{123}=0.123123123\ldots$

$=0.123+0.000123+0.000000123+\cdots$

$=\frac{123}{1000}+\frac{123}{1000000}+\frac{123}{1000000000}+\cdots$

$=\frac{123}{1000}\left[1+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000000}+\cdots\right]$

$1+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000000}+\cdots$ ஒரு முடிவுறாத் தொடராகும்.

$S_n=\frac{a}{1-r}, a=1, r=\frac{1}{1000}$

$0.\overline{123}=\frac{123}{1000}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}\right]$

$=\frac{123}{1000}\left[\frac{1}{\frac{1000-1}{1000}}\right]=\frac{123}{1000}\left(\frac{1000}{999}\right)$

$=\frac{123}{999}$

$0.\overline{123}=\frac{41}{333}$

10. $S_n=(x+y)+(x^2+xy+y^2)+(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை எனில் $(x-y)S_n=\left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1}-\frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$ என நிறுவுக. (5M) PTA-1

கொடுக்கப்பட்டது: $S_n=(x+y)+(x^2+xy+y^2)+(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை

$(x-y)$ ஆல் பெருக்க

$(x-y)S_n=[(x-y)(x+y)+(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+\cdots+n$

$=[(x^2-y^2)+(x^3-y^3)+(x^4-y^4)+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை $]$

$(x-y)S_n=[(x^2+x^3+x^4+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை $)-(y^2+y^3+y^4+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை $)]$

$x^2+x^3+x^4+\cdots+n$ உறுப்புகள் வரை

இங்கு $a=x^2, r=\frac{x^3}{x^2}=x$

$y^2+y^3+y^4+\cdots n$ உறுப்புகள் வரை

இங்கு $a=y^2, r=\frac{y^3}{y}=y$

$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$(x-y)S_n=\left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1}\right]-\left[\frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$

$(x-y)S_n=\left[\frac{x^2(x^n-1)}{x-1}-\frac{y^2(y^n-1)}{y-1}\right]$ எனவே, நிரூபிக்கப்பட்டது.

பயிற்சி 2.9

1. பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க. (2M)

(i) $1+2+3+\cdots+60$

இங்கு $n=60$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$1+2+3+\cdots+60=\frac{60(60+1)}{2}$

$=30(61)$

$=\mathbf{1830}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க.
(ii) $3+6+9+\cdots+96$ (2M) (iii) $51+52+53+..+92$ (5M)

எ.கா.2.54: மதிப்பு காண்க. (i) $1+2+3+\cdots+50$ (2M)
(ii) $16+17+18+\cdots+75$

எ.கா.2.55: கூடுதல் காண்க.
(i) $1+3+5+\cdots$ 40 உறுப்புகள் வரை (2M)
(ii) $2+4+6+\cdots+80$
(iii) $1+3+5+\cdots+55$ **(PTA-6)**

1. (iv) $1+4+9+16+\cdots+225$ (2M)

$=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+15^2$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$n=15$$

$=\frac{15(15+1)(2\times15+1)}{6}$

$=\frac{5(16)(31)}{2}$

$=\mathbf{1240}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. பின்வரும் தொடர்களின் கூடுதலைக் காண்க. (2M)
(v) $6^2+7^2+8^2+\cdots+21^2$

எ.கா. 2.56: கூடுதல் காண்க.
(i) $1^2+2^2+\cdots+19^2$
(ii) $5^2+10^2+15^2+\cdots+105^2$
(iii) $15^2+16^2+17^2+\cdots+28^2$

CQ: $1^2+2^2+3^2+\cdots10^2$-ன் மதிப்பு காண்க. இதிலிருந்து $2^2+4^2+6^2+\cdots+20^2$ -ன் மதிப்பு காண்க. **(SEP - 20)**

(vi) $10^3+11^3+12^3+\cdots+20^3$ PTA-5 (5M)

$=(1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3)-(1^3+2^3+\cdots+9^3)$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$=\left[\frac{20(20+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{9(9+1)}{2}\right]^2$

$=\left[\frac{20(21)}{2}\right]^2-\left[\frac{9(10)}{2}\right]^2$

$=[10(21)]^2-[9(5)]^2$

$=(210)^2-(45)^2$

$=44100-2025$

$=\mathbf{42075}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

எ.கா.2.57: கூடுதல் காண்க.
(i) $1^3+2^3+3^3+\cdots+16^3$
(ii) $9^3+10^3+\cdots+21^3$

(vii) $1+3+5+\cdots+71$ (5M)

முதல் n ஒற்றை இயல் எண்களின் கூடுதல் $=n^2$

$a=1, d=3-1=2, l=71$

$n=\frac{l-a}{d}+1$

$=\frac{71-1}{2}+1$

$=\frac{70}{2}+1=35+1$

$n=36$

$S_n=n^2$

$S_{36}=(36)^2=\mathbf{1296}$

2. $\mathbf{1+2+3+\cdots+k=325}$, எனில் $\mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3}$ யின் மதிப்பு காண்க. (2M)

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}=325$$

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2=(325)^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\mathbf{105625}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா.2.58: $1+2+3+\cdots+n=666$ எனில், n யின் மதிப்பு காண்க. **(PTA-2)**
CQ: $1^3+2^3+3^3+\cdots k^3=16900$ எனில் $1+2+3+\cdots+k$ ன் மதிப்பு காண்க. **(PTA-3)**

3. $\mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=44100}$ எனில், $\mathbf{1+2+3+4+\cdots+k}$ யின் மதிப்பு காண்க. (2M)

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2=44100$$

$$\frac{k(k+1)}{2}=\sqrt{44100}$$

$$1+2+3+4+\cdots+k=\sqrt{(210)^2}$$

$$=\mathbf{210}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

4. $\mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots}$ என்ற தொடரின் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் கூடுதல் 14400 கிடைக்கும் ? (2M)

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=14400$$

n ஐக் காண வேண்டும்.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=14400$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=14400$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=\sqrt{14400}$$

$$n^2+n=2\left(\sqrt{120^2}\right)$$

$$n^2+n=240$$

$$n^2+n-240=0$$

$$(n+16)(n-15)=0$$

$n=-16$ அல்லது $n=15$

$n=-16$ என்பது ஏற்புடையதல்ல

$\therefore \boldsymbol{n=15}$

5. முதல் $\boldsymbol{n}$ இயல் எண்களின் கணங்களின் கூடுதல் 2025 எனில் $\boldsymbol{n}$ –யின் மதிப்பு காண்க. (5M)

கொடுக்கப்பட்டது**:** முதல் n இயல் எண்களின் கணங்களின் கூடுதல்

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=2025$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=2025$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=\sqrt{2025}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=45 \quad \text{..............(1)}$$

$$n(n+1)=90$$

$$n^2+n-90=0$$

$$(n+10)(n-9)=0$$

$n=-10$ or $n=9$

$\therefore \boldsymbol{n=9}$ ($n=-10$ ஆனது சாத்தியமற்றது)

6. **ரேகாவிடம் 10 செ.மீ, 11 செ.மீ, 12 செ.மீ ,…, 24 செ.மீ என்ற பக்க அளவுள்ள 15 சதுர வடிவ வண்ணக் காகிதங்கள் உள்ளன. இந்த வண்ணக் காகிதங்களைக் கொண்டு எவ்வளவு பரப்பை அடைத்து அலங்கரிக்க முடியும்?**

JUN-23,PTA-1

5M

சதுரத்தின் பரப்பளவு $= a^2$

வண்ணக் காகிதங்களால் அலங்கரிக்கப்பட்ட பகுதியின் பரப்பு

$= 10^2 + 11^2 + 12^2 + \cdots + 24^2$

$= (1^2 + 2^2 + \cdots + 24^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$= \frac{24(24+1)(24\times2+1)}{6} - \frac{9(9+1)(2\times9+1)}{6}$

$= 4(25)(49) - 3(5)(19)$

$= 4900 - 285$

$= \mathbf{4615}$ செ.மீ^{2}

7. $\mathbf{(2^3 - 1) + (4^3 - 3^3) + (6^3 - 5^3) + \cdots}$ **என்ற தொடர்வரிசையின்** 5M

(i) $\boldsymbol{n}$ உறுப்புகள் வரை **(ii) 8 உறுப்புகள் வரை கூடுதல் காண்க.**

கொடுக்கப்பட்டது: $(2^3 - 1^3) + (4^3 - 3^3) + (6^3 - 5^3) + \cdots$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

(i) n உறுப்புகள் வரை

$(2^3 - 1^3) + (4^3 - 3^3) + (6^3 - 5^3) + \cdots n$ உறுப்புகள் வரை

$= \Sigma[(2n)^3 - (2n-1)^3] \;\Rightarrow\; a = 2n,\; b = 2n - 1$

$= \Sigma([2n - (2n-1)][(2n)^2 + (2n)(2n-1) + (2n-1)^2])$

$= \Sigma([2n - 2n + 1][4n^2 + 4n^2 - 2n + 4n^2 - 4n + 1])$

$= \Sigma(12n^2 - 6n + 1)$

$= 12\Sigma n^2 - 6\Sigma n + \Sigma(1)$ [$\because \Sigma(1) = 1 + 1 + 1 \ldots$ n உறுப்புகள் வரை $= n$]

$= 12\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - 6\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n$

$= 2(n^2 + n)(2n+1) - 3n^2 - 3n + n$

$= 2(2n^3 + n^2 + 2n^2 + n) - 3n^2 - 2n$

$= 4n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 2n - 3n^2 - 2n$

$= \mathbf{4n^3 + 3n^2}$

(ii) 8 உறுப்புகள் வரை

$S_n = 4n^3 + 3n^2 = 4(8)^3 + 3(8)^2$

$= 4(512) + 3(64)$

$= 2048 + 192$

$= \mathbf{2240}$

அலகுப்பயிற்சிக்கான குறிப்பு

வினா எண்: 1 – பயிற்சி 2.1 ல் - 3 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 2 – பயிற்சி 2.1 ல் - 2 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 3 – பயிற்சி 2.1 ல் - 4 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 4 – பயிற்சி 2.1 ல் - 2 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 5 – பயிற்சி 2.5 ல் - 7 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 6 – பயிற்சி 2.5 ல் - 4 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 7 – பயிற்சி 2.5 ல் - 7 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 8 – பயிற்சி 2.6 ல் - 8 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 9 – பயிற்சி 2.7 ல் - 6 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 10 – பயிற்சி 2.7 ல் - 10 ஆம் வினா போன்றது.

3. இயற்கணிதம்

பயிற்சி 3.1

1. கீழ்க்காணும் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த ஒருங்கமை நேரியல் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளைத் தீர்க்க. 5M

(i) $x+y+z=5;\ 2x-y+z=9;\ x-2y+3z=16$ SEP-21, PTA-5

$x+y+z=5$ .... (1)

$2x-y+z=9$ .... (2)

$x-2y+3z=16$ .... (3)

(1) மற்றும் (2)-ஐ கூட்ட

(1)⇒ $x+y+z=5$

(2)⇒ $2x-y+z=9$

$3x+2z=14$ .... (4)

$(2)\times 2 \Rightarrow 4x-2y+2z=18$

(3) ⇒ $x-2y+3z=16$

(−) (+) (−) (−)

$3x-z=2$ .... (5)

(4) ⇒ $3x+2z=14$

(5) ⇒ $3x-z=2$

(−) (+) (−)

$3z=12$

$3z=12$

$z=\frac{12}{3}=4$

$z=4$ என (5)-ல் பிரதியிட

$3x-z=2$

$3x-4=2$

$3x=2+4$

$3x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{3} \Rightarrow x=2$

$x=2, z=4$ என (1)-ல் பிரதியிட

$x+y+z=5$

$2+y+4=5$

$y=5-2-4$

$y=5-6$

$y=-1$

∴ $\boldsymbol{x=2, y=-1, z=4}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(ii) $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}+4=0;\ \frac{1}{y}-\frac{1}{z}+1=0;\ \frac{2}{z}+\frac{3}{x}=14$

$\frac{1}{x}=a,\ \frac{1}{y}=b,\ \frac{1}{z}=c$ என்க.

$a-2b+4=0$ .... (1)

$b-c+1=0$ .... (2)

$2c+3a-14=0$ .... (3)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து

(1) ⇒ $a-2b+0c+4=0$

$(2)\times 2 \Rightarrow 2b-2c+2=0$

$a-2c+6=0$

$a-2c+6=0$.......... (4)

(4) ⇒ $a-2c+6=0$

(3) ⇒ $3a+2c-14=0$

$4a-8=0$

$4a=8 \Rightarrow a=\frac{8}{4}=2$

$a=2$ என (4)-ல் பிரதியிட

$a-2c+6=0$

$2-2c+6=0$

$-2c+8=0$

$-2c=-8$

$c=\frac{-8}{-2}=4$

$c=4$ என (2)-ல் பிரதியிட

$b-c+1=0$

$b-4+1=0$

$b-3=0$

$b=3$

∴ இங்கு $x=\frac{1}{a} \Rightarrow \boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$

$y=\frac{1}{b} \Rightarrow \boldsymbol{y=\frac{1}{3}}$

$z=\frac{1}{c} \Rightarrow \boldsymbol{z=\frac{1}{4}}$

2M

எ.கா.3.2: தீர்க்க $2x-3y=6,\ x+y=1$

எ.கா.3.3: பின்வரும் மூன்று மாறிகளில் அமைந்த நேரிய சமன்பாட்டு **(JUN-23)** 5M
தொகுப்பினைத் தீர்க்க. $3x-2y+z=2,\ 2x+3y-z=5,\ x+y+z=6.$

CQ: தீர்க்க: $6x+2y-5z=13, 3x+3y-2z=13, 7x+5y-3z=26$ **(SEP – 20)** 5M

CQ: தீர்க்க: $2x+y+4z=15, x-2y+3z=13, 3x+y-z=2$ **(PTA – 1)** 5M

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.8:
தீர்க்க $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4y}-\frac{1}{3z}=\frac{1}{4};\ \frac{1}{x}=\frac{1}{3y};$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{5y}+\frac{4}{z}=2\frac{2}{15}$ 5M

(iii) $\boldsymbol{x+20=\frac{3y}{2}+10=2z+5=110-(y+z)}$

5M

APR - 23

$x+20=\frac{3y}{2}+10$

$x-\frac{3y}{2}=10-20$

$2x-3y=2(-10)$

$2x-3y=-20\ \ldots(1)$

$\frac{3y}{2}+10=2z+5$

$\frac{3y}{2}-2z=5-10$

$3y-4z=2(-5)$

$3y-4z=-10\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$

$2z+5=110-(y+z)$

$2z+y+z=110-5$

$y+3z=105\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$

$(2)\quad\Rightarrow 3y-4z=-10$

$(3)\times 3\Rightarrow 3y+9z=315$

$(-)\ (-)\quad(-)$

$-13z=-325$

$z=-\frac{325}{-13}=25$

$z=25$ என (3)-ல் பிரதியிட

$y+3z=105$

$y+3(25)=105$

$y+75=105$

$y=105-75$

$y=30$

$y=30$ என (1)-ல் பிரதியிட

$2x-3(30)=-20$

$2x-90=-20$

$2x=-20+90$

$2x=70$

$2x=\frac{70}{2}$

$x=35$

$\therefore \boldsymbol{x=35; y=30; z=25}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.7: தீர்க்க $\frac{x}{2}-1=\frac{y}{6}+1=\frac{z}{7}+2;\ \frac{y}{3}+\frac{z}{2}=13$ 5M

அலகுப்பயிற்சி:

1. தீர்க்க: $\frac{1}{3}(x+y-5)=y-z=2x-11=9-(x+2z)$

2. கீழ்க்காணும் சமன்பாட்டுத் தொகுப்புகளின் தீர்வுகளின் தன்மையைக் காண்க. 5M

(i) $\boldsymbol{x+2y-z=6;\ -3x-2y+5z=-12;}$
$\boldsymbol{x-2z=3}$

$x+2y-z=6\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$

$-3x-2y+5z=-12\ \ldots\ldots\ (2)$

$x-2z=3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$

$(1)+(2)\Rightarrow$

$(1)\Rightarrow\ x+2y-z=6$

$(2)\Rightarrow -3x-2y+5z=-12$

$-2x\quad +4z=-6$

$\div 2,\quad -x+2z=-3\ldots\ldots\ (4)$

$(3)\Rightarrow x-2z=3$

$(4)\Rightarrow -x+2z=-3$

$0=0$

இங்கு $0=0$. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு **எண்ணற்ற தீர்வுகள்** உண்டு.

(ii) $\boldsymbol{2y+z=3(-x+1);\ -x+3y-z=-4;}$
$\boldsymbol{3x+2y+z=-\frac{1}{2}}$

$2y+z=3(-x+1)\Rightarrow 2y+z=-3x+3$

$3x+2y+z=3\ \ldots\ldots\ (1)$

$-x+3y-z=-4\ \ldots\ (2)$

$3x+2y+z=-\frac{1}{2}\ \ldots\ldots(3)$

$(1)+(2)\Rightarrow$

$(1)\Rightarrow\ 3x+2y+z=3$

$(2)\Rightarrow\ -x+3y-z=-4$

$2x+5y\quad=-1\ \ldots\ (4)$

$2\times(2)\Rightarrow -2x+6y-2z=-8\ \ldots\ (2)$

$(3)\Rightarrow\ 6x+4y+2z=-1\ \ldots\ (3)$

$4x+10y\quad=-9$

$\div 2,\quad 2x+5y=-\frac{9}{2}\ \ldots\ldots(5)$

$(4)-(5)\Rightarrow$

$(4)\Rightarrow 2x+5y=-1$

$(5)\Rightarrow 2x+5y=-\frac{9}{2}\ \ldots\ldots\ (5)$

$(-)\ (-)\quad(+)$

$0=-1-\frac{9}{2}$

$0=\frac{-2+9}{2}\Rightarrow 0=\frac{7}{2}$

இங்கு $0\neq\frac{7}{2}$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது. சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு **தீர்வுகள் இல்லை.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.5: தீர்க்க $x+2y-z=5;\ x-y+z=-2;$
$-5x-4y+z=-11$ 5M

எ.கா.3.6: தீர்க்க: $3x+y-3z=1;\ -2x-y+2z=1;$
$-x-y+z=2.$

(iii) $\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{3}=\frac{x+y}{2};x+y+z=27$

$$\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{3}=\frac{x+y}{2};x+y+z=27$$

$\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{3}$

$3y+3z=4z+4x$

$4x-3y+4z-3z=0$

$4x-3y+z=0$ …….. (1)

$\frac{z+x}{3}=\frac{x+y}{2}$

$2z+2x=3x+3y$

$3x-2x+3y-2z=0$

$x+3y-2z=0$ …… (2)

$x+y+z=27$ ……….. (3)

$(1)+(2)\Rightarrow$

$(1)\Rightarrow 4x-3y+z=0$

$(2)\Rightarrow x+3y-2z=0$

$5x-z=0$ ……. (4)

$(2)\Rightarrow x+3y-2z=0$

$3\times(3)\Rightarrow 3x+3y+3z=81$

(−) (−) (−) (−)

$-2x-5z=-81$ …… (5)

$(4)\times 5\Rightarrow 25x-5z=0$

$(5)\Rightarrow -2x-5z=-81$

(+) (+) (+)

$27x=81$

$x=\frac{81}{27}=3$

$x=3$ என (4)-ல் பிரதியிட $z=15$

$x=3,z=15$ என (1)-ல் பிரதியிட $y=9$

எனவே **கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டு தொகுப்பிற்கு ஒரே ஒரு தீர்வு உண்டு.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.1: தந்தையின் வயதானது மகனின் வயதைப் போல ஆறு மடங்கு ஆகும். ஆறு வருடங்களுக்குப் பிறகு தந்தையின் வயதானது மகனின் வயதைப்போல் நான்கு மடங்கு அதிகம். தந்தை மற்றும் மகனின் தற்போதைய வயதை (வருடங்களில்) காண்க. (2M)

எ.கா.3.9: முதல் எண்ணின் மும்மடங்கு, இரண்டாம் எண் மற்றும் மூன்றாம் எண்ணின் இரு மடங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதல் 5. முதல் எண் மற்றும் மூன்றாம் எண்ணின் மும்மடங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதலிலிருந்து இரண்டாம் எண்ணின் மும்மடங்கைக் கழிக்க நாம் பெறுவது 2. முதல் எண்ணின் இரு மடங்கு மற்றும் இரண்டாம் எண்ணின் மும்மடங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதலிலிருந்து மூன்றாம் எண்ணைக் கழிக்க நாம் பெறுவது 1. இவ்வாறு அமைந்த மூன்று எண்களைக் காண்க. (5M)

3. தாத்தா, தந்தை மற்றும் வாணி ஆகிய மூவரின் சராசரி வயது 53. தாத்தாவின் வயதில் பாதி, தந்தையின் வயதில் மூன்றில் ஒரு பங்கு மற்றும் வாணியின் வயதில் நான்கில் ஒரு பங்கு ஆகியவற்றின் கூடுதல் 65. நான்கு ஆண்டுகளுக்கு முன் தாத்தாவின் வயது வாணியின் வயதைபோல் நான்கு மடங்கு எனில் மூவரின் தற்போதைய வயதைக் காண்க. PTA-2 (5M)

வாணியின் வயது $=x$

அவளது தந்தையின் வயது $=y$

அவளது தாத்தாவின் வயது $=z$

சராசரி வயது $=53$

$\frac{x+y+z}{3}=53$

$x+y+z=53\times 3$

$x+y+z=159$…… (1)

இங்கு $\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}x=65$

$3x+4y+6z=780$ …… (2)

நான்கு வருடங்களுக்கு முன்பு

வாணியின் வயது $=x-4$

அவளது தந்தையின் வயது $=y-4$

அவளது தாத்தாவின் வயது $=z-4$

$z-4=4(x-4)$

$z-4=4x-16$

$4x-z-12=0$

$4x-z=12$…… (3)

$(1)\times 4\Rightarrow 4x+4y+4z=636$

$(2)\Rightarrow 3x+4y+6z=780$

(−) (−) (−) (−)

$x-2z=-144$ ………… (4)

$(3)\times 2\Rightarrow 8x-2z=24$

$(4)\times 1\Rightarrow x-2z=-144$

(−) (+) (+)

$7x=168$

$x=\frac{168}{7}=24$

$x=24$ என (5)-ல் பிரதியிட

$4x-z=12$

$4(24)-z=12$

$-z=12-96$

$-z=-84\Rightarrow z=84$

$x=24;\ z=84$ என (1) ல் பிரதியிட

$x+y+z=159$

$24+y+84=159$

$y+108=159$

$y=159-108$

$y=51$

∴ **வாணியின் வயது $=24$**

அவளது தந்தையின் வயது $=51$

அவளது தாத்தாவின் வயது $=84$

4. ஒரு மூவிலக்க எண்ணில், இலக்கங்களின் கூடுதல் 11. இலக்கங்களை இடமிருந்து வலமாக வரிசை மாற்றினால் புதிய எண் பழைய எண்ணின் ஐந்து மடங்கைவிட 46 அதிகம். பத்தாம் இட இலக்கத்தின் இரு மடங்கோடு நூறாம் இட இலக்கத்தைக் கூட்டினால் ஒன்றாம் இட இலக்கம் கிடைக்கும் எனில், அந்த மூவிலக்க எண்ணைக் காண்க. (5M)

மூவிலக்க எண் $= 100x + 10y + z$

(1ஆம் இலக்கம் $= z$, 10ஆம் இலக்கம் $= y$, 100ஆம் இலக்கம் $= x$)

இலக்கங்களின் கூடுதல் $= 11, x + y + z = 11 \ldots (1)$

இலக்கங்களை இடமிருந்து வலமாக வரிசை மாற்றினால் புதிய எண் $= 100z + 10y + x$

$$100z + 10y + x = 5[100x + 10y + z] + 46$$
$$100z + 10y + x = 500x + 50y + 5z + 46$$
$$499x + 40y - 95z = -46 \ldots\ldots (2)$$
$$x + 2y = z \Rightarrow x + 2y - z = 0 \ldots\ldots (3)$$

$(1) + (3) \Rightarrow$

$(1) \Rightarrow x + y + z = 11$

$(3) \Rightarrow x + 2y - z = 0$

$2x + 3y = 11 \ldots\ldots (4)$

$(1) \times 95 \Rightarrow 95x + 95y + 95z = 1045$

$(2) \Rightarrow 499x + 40y - 95z = -46$

$594x + 135y = 999 \ldots\ldots (5)$

$(5) \Rightarrow 594x + 135y = 999$

$(4) \times 45 \Rightarrow 90x + 135y = 495$

$(-) \quad (-) \quad (-)$

$504x = 504$

$$x = \frac{504}{504} = 1$$

$x = 1$ என (4)-ல் பிரதியிட

$2x + 3y = 11$

$2(1) + 3y = 11$

$3y = 11 - 2$

$y = \frac{9}{3} = 3$

$x = 1, y = 3,$ என (1)-ல் பிரதியிட

$x + y + z = 11$

$1 + 3 + z = 11$

$4 + z = 11$

$z = 11 - 4 = 7$

$\therefore$ தேவையான எண் $= 100x + 10y + z$

$= 100(1) + 10(3) + 7 = 100 + 30 + 7 = \mathbf{137}$

5. ஐந்து, பத்து மற்றும் இருபது ரூபாய் நோட்டுகளின் மொத்த மதிப்பு ₹105 மற்றும் மொத்த நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை 12. முதல் இரண்டு வகை நோட்டுகளின் எண்ணிக்கையை இடமாற்றம் செய்தால் முந்தைய மதிப்பை விட ₹20 அதிகரிக்கிறது எனில், எத்தனை ஐந்து, பத்து மற்றும் இருபது ரூபாய் நோட்டுகள் உள்ளன? (5M)

5 ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= x$

10 ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= y$

20 ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= z$

$x + y + z = 12 \ldots (1)$, மொத்த மதிப்பு $= 105$

$5x + 10y + 20z = 105$

$\div 5 \quad x + 2y + 4z = 21 \ldots\ldots (2)$

முதல் இரண்டு வகை நோட்டுகளின் எண்ணிக்கையை இடமாற்றம் செய்ய

$10x + 5y + 20z = 105 + 20$

$10x + 5y + 20z = 125$

$\div 5 \quad 2x + y + 4z = 25 \ldots\ldots (3)$

$(2) \Rightarrow x + 2y + 4z = 21$

$(3) \Rightarrow 2x + y + 4z = 25$

$(-) \quad (-) \quad (-) \quad (-)$

$-x + y = -4$

$\times (-1) \quad x - y = 4 \ldots\ldots (4)$

$(1) \times (4) \Rightarrow 4x + 4y + 4z = 48$

$(2) \Rightarrow x + 2y + 4z = 21$

$(-) \quad (-) \quad (-) \quad (-)$

$3x + 2y = 27 \ldots\ldots (5)$

$(5) \Rightarrow 3x + 2y = 27$

$(4) \times (3) \Rightarrow 3x - 3y = 12$

$(-) \quad (+) \quad (-)$

$5y = 15$

$$y = \frac{15}{5} = 3$$

$y = 3$ என (4)-ல் பிரதியிட

$x - y = 4$

$x - 3 = 4$

$x = 4 + 3 = 7$

$x = 7;\ y = 3$ என (1)-ல் பிரதியிட

$x + y + z = 12$

$7 + 3 + z = 12$

$z = 12 - 10 = 2$

$\therefore$ 5 ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 7$

10 ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 3$

20 ரூபாய் நோட்டுகளின் எண்ணிக்கை $= 2$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.4: பள்ளிகளுக்கிடையேயான ஒரு தடகளப் போட்டியில், மொத்த பரிசுகள் 24 கொண்ட தனிநபர் போட்டிகளில் ஒட்டுமொத்தமாக 56 புள்ளிகள் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது. முதலிடம் பெறுபவருக்கு 5 புள்ளிகளும், இரண்டாமிடம் பெறுபவருக்கு 3 புள்ளிகளும், மூன்றாமிடம் பெறுபவருக்கு 1 புள்ளியும் அளிக்கப்படும். மூன்றாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கை முதல் மற்றும் இரண்டாம் இடங்களைப் பிடித்தவர்களின் எண்ணிக்கையின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், முதல், இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாமிடம் பெற்றவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (5M)

அலகுப்பயிற்சி: 2. ஒரு பள்ளியில் A, B மற்றும் C என்ற மூன்று பிரிவுகளில் 150 மாணவர்கள் புதிதாகச் சேர்க்கப்படுகின்றனர். பிரிவு A-யிலிருந்து பிரிவு C-க்கு 6 மாணவர்கள் மாற்றப்பட்டால், இரு பிரிவுகளிலும் சமமான மாணவர்கள் இருப்பர். C பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கையின் 4 மடங்கு மற்றும் A பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கை இவற்றின் வித்தியாசம் B பிரிவு மாணவர்களின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம் எனில், மூன்று பிரிவுகளில் உள்ள மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப்பயிற்சி: 3. ஒரு மூன்றிலக்க எண்ணின், பத்தாம் இட மற்றும் நூறாம் இட இலக்கங்களை இடமாற்றுவதன் மூலம் கிடைக்கும் புதிய எண், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணின் மும்மடங்கைவிட 54 அதிகம். கொடுக்கப்பட்ட எண்ணோடு 198-ஐ கூட்டினால் இலக்கங்கள் இட-வலப்பக்கமாக வரிசை மாறும். ஒன்றாம் இட இலக்கத்தைவிட அதிகமுள்ள பத்தாம் இட இலக்கத்தின் இரு மடங்கு, நூறாம் இட இலக்கத்தை விட அதிகமுள்ள பத்தாம் இட இலக்கத்திற்குச் சமம் எனில், கொடுக்கப்பட்ட எண்ணைக் காண்க. (5M)

பயிற்சி 3.2

1. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பெ.வ காண்க. (i) $x^4+3x^3-x-3, x^3+x^2-5x+3$ 5M SEP-20

$f(x) = x^4+3x^3-x-3,\ g(x) = x^3+x^2-5x+3$

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ x^3+x^2-5x+3 & x^4+3x^3-0x^2-x-3 \\ & x^4+x^3-5x^2+3x \\ & (-)\ (-)\ (+)\ (-) \\ & 2x^3+5x^2-4x-3 \\ & 2x^3+2x^2-10x+6 \\ & (-)\ (-)\ (+)\ (-) \\ & 3x^2+6x-9 \\ & 3[x^2+2x-3] \end{array}$$

$3[x^2+2x-3] \neq 0$ இங்கு 3 என்பது $g(x)$ ன் வகுத்தி அல்ல.

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ x^2+2x-3 & x^3+x^2-5x+3 \\ & x^3+2x^2-3x \\ & (-)\ (-)\ (+) \\ & -x^2-2x+3 \\ & -x^2-2x+3 \\ & (+)\ (+)\ (-) \\ & 0 \end{array}$$

$\therefore f(x)$ & $g(x)$ ஆகியவற்றின் மீ.பெ.வ $\mathbf{x^2+2x-3}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பெ.வ காண்க. 5M
   (ii) x^4-1, x^3-11x^2+x-11
   (iii) $3x^4+6x^3-12x^2-24x$, $4x^4+14x^3+8x^2-8x$
   (iv) $3x^3+3x^2+3x+3, 6x^3+12x^2+6x+12$

அலகுப்பயிற்சி: 5. வகுத்தல் படிமுறையைப் பயன்படுத்தி $2x^4+13x^3+27x^2+23x+7,\ x^3+3x^2+3x+1,\ x^2+2x+1$ ஆகியவற்றின் மீ.பெ.வ. காண்க.

எ.கா. 3.10: x^3+x^2-x+2 & $2x^3-5x^2+5x-3$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பெ.வ காண்க.

எ.கா. 3.11: $6x^3-30x^2+60x-48$, $3x^3-12x^2+21x-18$ ஆகிய பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.பெ.வ காண்க.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. பின்வருவனவற்றிற்கு மீ.பொ.ம காண்க. 2M
   (ii) $9a^3b^2, 12a^2b^2c$ (iii) $16m, 12m^2n^2, 8n^2$
   (iv) p^2-3p+2, p^2-4 (v) $2x^2-5x-3, 4x^2-36$

எ.கா.3.12: பின்வருவனவற்றிற்கு மீ.சி.ம காண்க.
(i) $8x^4y^2,\ 48x^2y^4$ (ii) $5x-10,\ 5x^2-20$
(iii) $x^4-1,\ x^2-2x+1$
(iv) $x^3-27, (x-3)^2,\ x^2-9$

அலகுப்பயிற்சி:
4. $xy(k^2+1)+k(x^2+y^2)$ & $xy(k^2-1)+k(x^2-y^2)$ ஆகியவற்றின் மீ.சி.ம. காண்க.

2. பின்வருவனவற்றிற்கு மீ.சி.ம காண்க. 2M

(i) $4x^2y, 8x^3y^2$
4 மற்றும் 8 ஆகியவற்றின் மீ.சி.ம 8
மீ.சி.ம : $\mathbf{8x^3y^2}$

(vi) $(2x^2-3xy)^2, (4x-6y)^3, 8x^3-27y^3$

$(2x^2-3xy^2)^2 = [x[2x-3y]]^2 = x^2[2x-3y]^2$

$(4x-6y)^3 = [2[2x-3y]]^3 = 2^3[2x-3y]^3$

$8x^3-27y^3 = (2x)^3-(3y)^3$ z $= (2x-3y)(4x^2+9y^2+6xy)$

மீ.சி.ம $\mathbf{2^3x^2(2x-3y)^3[4x^2+6xy+9y^2]}$

பயிற்சி 3.3

1. பின்வருவனவற்றில் முறையே $f(x)$ மற்றும் $g(x)$ ஆகியவற்றின் மீ.பெ.வ மற்றும் மீ.சி.ம காண்க. மேலும், $f(x)\times g(x) =$ (மீ.சி.ம) $\times$ (மீ.பெ.வ) என்பதைச் சரிபார்க்க.

(i) $21x^2y, 35xy^2$ 2M

$f(x) = 21x^2y = 7\times 3\times x^2\times y$

$g(x) = 35xy^2 = 7\times 5\times x\times y^2$

மீ.சி.ம: $3\times 5\times 7\times x^2\times y^2 = \mathbf{105x^2y^2}$

மீ.பெ.வ: $7\times x\times y = \mathbf{7xy}$

சரிபார்த்தல்: $f(x)\times g(x) =$ (மீ.சி.ம) $\times$ (மீ.பெ.வ)

$21x^2y\times 35xy^2 = 105x^2y^2\times 7xy$

$735x^3y^3 = 735x^3y^3$

$f(x)\times g(x) =$ (மீ.சி.ம) $\times$ (மீ.பெ.வ) என சரிபார்க்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. பின்வருவனவற்றில் முறையே $f(x)$ & $g(x)$ ஆகியவற்றின் மீ.பெ.வ & மீ.சி.ம காண்க. மேலும், $f(x)\times g(x) =$ (மீ.சி.ம) $\times$ (மீ.பெ.வ) என்பதைச் சரிபார்க்க. 2M
   (ii) $(x^3-1)(x+1), (x^3+1)$
   (iii) $(x^2y+xy^2), (x^2+xy)$

CQ: இரு மிகை முழுக்கள் p மற்றும் q ஆகியவற்றை $p=a^2b^3$ மற்றும் $q=a^3b$ என எழுத இயலும் ; a,b என்பன பகா எண்கள் எனில், மீ.சி.ம $(p,q)\times$ மீ.பெ.வ.$(p,q) = pq$ எனச் சரிபார்க்க. **(PTA – 2)** 2M

2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.சி.ம காண்க. 2M PTA-6

(i) $a^2+4a-12, a^2-5a+6$ இவற்றின் மீ.பொ.வ $a-2$

$f(x)=a^2+4a-12=(a+6)(a-2)$

$g(x)=a^2-5a+6=(a-3)(a-2)$

மீ.பொ.வ : $a-2$

மீ.சி.ம : $\frac{f(x)\times g(x)}{\text{மீ.பொ.வ}}=\frac{(a+6)(a-2)\times(a-3)(a-2)}{(a-2)}$

மீ.சி.ம: $(a+6)(a-3)(a-2)$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. கீழ்க்கண்ட ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.சி.ம காண்க.
(ii) $x^4-27a^3x, (x-3a)^2$ இவற்றின் மீ.பொ.வ $(x-3a)$ 2M

3. பின்வரும் ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பெ.வ காண்க. 2M

(i) $12(x^4-x^3), 8(x^4-3x^3+2x^2)$ இவற்றின் மீ.சி.ம $24x^3(x-1)(x-2)$

$f(x)=12(x^4-x^3)$

$=12x^3[x-1]$

$g(x)=8(x^4-3x^3+2x^2)$

$=8x^2[x^2-3x+2]$

$=8x^2(x-1)(x-2)$

மீ.சி.ம $=24x^3(x-1)(x-2)$

மீ.பெ.வ $=\frac{f(x)\times g(x)}{\text{மீ.சி.ம}}=\frac{12x^3(x-1)\times 8x^2(x-1)(x-2)}{24x^3(x-1)(x-2)}$

மீ.பெ.வ $=\mathbf{4x^2(x-1)}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

3. பின்வரும் ஒவ்வொரு சோடி பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் மீ.பெ.வ காண்க. (ii) $(x^3+y^3), (x^4+x^2y^2+y^4)$ இவற்றின் மீ.சி.ம $(x^3+y^3)(x^2+xy+y^2)$ 2M

4. $p(x), q(x)$ என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.சி.ம மற்றும் மீ.பெ.வ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றைக் கண்டறிந்து நிரப்புக. 5M

எண்	மீ.சி.ம	மீ.பெ.வ	$p(x)$	$q(x)$
(i)	$a^3-10a^2+11a+70$	$a-7$	$a^2-12a+35$	?

(i) மீ.சி.ம $=a^3-10a^2+11a+70$

மீ.பெ.வ $=a-7$

$p(x)=a^2-12a+35,\ q(x)=?$

$q(x)=\frac{\text{மீ.சி.ம}\times\text{மீ.பெ.வ}}{p(x)}$

$=\frac{a^3-10a^2+11a+70\times a-7}{a^2-12a+35}$

$=\frac{(a^3-10a^2+11a+70)\times(a-7)}{(a-7)(a-5)}$

$q(x)=a^2-5a-14$

$=\mathbf{(a+2)(a-7)}$

$$\begin{array}{r|l} & a^2-5a-14 \\ a-5 & a^3-10a^2+11a+70 \\ & a^3-5a^2 \\ & (-)\ (+) \\ \hline & -5a^2+11a \\ & -5a^2+25a \\ & (+)\ (-) \\ \hline & -14a+70 \\ & -14a+70 \\ & (+)\ (-) \\ \hline & 0 \end{array}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

4. $p(x), q(x)$ என்ற இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் மீ.சி.ம மற்றும் மீ.பெ.வ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றிலிருந்து கீழ்க்கண்டவற்றைக் கண்டறிந்து நிரப்புக. 5M

எண்	மீ.சி.ம	மீ.பெ.வ	$p(x)$	$q(x)$
(ii)	$(x^4-y^4)(x^4+x^2y^2+y^4)$	(x^2-y^2)		$(x^4-y^4)(x^2+y^2-xy)$

பயிற்சி 3.4

1. பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவிற்குச் சுருக்குக. (2M)

(i) $\frac{x^2-1}{x^2+x} = \frac{x^2-1^2}{x(x+1)} = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{x\cancel{(x+1)}} = \frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{x}}$

(ii) $\frac{x^2-11x+18}{x^2-4x+4} = \frac{(x-9)\cancel{(x-2)}}{(x-2)\cancel{(x-2)}} = \frac{\mathbf{x-9}}{\mathbf{x-2}}$

(iii) $\frac{9x^2+81x}{x^3+8x^2-9x} = \frac{9x[x+9]}{x(x^2+8x-9)} = \frac{9\cancel{(x+9)}}{\cancel{(x+9)}(x-1)} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{x-1}}$

(iv) $\frac{p^2-3p-40}{2p^3-24p^2+64p} = \frac{(p-8)(p+5)}{2p(p^2-12p+32)} = \frac{\cancel{(p-8)}(p+5)}{2p\cancel{(p-8)}(p-4)}$

$= \frac{\mathbf{p+5}}{\mathbf{2p(p-4)}}$

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.**
>
> எ.கா.3.13 : விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவில் சுருக்குக.
> (i) $\frac{x-3}{x^2-9}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x^2+8x+16}$ (2M)

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.**
>
> அலகுப்பயிற்சி: 6. பின்வரும் விகிதமுறு கோவைகளை எளிய வடிவில் சுருக்குக. (i) $\frac{x^{3a}-8}{x^{2a}+2x^a+4}$ (ii) $\frac{10x^3-25x^2+4x-10}{-4-10x^2}$ (2M)

2. கீழ்க்கண்ட கோவைகளுக்கு விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க. (2M)

(iv) $\frac{\mathbf{x^3-27}}{\mathbf{x^3+x^2-6x}} = \frac{x^3-3^3}{x[x^2+x-6]} = \frac{(x-3)(x^2+9-3x)}{x(x^2+x-6)}$

$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-3)(x^2-3x+9)}{x(x+3)(x-2)}$

-6 → +3, -2

விலக்க மதிப்பு காண $q(x) = 0$

$x(x+3)(x-2) = 0$

$x = 0 \;|\; x+3 = 0,\ x = -3 \;|\; x-2 = 0,\ x = 2$

$\therefore \mathbf{x = 0, -3, 2}$

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.** (2M)
>
> 2. கீழ்க்கண்ட கோவைகளுக்கு விலக்கப்பட்ட மதிப்புகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.
> (i) $\frac{y}{y^2-25}$ (ii) $\frac{t}{t^2-5t+6}$ (iii) $\frac{x^2+6x+8}{x^2+x-2}$
>
> எ.கா.3.14 : பின்வரும் கோவைகளின் விலக்கப்பட்ட மதிப்பு காண்க.
> (i) $\frac{x+10}{8x}$ (ii) $\frac{7p+2}{8p^2+13p+5}$ (MAY-22) (iii) $\frac{x}{x^2+1}$

பயிற்சி 3.5

1. சுருக்குக: (2M)

(i) $\frac{\mathbf{4x^2y}}{\mathbf{2z^2}} \times \frac{\mathbf{6xz^3}}{\mathbf{20y^4}} = \frac{4x^2y}{2} \times \frac{6xz}{20y^4} = \frac{3}{5}\frac{x^3 \times z}{y^3} = \frac{\mathbf{3x^3z}}{\mathbf{5y^3}}$

2. சுருக்குக (ii) $\frac{\mathbf{x^3-y^3}}{\mathbf{3x^2+9xy+6y^2}} \times \frac{\mathbf{x^2+2xy+y^2}}{\mathbf{x^2-y^2}}$ (2M)

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+y^2+xy)$

$3x^2+9xy+6y^2 = 3(x^2+3xy+2y^2) = 3(x+2y)(x+y)$
$x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$
$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$

$= \frac{\cancel{(x-y)}(x^2+y^2+xy)}{3(x+2y)\cancel{(x+y)}} \times \frac{\cancel{(x+y)^2}}{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}} = \frac{\mathbf{x^2+xy+y^2}}{\mathbf{3(x+2y)}}$

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.** (2M)
>
> 1. சுருக்குக
> (ii) $\frac{p^2-10p+21}{p-7} \times \frac{p^2+p-12}{(p-3)^2}$ (iii) $\frac{5t^3}{4t-8} \times \frac{6t-12}{10t}$
>
> 2. சுருக்குக (i) $\frac{x+4}{3x+4y} \times \frac{9x^2-16y^2}{2x^2+3x-20}$
>
> எ.கா.3.15 : (i) $\frac{x^3}{9y^2}$ -ஐ $\frac{27y}{x^5}$ -ஆல் பெருக்குக.
> (ii) $\frac{x^4b^2}{x-1}$ -ஐ $\frac{x^2-1}{a^4b^3}$ -ஆல் பெருக்குக.
>
> அலகுப்பயிற்சி: 7. $\frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q+r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q+r}} \times \left[1 + \frac{q^2+r^2-p^2}{2qr}\right]$

3. சுருக்குக.

(i) $\frac{\mathbf{2a^2+5a+3}}{\mathbf{2a^2+7a+6}} \div \frac{\mathbf{a^2+6a+5}}{\mathbf{-5a^2-35a-50}}$ (5M)

$= \frac{2a^2+5a+3}{2a^2+7a+6} \times \frac{-5a^2-35a-50}{a^2+6a+5}$

$2a^2+5a+3 = (a+1)(2a+3)$
$2a^2+7a+6 = (2a+3)(a+2)$
$-5a^2-35a-5 = -5[a^2+7a+10] = -5(a+2)(a+5)$
$a^2+6a+5 = (a+1)(a+5)$

$= \frac{\cancel{(a+1)}\cancel{(2a+3)}}{\cancel{(2a+3)}\cancel{(a+2)}} \times -\frac{5\cancel{(a+2)}\cancel{(a+5)}}{\cancel{(a+5)}\cancel{(a+1)}} = \mathbf{-5}$

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.**
>
> 3. சுருக்குக:
> (ii) $\frac{b^2+3b-28}{b^2+4b+4} \div \frac{b^2-49}{b^2-5b-14}$ (JUL-22) (5M)
> (iii) $\frac{x+2}{4y} \div \frac{x^2-x-6}{12y^2}$ (APR-23) (2M)
> (iv) $\frac{12t^2-22t+8}{3t} \div \frac{3t^2+2t-8}{2t^2+4t}$ (5M)
>
> எ.கா.3.16 :பின்வருவனவற்றைக் காண்க.
> (i) $\frac{14x^4}{y} \div \frac{7x}{3y^4}$ (ii) $\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x-4}{x+4}$ (2M)
> (iii) $\frac{16x^2-2x-3}{3x^2-2x-1} \div \frac{8x^2+11x+3}{3x^2-11x-4}$ (5M)

4. $x = \frac{a^2+3a-4}{3a^2-3}$ மற்றும் $y = \frac{a^2+2a-8}{2a^2-2a-4}$ எனில், x^2y^{-2}-ன் மதிப்பைக் காண்க. PTA-3 5M

$$x = \frac{a^2+3a-4}{3a^2-3} = \frac{(a+4)(a-1)}{3(a^2-1^2)}$$
$$= \frac{(a+4)(a-1)}{3(a+1)(a-1)}$$
$$x = \frac{a+4}{3(a+1)}$$
$$y = \frac{a^2+2a-8}{2a^2-2a-4} = \frac{a^2+2a-8}{2(a^2-a-2)}$$
$$= \frac{(a+4)(a-2)}{2[(a-2)(a+1)]}$$
$$y = \frac{a+4}{2(a+1)}$$
$$x^2y^{-2} = \frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$
$$\frac{x}{y} = \frac{a+4}{3(a+1)} \times \frac{2(a+1)}{a+4}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$
$$\therefore x^2y^{-2} = \frac{4}{9}$$

5. $p(x) = x^2 - 5x - 14$ என்ற பல்லுறுப்புக்கோவையை $q(x)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையால் வகுக்க $\frac{x-7}{x+2}$ எனும் விடை கிடைக்கிறது எனில், $q(x)$-ஐக் காண்க. 2M PTA-2

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-7}{x+2}$$
$$\frac{x^2-5x-14}{q(x)} = \frac{x-7}{x+2}$$
$$q(x) = \frac{x^2-5x-14}{x-7} \times x+2$$
$$= \frac{(x-7)(x+2)}{x-7} \times (x+2)$$
$$q(x) = (x+2)(x+2)$$
$$q(x) = x^2+4x+4$$

தயாரிக்கப்பட்ட வினா

1. சுருக்குக: $\frac{a^2-16}{a^3-8} \times \frac{2a^2-3a-2}{2a^2+9a+4} \div \frac{3a^2-11a-4}{a^2+2a+4}$ 5M PTA-4

$$= \frac{a^2-16}{a^3-8} \times \frac{2a^2-3a-2}{2a^2+9a+4} \times \frac{a^2+2a+4}{3a^2-11a-4}$$
$$= \frac{(a+4)(a-4)}{(a-2)(a^2+2a+4)} \times \frac{(2a+1)(a-2)}{(2a+1)(a+4)} \times \frac{a^2+2a+4}{(3a+1)(a-4)}$$
$$= \frac{1}{(3a+1)}$$

பயிற்சி 3.6

1. கூட்டுக (i) $\frac{x(x+1)}{x-2} + \frac{x(1-x)}{x-2}$ 2M

$$\frac{x(x+1)}{x-2} + \frac{x(1-x)}{x-2} = \frac{x^2+x+x-x^2}{x-2}$$
$$= \frac{2x}{x-2}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

1. கூட்டுக: (ii) $\frac{x+2}{x+3} + \frac{x-1}{x-2}$ (iii) $\frac{x^3}{x-y} + \frac{y^3}{y-x}$

எ.கா.3.18: சுருக்குக $\frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-8x+15}$

2. கழிக்க (i) $\frac{(2x+1)(x-2)}{x-4} - \frac{(2x^2-5x+2)}{x-4}$ 2M

$$\frac{(2x+1)(x-2)}{x-4} - \frac{(2x^2-5x+2)}{x-4}$$
$$= \frac{2x^2-3x-2-2x^2+5x-2}{x-4}$$
$$= \frac{2x-4}{x-4} = \frac{2(x-2)}{x-4}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

2. கழிக்க : (ii) $\frac{4x}{x^2-1} - \frac{x+1}{x-1}$

எ.கா.3.17: $\frac{x^2+20x+36}{x^2-3x-28} - \frac{x^2+12x+4}{x^2-3x-28}$ ஐக் காண்க.

3. $\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2}$-யிலிருந்து $\frac{1}{x^2+2}$-ஐக் கழிக்க. 2M

$$\frac{2x^3+x^2+3}{(x^2+2)^2} - \frac{1}{x^2+2} = \frac{2x^3+x^2+3-(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{2x^3+x^2+3-x^2-2}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{2x^3+1}{(x^2+2)^2}$$

4. $\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$-யிலிருந்து எந்த விகிதமுறு கோவையைக் கழித்தால் $\frac{3}{x^2-2x+4}$ என்ற கோவை கிடைக்கும். PTA-4 2M

$$\frac{x^2+6x+8}{x^3+8} - p(x) = \frac{3}{x^2-2x+4}$$
$$\frac{x^2+6x+8}{x^3+2^3} - \frac{3}{x^2-2x+4} = p(x)$$
$$\frac{(x+4)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{3}{x^2-2x+4} = p(x)$$
$$\frac{(x+4)}{(x^2-2x+4)} - \frac{3}{x^2-2x+4} = p(x)$$
$$\frac{x+4-3}{x^2-2x+4} = p(x)$$
$$p(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+4}$$

5. $A = \frac{2x+1}{2x-1}$ மற்றும் $B = \frac{2x-1}{2x+1}$ எனில் $\frac{1}{A-B} - \frac{2B}{A^2-B^2}$ காண்க. (5M)

$$\frac{1}{A-B} - \frac{2B}{A^2-B^2} = \frac{1}{A-B} - \frac{2B}{(A+B)(A-B)}$$

$$= \frac{A+B-2B}{(A+B)(A-B)}$$

$$= \frac{A-B}{(A+B)(A-B)}$$

$$= \frac{1}{A+B}$$

இங்கு, $A = \frac{2x+1}{2x-1}$, $B = \frac{2x-1}{2x+1}$

$$A + B = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$= \frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$\therefore A + B = \frac{2(4x^2+1)}{4x^2-1}$$

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{\frac{2(4x^2+1)}{4x^2-1}}$$

$$= \frac{4x^2-1}{2(4x^2+1)}$$

$(2x+1)^2 = 4x^2+1+4x$
$(2x-1)^2 = 4x^2+1-4x$
$(2x+1)^2 + (2x-1)^2$
$= 8x^2 + 2 = 2(4x^2+1)$
$(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

6. $A = \frac{x}{x+1}$ மற்றும் $B = \frac{1}{x+1}$, எனில், $\frac{(A+B)^2+(A-B)^2}{A \div B} = \frac{2(x^2+1)}{x(x+1)^2}$ என நிரூபிக்க.

CQ : $P = \frac{x}{x+y}$, $Q = \frac{y}{x+y}$ எனில் $\frac{1}{P^2-Q^2}$ -ஐக் காண்க. **(MAY - 22)** (5M)

8. **இனியா 50 கி.கி எடையுள்ள ஆப்பிள்கள் மற்றும் வாழைப்பழங்கள் வாங்கினார். ஒரு கிலோகிராமுக்கு ஆப்பிள்களின் விலை வாழைப்பழங்களின் விலையைப் போல இருமடங்கு ஆகும். வாங்கப்பட்ட ஆப்பிள்களின் விலை ₹1800 மற்றும் வாழைப்பழங்களின் விலை ₹600 எனில், இனியா வாங்கிய இருவகை பழங்களின் எடையைக் கிலோகிராமில் காண்க.** (5M)

ஆப்பிள்களின் எடை $= x$
வாழைப்பழங்களின் எடை $= y$
மொத்த எடை $= 50$
$x + y = 50$........ (1)
வாழைப்பழத்தின் விலை $= z/$ கி.கி
ஆப்பிளின் விலை$= 2z/$ கி.கி
ஆப்பிள்களின் மொத்த தொகை
$= ₹1800$
$2z \times x = 1800$
$2zx = 1800$
$x = \frac{1800}{2z}$
$x = \frac{900}{z}$...... (2)
வாழைப்பழங்களின் மொத்த தொகை
$= ₹600$
$yz = 600$
$y = \frac{600}{z}$...... (3)
$x = \frac{900}{z}$, $y = \frac{600}{z}$

(1) ல் பிரதியிட
$x + y = 50$
$\frac{900}{z} + \frac{600}{z} = 50$
$\frac{1500}{z} = 50$
$z = \frac{1500}{50} = 30$
$z = 30$ என
(2) & (3) ல் பிரதியிட
$x = \frac{900}{z} = \frac{900}{30} = 30$
$x = 30$
$y = \frac{600}{z} = \frac{600}{30} = 20$
$y = 20$
ஆப்பிள்களின் எடை $= \mathbf{30}$ **கி.கி**
வாழைப்பழங்களின் எடை $= \mathbf{20}$ **கி.கி**

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

7. ஒரு வேலையை 4 மணி நேரத்தில் பாரி செய்கிறார். யுவன் அதே வேலையை 6 மணி நேரத்தில் செய்கிறார் எனில் இருவரும் சேர்ந்து அந்த வேலையைச் செய்து முடிக்க எத்தனை மணி நேரமாகும்?
அலகுப்பயிற்சி: 8. அருள், மதன் மற்றும் இராம் மூவரும் இணைந்து ஒரு கடையை 6 மணி நேரத்தில் சுத்தம் செய்கின்றனர். தனித்தனியாகச் சுத்தம் செய்தால் அருளைப் போல இருமடங்கு நேரம் மதன் எடுத்துக் கொள்கிறார், மேலும் இராம், அருளின் நேரத்தைப்போல மும்மடங்கு எடுத்துக்கொள்கிறார் எனில், மூவரும் தனித்தனியாக எவ்வளவு நேரம் எடுத்துக் கொள்வார்கள்.

பயிற்சி 3.7

1. **பின்வருவனவற்றின் வர்க்கமூலம் காண்க.**

(i) $\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}$ JUL-22 (2M)

$$\sqrt{\frac{400x^4y^{12}z^{16}}{100x^8y^4z^4}} = \left[\frac{4x^4y^{12}z^{16}}{x^8y^4z^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\frac{4y^8z^{12}}{x^4}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\left|\frac{y^4z^6}{x^2}\right|$$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

1. **பின்வருவனவற்றின் வர்க்கமூலம் காண்க.**

(ii) $\frac{7x^2+2\sqrt{14x}+2}{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$ (iii) $\frac{121(a+b)^8(x+y)^8(b-c)^8}{81(b-c)^4(a-b)^{12}(b-c)^4}$

எ.கா.3.19: கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.

(i) $256(x-a)^8(x-b)^4(x-c)^{16}(x-d)^{20}$ (ii) $\frac{144a^8b^{12}c^{16}}{81f^{12}g^4h^{14}}$ **(PTA-5)**

2. கீழ்க்காணும் கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க. (2M)

(i) $4x^2+20x+25$

(i) $4x^2+20x+25$

100

5 ~~10~~ 2 ~~4~~   ~~10~~ 5 ~~4~~ 2

$= \sqrt{4x^2+20x+25}$

$= \sqrt{(2x+5)(2x+5)}$

$= |\mathbf{2x+5}|$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. கீழ்க்காணும் கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க. (5M)
(ii) $9x^2-24xy+30xz-40yz+25z^2+16y^2$
(iii) $(4x^2-9x+2)(7x^2-13x-2)(28x^2-3x-1)$
(iv) $\left(2x^2+\frac{17}{6}x+1\right)\left(\frac{3}{2}x^2+4x+2\right)\left(\frac{4}{3}x^2+\frac{11}{3}x+2\right)$

எ.கா.3.20: கீழ்க்கண்ட கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க.
(i) $16x^2+9y^2-24xy+24x-18y+9$
(ii) $(6x^2+x-1)(3x^2+2x-1)(2x^2+3x+1)$
(iii) $[\sqrt{15}x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{10})x+\sqrt{2}][\sqrt{5}x^2+(2\sqrt{5}+1)x+2][\sqrt{3}x^2+(\sqrt{2}+2\sqrt{3})x+2\sqrt{2}]$

பயிற்சி 3.8

1. வகுத்தல் முறையில் பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க. (5M)

(i) $x^4-12x^3+42x^2-36x+9$ JUL-22

	$1 \quad -6 \quad +3$
1	$1 - 12 \quad +42 \quad -36 \quad +9$
	1
	$(-)$
$2-6$	$-12 \quad +42$
	$-12 \quad +36$
	$(+) \quad (-)$
$2-12+3$	$6 \quad -36 \quad +9$
	$6 \quad -36 \quad +9$
	$(-) \quad (+) \quad (-)$
	0

$\sqrt{x^4-12x^3+42x^2-36x+9}$
$= |\mathbf{x^2-6x+3}|$

2. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முழு வர்க்கங்கள் எனில் a மற்றும் b-யின் மதிப்பு காண்க. (5M)

(i) $4x^4-12x^3+37x^2+bx+a$ PTA-4

	$2 \quad -3 \quad +7$
2	$4 - 12 + 37 \quad +b \quad +a$
	4
	$(-)$
$4 \; -3$	$-12 + 37$
	$-12 + 9$
	$(+) \quad (-)$
$4 \; -6 \; +7$	$28 \quad +b+a$
	$28 - 42 + 49$
	$(-) \quad (+) \quad (-)$
	0

கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை,
முழு வர்க்கம் என்பதால்

$\therefore \; \mathbf{a = 49}, \; \mathbf{b = -42}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. வகுத்தல் முறையில் பின்வரும் பல்லுறுப்புக்கோவைகளின் வர்க்கமூலம் காண்க. (5M)
(ii) $37x^2-28x^3+4x^4+42x+9$ (iii) $16x^4+8x^2+1$ (iv) $121x^4-198x^3-183x^2+216x+144$ **(JUN-23)**

எ.கா.3.21: $64x^4-16x^3+17x^2-2x+1$ என்பதின் வர்க்கமூலம் காண்க.**(SEP-21)**

அலகுப்பயிற்சி: 9. $289x^4-612x^3+970x^2-684x+361$-யின் வர்க்கமூலம் காண்க.

CQ : $\frac{x^2}{y^2}-\frac{10x}{y}+27-\frac{10y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$ என்ற கோவையின் வர்க்கமூலம் காண்க.**(SEP-20)**

3. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முழு வர்க்கங்கள் எனில், m மற்றும் n –யின் மதிப்பு காண்க.

(i) $36x^4-60x^3+61x^2-mx+n$ (5M) MAY-22

	$6 \quad -5 \quad +3$
6	$36 \quad -60 \quad +61 \quad -m \quad +n$
	36
	$(-)$
$12 \; -5$	$-60 \quad +61$
	$-60 \quad +25$
	$(+) \quad (-)$
$12-10+3$	$36 \quad -m \quad +n$
	$36 \quad -30 \quad +9$
	$(-) \quad (+) \quad (-)$
	0

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

2. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முழு வர்க்கங்கள் எனில் a & b-யின் மதிப்பு காண்க. (ii) $ax^4+bx^3+361x^2+220x+100$
3. கீழ்க்காணும் பல்லுறுப்புக்கோவைகள் முழு வர்க்கங்கள் எனில், m மற்றும் n –யின் மதிப்பு காண்க. (ii) $x^4-8x^3+mx^2+nx+16$

எ.கா.3.22: $9x^4+12x^3+28x^2+ax+b$ ஆனது ஒரு முழு வர்க்கம் எனில், a, b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. **(PTA - 5)**

CQ : $16x^4-24x^3+(a-1)x^2+(b+1)x+49$ என்பது ஒரு முழு வர்க்கம் எனில் a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. **(PTA - 2)**

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புக்கோவை, முழு வர்க்கம் என்பதால் $-m+30=0 \Rightarrow -m=-30 \Rightarrow \mathbf{m=30}$

$n-9=0 \Rightarrow \mathbf{n=9}$

பயிற்சி 3.9

1. **மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க.** (2M)

(i) $-9, 20$ SEP-21

$\alpha+\beta=-9 , \alpha\beta=20$

பொது வடிவம்:

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

$\mathbf{x^2+9x+20=0}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் காண்க. (2M)
(ii) $\frac{5}{3}, 4$ (iii) $-\frac{3}{2}, -1$ **(PTA-4)** (iv) $-(2-a)^2, (a+5)^2$

எ.கா.3.24: மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கல் கீழ்க்காணுமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனில், அவற்றுக்குத் தகுந்த இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் கண்டறிக. (i) $9, 14$ (ii) $-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}$ (iii) $-\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}$

2. **கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் காண்க.** (2M)

(i) $\mathbf{x^2+3x-28=0}$

$ax^2+bx+c=0$ உடன் ஒப்பிட

$a=1, b=3, c=-28$

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{1}=\mathbf{-3}$

$\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{28}{1}=\mathbf{-28}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. கீழ்க்காணும் இருபடிச் சமன்பாடுகளுக்கு மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் காண்க. (2M)
(ii) $x^2+3x=0$ (iii) $3+\frac{1}{a}=\frac{10}{a^2}$ (iv) $3y^2-y-4=0$

எ.கா.3.23: $x^2+8x+12$ என்ற இருபடி கோவையின் பூச்சியங்களைக் காண்க.

எ.கா.3.25: கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் ஆகியவற்றைக் காண்க.
(i) $x^2+8x-65=0$ (ii) $2x^2+5x+7=0$ (iii) $kx^2-k^2x-2k^3=0$

CQ : $8x^2-25=0$ என்ற இருபடிச்சமன்பாட்டின் மூலங்களின் கூடுதல் மற்றும் பெருக்கற்பலன் காண்க. **(PTA-4)**

பயிற்சி 3.10

1. **காரணிப்படுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.** (2M)

(i) $\mathbf{4x^2-7x-2=0}$

-8
(-7)
$\frac{1}{4}$ $\frac{-8}{4}$ 2

$(4x+1)(x-2)=0$

$4x+1=0$, $x=-\frac{1}{4}$ | $x-2=0$, $x=2$

தீர்வுகணம் $\left\{-\frac{1}{4}, 2\right\}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. காரணிப்படுத்தல் முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க. (2M)
(ii) $3(p^2-6)=p(p+5)$ (iii) $\sqrt{a(a-7)}=3\sqrt{2}$
(iv) $\sqrt{2}x^2+7x+5\sqrt{2}=0$ (V) $2x^2-x+\frac{1}{8}=0$

எ.கா.3.26: தீர்க்க $2x^2-2\sqrt{6}x+3=0$ **(PTA-6)**

எ.கா.3.27: தீர்க்க $2m^2+19m+30=0$

எ.கா.3.28: தீர்க்க $x^4-13x^2+42=0$ **(PTA-1)**

எ.கா.3.29: தீர்க்க $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=2\frac{1}{2}$

அலகுப்பயிற்சி: 10. தீர்க்க $\sqrt{y+1}+\sqrt{2y-5}=3$

2. **$\mathbf{n}$ அணிகள் பங்குபெறும் ஒரு கையுந்து விளையாட்டு (Volley ball) போட்டியில் ஒவ்வோர் அணியும் மற்ற அனைத்து அணிகளோடும் விளையாட வேண்டும். 15 போட்டிகள் கொண்ட தொடரில் மொத்தப் போட்டிகளின் எண்ணிக்கை $G(n)=\frac{n^2-n}{2}$ எனில், பங்கேற்கும் அணிகளின் எண்ணிக்கை எத்தனை?** (2M)

$G(n)=\frac{n^2-n}{2}$

மொத்த போட்டிகளின் எண்ணிக்கை $=15$

$\frac{n^2-n}{2}=15$

$n^2-n=30$

$n^2-n-30=0$

$(n-6)(n+5)=0$

$n-6=0$, $n=6$ | $n+5=0$, $n=-5$

-30
(-1)
-6 +5

$n\neq-5$, ஏனெனில் இங்கு n ஒரு மிகை எண்

$\therefore n=6$

பங்கேற்கும் அணிகளின் எண்ணிக்கை $=\mathbf{6}$

பயிற்சி 3.11

1. கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளை வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் தீர்க்க. (5M)

(ii) $\frac{5x+7}{x-1} = 3x+2$ (PTA-3)

$5x+7 = (3x+2)(x-1)$

$5x+7 = 3x^2-3x+2x-2$

$5x+7 = 3x^2-x-2$

$3x^2-6x-9 = 0$

$\div 3,\ x^2-2x-3=0$

$x^2-2x = 3$

$x^2-2(1)(x) = 3$

1^2 ஐ இருபுறமும் கூட்ட,

$\left(-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-(-2)}{2}\right)^2 = (1)^2$
$= 1$ ஐக் கூட்ட

$x^2-2(x)+1 = 3+1$

$x^2-2(x)+1 = 4$

$(x-1)^2 = 2^2$

$(x-1) = \pm 2$

$x-1=+2$	$x-1=-2$
$x=2+1$	$x=-2+1$
$x=3$	$x=-1$

$\therefore x = 3, -1$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. கொடுக்கப்பட்ட இருபடிச் சமன்பாடுகளை வர்க்கப் பூர்த்தி முறையில் தீர்க்க. (i) $9x^2-12x+4=0$ (5M)

எ.கா.3.30: தீர்க்க $x^2-3x-2=0$ (2M)

எ.கா.3.31: தீர்க்க $2x^2-x-1=0$ (2M)

2. சூத்திர முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க. (5M)

(i) $2x^2-5x+2=0$

$a=2\ b=-5\ c=2$

$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(2)}}{2(2)}$

$= \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$

$= \frac{5\pm\sqrt{9}}{4}$

$= \frac{5\pm 3}{4}$

$x=\frac{5+3}{4}$	$x=\frac{5-3}{4}$
$=\frac{8}{4}$	$x=\frac{2}{4}$
$x=2$	$x=\frac{1}{2}$

$\therefore x = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. சூத்திர முறையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க. (ii) $\sqrt{2}f^2-6f+3\sqrt{2}=0$ (iii) $3y^2-20y-23=0$ (iv) $36y^2-12ay+(a^2-b^2)=0$ (5M)

எ.கா.3.32: சூத்திர முறையில் $x^2+2x-2=0$ -ஐத் தீர்க்கவும்.

எ.கா.3.33: சூத்திர முறையில் $2x^2-3x-3=0$ –ஐக் தீர்க்க.

எ.கா.3.34: $3p^2+2\sqrt{5}p-5=0$ -ஐ சூத்திர முறையில் தீர்க்கவும்.

எ.கா.3.35: தீர்க்க $pqx^2-(p+q)^2x+(p+q)^2=0$

CQ : $x^2-4x-12=0$ எனில் x ன் மதிப்பைக் காண்க. **(JUL - 22)** (2M)

CQ : $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}=\frac{4}{x+4}$, $x+1\neq 0, x+2\neq 0$ மற்றும் $x+4\neq 0$ –ஐ இருபடிச் சமன்பாட்டின் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தித் தீர்க்க. **(PTA - 3)**

3. சாய்வு தளத்தில் t-வினாடிகளில் ஒரு பந்து கடக்கும் தூரம் $d = t^2-0.75t$ அடிகளாகும். 11.25 அடி தொலைவைக் கடக்கப் பந்து எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் எவ்வளவு? (5M)

மொத்த தூரம் $(d) = t^2-0.75t$

மொத்த நேரம் $= t$ வினாடி

$d = 11.25$ அடி

$t^2-0.75t = 11.25$

$t^2-0.75t-11.25 = 0$

$t^2-\frac{75}{100}t-\frac{1125}{100} = 0$

$\frac{100t^2-75t-1125}{100} = 0$

$100t^2-75t-1125 = 0$

25 ஆல் வகுக்க,

$\frac{100}{25}t^2-\frac{75}{25}t-\frac{1125}{25} = 0$

$4t^2-3t-45 = 0$

$ax^2+bx+c=0$ உடன் ஒப்பிட,

$a=4, b=-3, c=-45$

$t = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(4)(-45)}}{2(4)}$

$= \frac{3\pm\sqrt{9+(16\times 45)}}{8}$

$= \frac{3\pm\sqrt{9+720}}{8}$

$= \frac{3\pm\sqrt{729}}{8}$

$= \frac{3\pm 27}{8}$

$t=\frac{3+27}{8}$	$t=\frac{3-27}{8}$
$t=\frac{30}{8}$	$t=\frac{-24}{8}=-3$
$t=3.75$	$t\neq -3$

t ஆனது மிகை ஆகும்.

$\therefore t = 3.75$ **வினாடிகள்.**

பயிற்சி 3.12

1. **ஓர் எண் மற்றும் அதன் தலைகீழி ஆகியவற்றின் வித்தியாசம் $\frac{24}{5}$ எனில், அந்த எண்ணைக் காண்க.** (2M)

PTA-6

ஓர் எண் $= x$, அதன் தலைகீழி $= \frac{1}{x}$

வித்தியாசம் $= \frac{24}{5}$

$$x - \frac{1}{x} = \frac{24}{5}$$

$$\frac{x^2-1}{x} = \frac{24}{5}$$

$$5x^2 - 5 = 24x$$

$$5x^2 - 24x - 5 = 0$$

$$(5x+1)(x-5) = 0$$

$\therefore x - 5 = 0$ $\quad 5x + 1 = 0$

$x = 5$ $\quad x = -\frac{1}{5}$

அந்த எண் **5** எனில், அதன் தலைகீழி $\frac{1}{5}$

அந்த எண் $-\frac{1}{5}$ எனில், அதன் தலைகீழி **−5**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

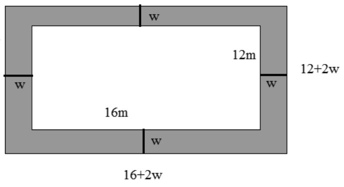
CQ: வர்க்கங்களின் கூடுதல் 365 வரக்கூடிய அடுத்தடுத்த மிகை முழுக்கள் இரண்டினைக் காண்க. **(MDL)** (5M)

2. **12 மீ × 16 மீ அளவுகள் கொண்ட ஒரு செவ்வக வடிவப் பூங்காவைச் சுற்றி 'w' மீட்டர் அகலமுள்ள நடைபாதை அமைக்கப்படும்போது, அதன் மொத்தப் பரப்பு 285 சதுர மீட்டராக அதிகரிக்கிறது. நடைபாதையின் அகலத்தைக் கணக்கிடுக.** (5M)

நீளம் $= 16$ மீ,

அகலம் $= 12$மீ

நடைபாதையின் அகலம் $= w$



தற்போது, நீளம் $= (16 + 2w)m$

அகலம் $= (12 + 2w)m$

$$\therefore (16 + 2w)(12 + 2w) = 285$$

$$192 + 56w + 4w^2 = 285$$

$$4w^2 + 56w + 192 - 285 = 0$$

$$4w^2 + 56w - 93 = 0$$

$$a = 4, b = 56, c = -93$$

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-56 \pm \sqrt{56^2 - 4(4)(-93)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-56 \pm \sqrt{3136+1488}}{8}$$

$$= \frac{-56 \pm 68}{8}$$

$w = -\frac{56+68}{8} = \frac{12}{8}$ $\quad$ $w = \frac{-56-68}{8}$

$= 1.5$ மீ $\quad$ $w = -\frac{124}{8}$

w ஆனது மிகையாக இருக்க வேண்டும்

$\therefore w \neq -\frac{124}{8}$

$\therefore$ அகலம்= **1.5** மீ

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

8. 10 மீ பக்க அளவுள்ள சதுர வடிவ நிலத்தின் நடுவில், ஒரு சதுர மலர் மேடையும் அதனைச் சுற்றிச் சீரான அகலமுள்ள சரளை பாதையும் அமைக்கப்படுகிறது. ஒரு சதுர மீட்டர் மேடை மற்றும் பாதை அமைக்க முறையே ₹3 மற்றும் ₹4 என்றவாறு மொத்தச் செலவு ₹364 எனில், சரளை பாதையின் அகலம் என்ன? (5M)

அலகுப்பயிற்சி: 12. 320 மீ சுற்றளவு 4800 ச.மீ பரப்பளவும் கொண்ட செவ்வக வடிவப் பூங்காவை அமைக்க முடியுமா? ஆம் எனில், அதன் நீளம், அகலம் காண்க.

3. **ஒரு பேருந்து 90கி.மீ தொலைவைச் சீரான வேகத்தில் கடக்கிறது. அதன் வேகம் 15 கி.மீ/மணி அதிகரிக்கப்பட்டால், பயண நேரம் 30 நிமிடங்கள் குறைகிறது எனில், பேருந்தின் வேகத்தைக் கணக்கிடுக.** (5M)

பேருந்தின் வேகம் $= x$ கி.மீ /மணி

மொத்த தூரம் $= 90$ கி.மீ

எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம் $= T_1$

$$T_1 = \frac{\text{தூரம்}}{\text{வேகம்}}$$

$T_1 = \frac{90}{x}$ மணி

அதிகரிக்கப்படும் வேகம்= 15 கி.மீ/மணி

பேருந்தின் வேகம் $= (x + 15)$கி.மீ /மணி

மொத்த தூரம் $= 90$ கி.மீ

$T_2 = \frac{90}{(x+15)}$ மணி

நேர வித்தியாசம் $= 30$ நிமிடங்கள்

$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}$ மணி

$$\frac{90}{x} - \frac{90}{x+15} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{90(x+15) - 90x}{x(x+15)} = \frac{1}{2}$$

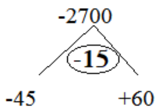
$$90x + 1350 - 90x = \frac{1}{2}(x^2 + 15x)$$

$$x^2 + 15x = +1350 \times 2$$

$$x^2 + 15x - 2700 = 0$$

$$(x - 45)(x + 60) = 0$$

$$x = 45 \text{ (or) } -60$$



x மிகையாக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ **$x = 45$ கி.மீ /மணி**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

எ.கா.3.39: சென்னையிலிருந்து விருதாச்சலத்திற்கு 240 கி.மீ தூரத்தைக் கடக்க ஒரு பயணிகள் தொடர்வண்டிக்கு ஒரு விரைவு தொடர்வண்டியைவிட 1 மணி நேரம் கூடுதலாகத் தேவைப்படுகிறது. பயணிகள் தொடர்வண்டியின் வேகம், விரைவு தொடர்வண்டியின் வேகத்தைவிட 20 கி.மீ/மணி குறைவு எனில், இரு தொடர்வண்டிகளின் சராசரி வேகங்களைக் கணக்கிடுக.

அலகுப்பயிற்சி: 11. 36 கி.மீ தூரத்தை ஒரு படகு நீரோட்டத்தின் திசையில் கடக்கும் நேரத்தைவிட எதிர் திசையில் கடக்கும் நேரம் 1.6 மணி நேரம் அதிகமாக எடுத்துக்கொள்கிறது. நீரோட்டத்தின் வேகம் 4 கி.மீ/மணி எனில், அசைவற்ற நீரில் படகின் வேகம் என்ன?

CQ : நிலையான நீரில் 18 கிமீ/ மணி வேகத்தில் செல்லும் ஓர் இயந்திரப் படகானது 24 கிமீ தூரத்தை நீரின் திசையில் கடக்கும் நேரத்தை விட நீரின் எதிர்திசையில் கடக்க கூடுதலாக 1 மணி நேரம் தேவைப்படுகிறது. நீரின் வேகம் காண்க. **(MDL, PTA-2)**

CQ : ஒரு தொடர் வண்டி ஒரு குறிப்பிட்ட தூரத்தை சீரான வேகத்தில் கடக்கிறது. தொடர் வண்டியின் வேகம் 10 கி.மீ/மணி அதிகரிக்கப்பட்டால் 2 மணி நேரத்திற்கு முன்னதாகவே குறிப்பிட்ட தூரத்தை அடையும். மற்றும் தொடர் வண்டியின் வேகம் 10 கி.மீ/மணி குறைக்கப்பட்டால் 3 மணி நேரத்திற்கு பிறகு அக்குறிப்பிட்ட தூரத்தை அடையுமெனில் அந்த தொடர் வண்டி அடைந்த தூரத்தைக் கணக்கிடுக. **(PTA-5)**

CQ : ஒரு மகிழுந்து புறப்பட வேண்டிய நேரத்திலிருந்து 30 நிமிடம் தாமதமாகப் புறப்பட்டது. 150 கி.மீ தூரத்தில் உள்ள சேருமிடத்தைச் சரியான நேரத்தில் சென்றடைய அதனுடைய வழக்கமான வேகத்தை மணிக்கு 25 கி.மீ அதிகப்படுத்த வேண்டியிருந்தது எனில், மகிழுந்தின் வழக்கமான வேகத்தைக் காண்க. **(PTA-6)**

4. ஒரு பெண்ணின் வயது அவரது சகோதரியின் வயதைப் போல இருமடங்கு ஆகும். ஐந்து ஆண்டுகளுக்குப் பின் இரு வயதுகளின் பெருக்கற்பலன் 375 எனில், சகோதரிகளின் தற்போதைய வயதைக் காண்க. PTA-4

சகோதரியின் வயது $= x,$

பெண்ணின் வயது $= 2x$

ஐந்து வருடங்களுக்கு பின்

சகோதரியின் வயது $= x+5$

பெண்ணின் வயது $= 2x+5$

ஐந்து ஆண்டுகளுக்குப் பின் இரு வயதுகளின் பெருக்கற்பலன் $= 375$

$$(x+5)(2x+5) = 375$$

$$2x^2+5x+10x+25 = 375$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.36: குமரனின் தற்போதைய வயதின் இருமடங்கோடு ஒன்றைக் கூட்டினால் கிடைப்பது, குமரனின் இரண்டாண்டுகளுக்கு முந்தைய வயதையும் அவரின் 4 ஆண்டுகளுக்குப் பிந்தைய வயதையும் பெருக்கக் கிடைப்பதற்குச் சமம் எனில், அவரின் தற்போதைய வயதைக் காண்க. **(PTA-1)** 5M

5M

$$2x^2+15x-350 = 0$$

$$(2x+35)(x-10) = 0$$

$2x+35 = 0$ | $x-10 = 0$

$2x = -35$ | $x = 10$

$x = -\frac{35}{2}$

-700

$\frac{35}{2}$ $\frac{-20}{2}$ -10

$\therefore x = 10$

[x கண்டிப்பாக மிகையாக இருக்க வேண்டும்]

சகோதரியின் வயது $= x = \mathbf{10}$

ஆண்டுகள் பெண்ணின் வயது $= 2x$

$= 2(10) = \mathbf{20}$ ஆண்டுகள்

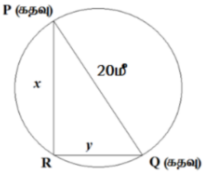
5. 20 மீ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத்தின் பரிதியில் கம்பம் ஒன்று பொருத்தப்பட வேண்டும். ஏதேனும் ஒரு விட்டத்தின் இரு முனைகளில் பொருத்தப்பட்டுள்ள P மற்றும் Q எனும் கதவுகளில் இருந்து கம்பத்திற்கு இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் வித்தியாசம் 4 மீ உள்ளவாறு கம்பம் நடமுடியுமா? ஆம் எனில், இரு கதவுகளிலிருந்து கம்பத்தை எவ்வளவு தொலைவில் பொருத்த வேண்டும்?

5M

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி

$x-y = 4$

$x = 4+y$



படத்திலிருந்து,

ΔPQR ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என்பதால்

$$PQ^2 = PR^2+RQ^2$$

$$20^2 = x^2+y^2$$

$$(4+y)^2+y^2 = 20^2$$

$$16+y^2+8y+y^2 = 400$$

$$2y^2+8y-384 = 0$$

2 ஆல் வகுக்க,

$$y^2+4y-192 = 0$$

$$(y+16)(y-12) = 0$$

-192

+16 -12

$y = -16$ அல்லது 12

y மிகையாக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore y = 12$

$\therefore x = 4+y$

$= 4+12 = 16$

$x = 16$

ஆம், கம்பம் நடமுடியும்.

ஏனெனில் $16-12 = 4$

P லிருந்து **16 மீ** தொலைவிலும் மற்றும் Qலிருந்து **12 மீ** தொலைவிலும் கம்பம் நடமுடியும்.

6. **$2x^2$ எண்ணிக்கையுடைய கருப்பு தேனீக்களின் கூட்டத்திலிருந்து கூட்டத்தின் பாதியின் வர்க்கமூல எண்ணிக்கை கொண்ட தேனீக்கள் ஒரு மரத்துக்குச் செல்கின்றன. மீண்டும் கூட்டத்திலிருந்து ஒன்பதில் எட்டுப் பங்கு கொண்ட தேனீக்கள் அதே மரத்துக்குச் செல்கின்றன. மீதமுள்ள இரண்டு தேனீக்கள் மணம் கமழும் மலரில் சிக்கிக் கொண்டன எனில், மொத்தத் தேனீக்களின் எண்ணிக்கை எத்தனை?** (5M)

கருப்பு தேனீக்களின் எண்ணிக்கை

$= 2x^2$

கூட்டத்தின் பாதியின் வர்க்கமூல எண்ணிக்கை $= \sqrt{x^2} = x$

ஒன்பதில் எட்டுப் பங்கு கொண்ட தேனீக்கள் $= \frac{8}{9}(2x^2) = \frac{16x^2}{9}$

மீதமுள்ள இரண்டு தேனீக்கள் $= 2$

$\therefore 2x^2 - \left[x + \frac{16x^2}{9}\right] = 2$

$2x^2 - \left[\frac{9x+16x^2}{9}\right] = 2$

$18x^2 - 9x - 16x^2 = 18$

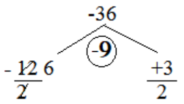
$2x^2 - 9x - 18 = 0$

$(x-6)(2x+3) = 0$

$x - 6 = 0 \quad | \quad 2x + 3 = 0$

$x = 6 \quad | \quad 2x = -3$

$x = -\frac{3}{2}$



$x = 6$ [x ஆனது மிகையாக இருக்க வேண்டும்.]

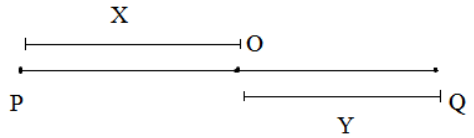
$\therefore$ மொத்தத் தேனீக்களின் எண்ணிக்கை $= 2x^2$

$= 2(6)^2 = 2(36) = 72$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.38: ஓர் இடத்தில் x^2 அன்னங்கள் கூட்டமாக இருந்தன. மேகங்கள் கூடியதால், $10x$ அன்னங்கள் ஏரிக்குச் சென்றன; எட்டில் ஒரு பங்கு தோட்டத்திற்குப் பறந்தன. மீதமுள்ள மூன்று ஜோடிகள் நீரில் விளையாடின எனில், மொத்த அன்னங்களின் எண்ணிக்கையைக் காண்க? (5M)

7. **70 மீ இடைப்பட்ட தொலைவில் உள்ள இரு அரங்குகளில் இசை ஒலிக்கப்படுகிறது. முதல் அரங்கில் 4 பாடகர்களும் இரண்டாம் அரங்கில் 9 பாடகர்களும் பாடுகிறார்கள். சம ஒலி அளவில் இசையைக் கேட்க விரும்பும் ஒரு நபர் இரு அரங்கங்களுக்கு இடையில் எங்கு நிற்க வேண்டும்? (குறிப்பு ஒலி அளவுகளின் விகிதமும், இடைப்பட்ட தொலைவுகளின் வர்க்கத்தின் விகிதமும் சமம்).** (5M)



P-முதல் அரங்கம், Q-இரண்டாம் அரங்கம்

அரங்கங்களுக்கிடையேயான தொலைவு$= 70$ மீ

ஒரு நபர் இரு அரங்கங்களுக்கு இடையில் நிற்கும் புள்ளி O என்க

முதல் அரங்கில் பாடகர்களின் எண்ணிக்கை(P) $= 4$

2-ம் அரங்கில் பாடகர்களின் எண்ணிக்கை (Q) $= 9$

P மற்றும் O-வுக்கு இடையேயான தொலைவு $= x$மீ

Q மற்றும் O-வுக்கு இடையேயான தொலைவு $= y$மீ

$x + y = 70$.......... (1)

$\frac{4}{9} = \frac{x^2}{y^2}$

இருபுறமும் வர்க்கமூலம் எடுக்க

$\frac{2}{3} = \frac{x}{y}$

$x = \frac{2y}{3}$............. (2)

(2)-ஐ (1)-ல் பிரதியிட

$x + y = 70$

$\frac{2y}{3} + y = 70$

$2y + 3y = 70 \times 3$

$5y = 210$

$y = \frac{210}{5}$

$y = 42$ மீ

$y = 42$ மீ என (1)-ல் பிரதியிட

$x + y = 70$

$x + 42 = 70$

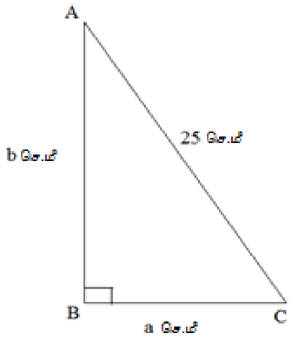
$x = 70 - 42$

$= 28$

$x = 28$ மீ

அந்த நபர் P-லிருந்து **28 மீ** தொலைவிலும் Q-லிருந்து **42 மீ** தொலைவிலும் நிற்க வேண்டும்.

9. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் 25 செ.மீ மற்றும் அதன் சுற்றளவு 56 செ.மீ எனில், முக்கோணத்தின் சிறிய பக்கத்தின் அளவைக் காண்க. 5M



$b = a$ செ.மீ

$h = b$ செ.மீ

கர்ணம் $= 25$ செ.மீ

சுற்றளவு $= 56$ செ.மீ

$a + b + 25 = 56$

$a + b = 56 - 25$

$a + b = 31$

$b = 31 - a$

$a^2 + b^2 = 25^2$

$a^2 + (31 - a)^2 = 25^2$

$a^2 + 961 + a^2 - 62a = 625$

$2a^2 - 62a + 961 - 625 = 0$

$2a^2 - 62a + 336 = 0$

2-ஆல் வகுக்க

$a^2 - 31a + 168 = 0$

168: -31 → -24, -7

$(a - 24)(a - 7) = 0$

$a = 24 \quad | \quad a = 7$

∴ முக்கோணத்தின் சிறிய பக்கத்தின் அளவு **7 செ.மீ**

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.37: 2M
17 அடி நீளமுள்ள ஓர் ஏணி ஒரு சுவரின் மீது சாய்ந்துள்ளது. தரை, ஏணி மற்றும் செங்குத்துச் சுவர் மூன்றும் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன. சுவரின் அடியிலிருந்து ஏணியின் அடி முனை வரை உள்ள தூரம் ஏணியின் மேல் முனை சுவரைத் தொடும் உயரத்தைவிட 7 அடி குறைவு எனில், சுவரின் உயரம் காண்க.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப்பயிற்சி: 13. ஒரு கடிகாரத்தில் பிற்பகல் 2 மணியிலிருந்து t நிமிடங்களுக்குப் பிறகு 3 மணியை அடைவதற்கு உரிய கால அளவானது $\frac{t^2}{4}$-ஐ விட 3 நிமிடங்கள் குறைவு எனில், t-யின் மதிப்பைக் காண்க. 5M

14. ஓர் அரங்கில், ஒரு வரிசையில் உள்ள இருக்கைகளின் எண்ணிக்கை அந்த அரங்கில் உள்ள மொத்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம். ஒவ்வொரு வரிசையில் உள்ள இருக்கைகளை 5 குறைத்து மொத்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கையை இரட்டிப்பாக்கினால் அரங்கில் உள்ள இருக்கைகளின் எண்ணிக்கை முன்பைவிட 375 அதிகரிக்கும். அரங்கில் துவக்கத்தில் இருந்த வரிசைகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

பயிற்சி 3.13

1. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையைக் கூறுக. JUN-23, SEP-21 2M

(i) $15x^2 + 11x + 2 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ உடன் ஒப்பிட,

$a = 15, b = 11, c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 11^2 - 4(15)(2) = 121 - 120$

$\Delta = 1$, இங்கு $\Delta > 0$

∴ மூலங்கள் **மெய் மற்றும் சமமில்லை**

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

1. பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையைக் கூறுக.
(ii) $x^2 - x - 1 = 0$ (iii) $\sqrt{2}t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$ (iv) $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$
(v) $9a^2b^2x^2 - 24abcdx + 16c^2d^2 = 0, a \neq 0, b \neq 0$

CQ: பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையைக் காண்க.
$2x^2 - x - 1 = 0$ (APR-23)

எ.கா.3.40: பின்வரும் இருபடிச் சமன்பாடுகளின் மூலங்களின் தன்மையைக் காண்க.
(i) $x^2 - x - 20 = 0$ (ii) $9x^2 - 24x + 16 = 0$ (iii) $2x^2 - 2x + 9 = 0$

2. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், k-யின் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $(5k - 6)x^2 + 2kx + 1 = 0$

$\Delta = 0$

$a = 5k - 6, \quad b = 2k, \quad c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$b^2 - 4ac = 0$

$(2k)^2 - 4(5k - 6)(1) = 0$

$4k^2 - 20k + 24 = 0$

4 ஆல் வகுக்க

$k^2 - 5k + 6 = 0$

6: -5 → -3, -2

$(k - 3)(k - 2) = 0$

$k - 3 = 0 \quad | \quad k - 2 = 0$

$k = 3 \quad | \quad k = 2$

∴ $\boldsymbol{k = 2, 3}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், k-யின் மதிப்பைக் காண்க. (ii) $kx^2 + (6k + 2)x + 16 = 0$ 2M

எ.கா.3.41: (i) இருபடிச் சமன்பாட்டு $kx^2 - (8k + 4)x + 81 = 0$-யின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், 'k'-யின் மதிப்பைக் காண்க.
(ii) $(k + 9)x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ -யின் மூலங்கள் மெய் இல்லை எனில், k-யின் மதிப்பைக் காண்க.

CQ: $9x^2 + 3kx + 4 = 0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில் k-ன் மதிப்பு காண்க. **(SEP - 20)**

5. $(c^2-ab)x^2-2(a^2-bc)x+b^2-ac=0$ என்ற சமன்பாட்டில் மூலங்கள் சமம் மற்றும் மெய் எனில், $a=0$ அல்லது $a^3+b^3+c^3=3abc$ என நிரூபி. PTA-6 5M

$\Delta=0$

$a=c^2-ab,\ \ b=-2(a^2-bc),$

$c=b^2-ac$

$b^2-4ac=0$

$$b^2-4ac=\left(-2(a^2-bc)\right)^2-4(c^2-ab)(b^2-ac)$$
$$=4(a^4+b^2c^2-2a^2bc)-4(c^2b^2-ac^3-ab^3+a^2bc)$$
$$=4[a^4+b^2c^2-2a^2bc-c^2b^2+ac^3+ab^3-a^2bc]$$
$$=4[a^4+ac^3+ab^3-3a^2bc]$$
$$=4a[a^3+b^3+c^3-3abc] \qquad \because b^2-4ac=0$$

$4a(a^3+b^3+c^3-3abc)=0$

$4a=0 \ \mid\ a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$a=0 \ \mid\ a^3+b^3+c^3=3abc$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

3. $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமம் எனில், b,a,c ஆகியவை ஒரு கூட்டுத் தொடர்வரிசையை அமைக்கும் என நிறுவுக.

4. a மற்றும் b மெய் எண்கள் எனில், $(a-b)x^2-6(a+b)x-9(a-b)=0$-ன் மூலங்கள் மெய் மற்றும் சமமில்லை என நிரூபிக்கவும்.

எ.கா.3.42: $x^2(p^2+q^2)+2x(pr+qs)+r^2+s^2=0$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு மெய் மூலங்கள் இல்லை எனக் காட்டுக. மேலும் $ps=pr$, எனில், மூலங்கள் மெய்யானவை மற்றும் சமம் என நிறுவுக.

CQ: $(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம் எனில், $c^2=a^2(1+m^2)$ (SEP - 21)

பயிற்சி 3.14

1. கீழே கொடுக்கப்பட்ட கோவைகளை $\alpha+\beta$ மற்றும் $\alpha\beta$ வாயிலாக மாற்றி எழுதுக. 2M

(i) $\frac{\alpha}{3\beta}+\frac{\beta}{3\alpha}$

$$\frac{\alpha}{3\beta}+\frac{\beta}{3\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{3\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{3\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{3\alpha\beta}$$

(ii) $\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\beta^2\alpha}$

$$\frac{1}{\alpha^2\beta}+\frac{1}{\beta^2\alpha}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha^2\beta^2}=\frac{\alpha+\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

(iii) $(3\alpha-1)(3\beta-1)$

$$(3\alpha-1)(3\beta-1)=9\alpha\beta-3\alpha-3\beta+1=9\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+1$$

(iv) $\frac{\alpha+3}{\beta}+\frac{\beta+3}{\alpha}$

$$\frac{\alpha+3}{\beta}+\frac{\beta+3}{\alpha}=\frac{\alpha^2+3\alpha+\beta^2+3\beta}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

2. $2x^2-7x+5=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. [குறிப்பு: தீர்வு தேவையில்லை] (i) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (iii) $\frac{\alpha+2}{\beta+2}+\frac{\beta+2}{\alpha+2}$ 5M

$2x^2-7x+5=0$

$a=2, b=-7, c=5$

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

$\alpha+\beta=\frac{7}{2}$,

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta=\frac{5}{2}$

(i) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{7}{2}\times\frac{2}{5}=\mathbf{\frac{7}{5}}$$

(ii) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\left(\frac{5}{2}\right)}{\frac{5}{2}}=\frac{\frac{49}{4}-5}{\frac{5}{2}}=\frac{49-20}{4}\times\frac{2}{5}=\mathbf{\frac{29}{10}}$$

(iii) $\frac{\alpha+2}{\beta+2}+\frac{\beta+2}{\alpha+2}$

$$\frac{\alpha+2}{\beta+2}+\frac{\beta+2}{\alpha+2}=\frac{(\alpha+2)^2+(\beta+2)^2}{(\alpha+2)(\beta+2)}$$

$$=\frac{\alpha^2+4\alpha+4+\beta^2+4\beta+4}{\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+4(\alpha+\beta)+8}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+8}{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4}$$

$$=\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^2-2\left(\frac{5}{2}\right)+4\left(\frac{7}{2}\right)+8}{\frac{5}{2}+2\left(\frac{7}{2}\right)+4}$$

$$=\frac{\frac{49}{4}-5+14+8}{\frac{5}{2}+7+4}$$

$$=\frac{\frac{49}{4}+17}{\frac{5}{2}+11}=\frac{\frac{49+68}{4}}{\frac{5+22}{2}}=\frac{117}{4}\times\frac{2}{27}=\frac{117}{54}=\mathbf{\frac{13}{6}}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

3. $x^2+6x-4=0$-யின் மூலங்கள் α,β எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க. (5M)
(i) α^2 மற்றும் β^2 (ii) $\frac{2}{\alpha}$ மற்றும் $\frac{2}{\beta}$ (iii) $\alpha^2\beta$ மற்றும் $\beta^2\alpha$

அலகுப்பயிற்சி: 15. $f(x)=x^2-2x+3$, என்ற பல்லுறுப்புக் கோவையின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவையைக் காண்க. (i) $\alpha+2,\beta+2$ (ii) $\frac{\alpha-1}{\alpha+1},\frac{\beta-1}{\beta+1}$ (2M)

எ.கா.3.44: $x^2+7x+10=0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. (i) $(\alpha-\beta)$ (ii) $\alpha^2+\beta^2$ (2M)
(iii) $\alpha^3-\beta^3$ (iv) $\alpha^4+\beta^4$ (v) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (vi) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$

எ.கா.3.45: $3x^2+7x-2=0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் காண்க. (i) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ (2M)

எ.கா.3.46: $2x^2-x-1=0$, என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் α மற்றும் β எனில், கீழே கொடுக்கப்பட்ட மூலங்களையுடைய இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க. (i) $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ (ii) $\alpha^2\beta,\ \beta^2\alpha$ (iii) $2\alpha+\beta,\ 2\beta+\alpha$ **(MDL)** (2M)

4. **α,β என்பன $7x^2+ax+2=0$-யின் மூலங்கள் மற்றும் $\beta-\alpha=-\frac{13}{7}$ எனில், a-யின் மதிப்புக் காண்க.**
PTA-6, MAY-22 (5M)

$$7x^2+ax+2=0$$
$$a=7,b=a,c=2$$
$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-a}{7}$$
$$\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{2}{7}$$
$$(\beta-\alpha)=-\frac{13}{7}$$

இங்கு, $(\beta-\alpha)^2=\left(-\frac{13}{7}\right)^2$

$$\beta^2+\alpha^2-2\beta\alpha=\frac{169}{49}$$
$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2\alpha\beta=\frac{169}{49}$$
$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{169}{49}$$
$$\left(-\frac{a}{7}\right)^2-4\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{169}{49}$$
$$\frac{a^2}{49}-\frac{8}{7}=\frac{169}{49}$$
$$\frac{a^2}{49}=\frac{169}{49}+\frac{8}{7}$$
$$\frac{a^2}{49}=\frac{169+56}{49}$$
$$a^2=\frac{225}{49}\times 49$$
$$a^2=225$$
$$a=\pm 15$$
$$\mathbf{a=15,-15}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5. $2y^2-ay+64=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றவை போல இருமடங்கு எனில் a-யின் மதிப்புக் காண்க. (5M)
6. மெய்யெண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட $3x^2+kx+81=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றொரு மூலத்தின் வர்க்கம் எனில் k-யின் மதிப்புக் காண்க. (5M)

அலகுப்பயிற்சி: 16. $x^2+px-4=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் -4 மற்றும் $x^2+px+q=0$-யின் மூலங்கள் சமம் எனில், p மற்றும் q-யின் மதிப்புக் காண்க. (5M)

எ.கா.3.43 $x^2-13x+k=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் வித்தியாசம் 17 எனில், k-யின் மதிப்புக் காண்க. (5M)

CQ: $px^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-1=0$ என கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் மற்றும் $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில், p-ன் மதிப்பு காண்க. **(PTA-5)** (2M)

பயிற்சி 3.17

1. $A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & -11 & 1 \end{bmatrix}$ என்ற அணியில் (i) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (2M)

(ii) அணியின் வரிசையைக் காண்க. **(iii)** $a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{34}, a_{43}, a_{44}$ ஆகிய உறுப்புகளை எழுதுக.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 4 & 3 \\ -1 & \sqrt{7} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & -11 & 1 \end{bmatrix}$$

இங்கு $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

(i) உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $= \mathbf{16}$ (ii) அணியின் வரிசை $\mathbf{4 \times 4}$

(iii) $a_{22} = \sqrt{\mathbf{7}},\ a_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ a_{24} = \mathbf{5},\ a_{34} = \mathbf{0},\ a_{43} = \mathbf{-11},\ a_{44} = \mathbf{1}$

2. 18 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஓர் அணிக்கு எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்? ஓர் அணியின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 6 எனில், எவ்வகை வரிசைகள் இருக்க இயலும்? (2M)

$m \times n$ வரிசையுடைய அணிக்கு mn உறுப்புகள் இருக்கும். இங்கு 18 உறுப்புகளை ஓர் அணி கொண்டிருப்பதால் கீழ்க்கண்ட வரிசைகள் இருக்க இயலும். $1 \times 18,\ 2 \times 9,\ 3 \times 6,\ 6 \times 3,\ 9 \times 2,\ 18 \times 1$ இதே போல் 6 உறுப்புகளை ஓர் அணி கொண்டு இருந்தால் கீழ்க்கண்ட வரிசைகள் இருக்க இயலும்.
$1 \times 6,\ 2 \times 3,\ 3 \times 2,\ 6 \times 1$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.57: ஓர் அணியானது 16 உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால், அந்த அணிக்கு எத்தனை விதமான வரிசைகள் இருக்கும்? (2M)

3. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு 3×3 வரிசையைக் கொண்ட அணி $A = [a_{ij}]$-யினைக் காண்க. (2M)

(i) $a_{ij} = |i - 2j|$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$a_{11} = |1 - 2(1)| = |1 - 2| = |-1| = 1$

$a_{12} = |1 - 2(2)| = |1 - 4| = |-3| = 3$

$a_{13} = |1 - 2(3)| = |1 - 6| = |-5| = 5$

$a_{21} = |2 - (2)(1)| = |2 - 2| = |0| = 0$

$a_{22} = |2 - 2(2)| = |2 - 4| = |-2| = 2$

$a_{23} = |2 - 2(3)| = |2 - (6)| = |-4| = 4$

$a_{31} = |3 - 2(1)| = |3 - 2| = |1| = 1$

$a_{32} = |3 - 2(2)| = |3 - 4| = |-1| = 1$

$a_{33} = |3 - 2(3)| = |3 - 6| = |-3| = 3$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 9 \\ 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், A-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க. (2M) PTA-2

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 8 \\ 3 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

5. $A = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & -3 \\ -\sqrt{5} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$ எனில், $-A$-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணியைக் காண்க. SEP-20 (2M)

$$-A = \begin{bmatrix} -\sqrt{7} & 3 \\ \sqrt{5} & -2 \\ -\sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}$$

$-A$-யின் நிரை நிரல் மாற்று அணி

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{7} & \sqrt{5} & -\sqrt{3} \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

3. பின்வருவனவற்றைக் கொண்டு 3×3 வரிசையைக் கொண்ட அணி $A = [a_{ij}]$-யினைக் காண்க. (ii) $a_{ij} = \frac{(i+j)^3}{3}$ (2M)

எ.கா.3.58: $a_{ij} = i^2 j^2$ என்ற அமைப்பைக் கொண்ட 3×3 வரிசையுடைய அணியைக் காண்க.

6. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $(A^T)^T = A$ என்பதனைச் சரிபார்க்க. JUN-23 (2M)

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{17} & 8 \\ 2 & 0.7 & 3 \\ 2 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -\sqrt{17} & 0.7 & \frac{5}{2} \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore (A^T)^T = A$ என சரிபார்க்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

7. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளில் இருந்து x, y மற்றும் z –யின் மதிப்பைக் காண்க. (i) $\begin{bmatrix} 12 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (2M)

(iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ (5M)

எ.கா.3.59: $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ என்ற அணி சமன்பாட்டிலிருந்து a, b, c, d மதிப்புகளைக் காண்க. (2M)

7. கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளில் இருந்து x, y மற்றும் z-யின் மதிப்பைக் காண்க

(ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (5M)

$$\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$x + y = 6$............ (1)

$xy = 8$ .... (2)

$5 + z = 5$

$z = 5 - 5$

$z = 0$

(1)-லிருந்து, $x = 6 - y$

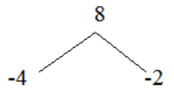
$xy = 8$

$(6 - y)y = 8 \Rightarrow 6y - y^2 = 8$

$\therefore y^2 - 6y + 8 = 0$

$(y - 4)(y - 2) = 0$

$y = 4$ மற்றும் 2



$y = 4$ எனில்	$y = 2$ எனில்
$x = 6 - y$	$x = 6 - y$
$x = 6 - 4$	$x = 6 - 2$
$x = 2$	$x = 4$

$x = 2$ **மற்றும்** 4, $y = 4$ **மற்றும்** 2, $z = 0$

பயிற்சிக்காக:

எ.கா.3.56: I, II, III என்ற மூன்று தொழிற்சாலைகளில் பணி புரியும் ஆண்கள், பெண்கள் பற்றிய விவரம் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

தொழிற்சாலை	ஆண்கள்	பெண்கள்
I	23	18
II	47	36
III	15	16

மேற்கண்ட தகவலை ஓர் அணி அமைப்பில் எழுதுக. இதில் இரண்டாவது நிரை மற்றும் முதலாவது நிரல் இடத்திலுள்ள உறுப்பு எதனைக் குறிக்கிறது? **(2M)**

அலகுப்பயிற்சி: 17. திலகன், கௌசிகன் என்ற இரு விவசாயிகள் அரிசி, கோதுமை மற்றும் கேழ்வரகு ஆகிய மூன்று தானியங்களைப் பயிரிட்டனர். ஏப்ரல் மாதத்தில் இருவருக்குமான தானியங்களின் விற்பனை விலை கீழ்க்கண்ட அணியில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

அரிசி கோதுமை கேழ்வரகு

ஏப்ரல் மாத விற்பனை (ரூபாயில்) $A = \begin{bmatrix} 500 & 1000 & 1500 \\ 2500 & 1500 & 500 \end{bmatrix}$ திலகன் / கௌசிகன்

மேலும் மே மாத விலை ஏப்ரல் மாத விலையின் இருமடங்கு எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை காண்க.
(i) ஏப்ரல், மே மாதங்களின் சராசரி விற்பனை யாது? (ii) இதேபோல் விலை தொடர்ந்து வரும் மாதங்களில் ஏற்றமடைந்தால் ஆகஸ்ட் மாத விலையைக் காண்க. **(5M)**

பயிற்சி 3.18

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **எனில், பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க. (i)** $A + B = B + A$ (2M)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 6 & 7 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \text{....... (1)}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 4 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 16 \\ 6 & 7 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \text{........(2)}$$

$(1) = (2)$

$\therefore A + B = B + A$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. $A=\begin{bmatrix}1 & 9\\3 & 4\\8 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 7\\3 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க. (ii) $A+(-A)=(-A)+A=O$. **2M**

2. $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 1\\2 & 3 & -8\\1 & 0 & -4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 9 & 2\\-7 & 1 & -1\end{bmatrix}$ மற்றும் $C=\begin{bmatrix}8 & 3 & 4\\1 & -2 & 3\\2 & 4 & -1\end{bmatrix}$ எனில், $A+(B+C)=(A+B)+C$ என்பதைச் சரிபார்க்க. **5M**

எ.கா.3.60: $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 7 & 0\\1 & 3 & 1\\2 & 4 & 0\end{bmatrix}$ எனில், $A+B$-ஐக் காண்க. **2M**

எ.கா.3.62: $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\5 & -4 & 6\\-3 & 2 & 9\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 8\\3 & 4\\9 & 6\end{bmatrix}$ எனில், $A+B$-ஐக் காண்க. **2M**

3. **$X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}$ மற்றும் $X-Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$ எனில், X மற்றும் Y ஆகிய அணிகளைக் காண்க.** **2M**

$$X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}\text{.......... }(1)$$

$$X-Y=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\text{.......... }(2)$$

$(1)+(2)\Rightarrow$

$$2X=\begin{bmatrix}7 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$$

$$2X=\begin{bmatrix}10 & 0\\3 & 9\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{10}{2} & 0\\\frac{3}{2} & \frac{9}{2}\end{bmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{0}\\\mathbf{3/2} & \mathbf{9/2}\end{bmatrix}$$

$(1)-(2)\Rightarrow$

$$2Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}\frac{4}{2} & 0\\\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{0}\\\mathbf{3/2} & \mathbf{1/2}\end{bmatrix}$$

4. **$A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\8 & 3 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}7 & 3 & 8\\1 & 4 & 9\end{bmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) $B-5A$ (ii) $3A-9B$** **2M** PTA-5

(i) $B-5A$

$$B=\begin{bmatrix}7 & 3 & 8\\1 & 4 & 9\end{bmatrix}$$

$$5A=5\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\8 & 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 20 & 45\\40 & 15 & 35\end{bmatrix}$$

$$B-5A=\begin{bmatrix}7 & 3 & 8\\1 & 4 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 20 & 45\\40 & 15 & 35\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{-17} & \mathbf{-37}\\\mathbf{-39} & \mathbf{-11} & \mathbf{-26}\end{bmatrix}$$

(ii) $3A-9B$

$$3A=3\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\8 & 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 12 & 27\\24 & 9 & 21\end{bmatrix}$$

$$9B=9\begin{bmatrix}7 & 3 & 8\\1 & 4 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}63 & 27 & 72\\9 & 36 & 81\end{bmatrix}$$

$$3A-9B=\begin{bmatrix}0 & 12 & 27\\24 & 9 & 21\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}63 & 27 & 72\\9 & 36 & 81\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{-63} & \mathbf{-15} & \mathbf{-45}\\\mathbf{15} & \mathbf{-27} & \mathbf{-60}\end{bmatrix}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.3.63: $A=\begin{bmatrix}7 & 8 & 6\\1 & 3 & 9\\-4 & 3 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 11 & -3\\-1 & 2 & 4\\7 & 5 & 0\end{bmatrix}$ எனில், $2A+B$-ஐக் காண்க. **(PTA-3)** **2M**

எ.கா.3.64: $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & -2\\\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \sqrt{2}\\1 & 9 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-7 & 4 & -3\\\frac{1}{4} & \frac{7}{2} & 3\\5 & -6 & 9\end{bmatrix}$ எனில், $4A-3B$-ஐக் காண்க. **2M**

எ.கா.3.66: $A=\begin{bmatrix}1 & 8 & 3\\3 & 5 & 0\\8 & 7 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}8 & -6 & -4\\2 & 11 & -3\\0 & 1 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\-1 & -7 & 2\\1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) $3A+2B-C$ (ii) $\frac{1}{2}A-\frac{3}{2}B$ **2M**

CQ: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 3\\-1 & 5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 5\\1 & 3\end{bmatrix}$, எனில் $A(BC)=(AB)C$ என நிறுவுக. **(PTA-6)** **5M**

5. பின்வரும் அணிச் சமன்பாடுகளில் இருந்து x, y, மற்றும் z-களின் மதிப்புகளைக் காண்க. 5M

(ii) $\mathbf{(x \quad y-z \quad z+3) + (y \quad 4 \quad 3) = (4 \quad 8 \quad 16)}$ PTA-5

$(x+y \quad y-z+4 \quad z+6) = (4 \quad 8 \quad 16)$

$z+6=16$	$y-z+4=8$	$x+y=4$
$z=16-6$	$y-10=8-4$	$x+14=4$
$z=10$	$y-10=4$	$x=4-14$
	$y=4+10$	$x=-10$
	$y=14$	

$\therefore \mathbf{x=-10, y=14, z=10}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5. பின்வரும் அணிச் சமன்பாடுகளில் இருந்து x, y, மற்றும் z-களின் மதிப்புகளைக் காண்க. 2M

(i) $\begin{bmatrix} x-3 & 3x-z \\ x+y+7 & x+y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

எ.கா.3.65: கீழ்க்கண்ட அணிச் சமன்பாட்டிலிருந்து a, b, c, d ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க. 5M

$\begin{bmatrix} d & 8 \\ 3b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ b & 4c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}}$ **எனில், x மற்றும் y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.** 2M

$$\begin{bmatrix} 4x \\ -3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2y \\ 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x-2y \\ -3x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$4x-2y=4$

$\div 2 \quad 2x-y=2 \ldots\ldots\ldots (1)$

$-3x+3y=6$

$\div 3 \quad -x+y=2 \ldots\ldots\ldots (2)$

$(1) \Rightarrow 2x-y=2$

$(2) \Rightarrow -x+y=2$

$x \quad = 4$

$x=4$ என (2)-ல் பிரதியிட

$-x+y=2$

$-4+y=2$

$y=2+4$

$y=6$

$\therefore \mathbf{x=4, y=6}$

7. $\mathbf{x\begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x^2+8 & 24 \\ 10 & 6x \end{bmatrix}}$ **என்ற அணிச் சமன்பாட்டில் x-ன் பூச்சியமற்ற மதிப்பைக் காண்க.** PTA-4

$x\begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x^2+8 & 24 \\ 10 & 6x \end{bmatrix}$ 5M

$$\begin{bmatrix} 2x^2 & 2x \\ 3x & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 10x \\ 8 & 8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2+16 & 48 \\ 20 & 12x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x^2+16 & 12x \\ 3x+8 & x^2+8x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2+16 & 48 \\ 20 & 12x \end{bmatrix}$$

உறுப்புகளை ஒப்பிட

$12x=48$

$\Rightarrow x=\frac{48}{12}$

$\mathbf{x=4}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

8. x, y-ஐத் தீர்க்க.: $\begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ 2M

அலகுப்பயிற்சி: 18. $\cos\theta\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} x & -\cos\theta \\ \cos\theta & x \end{bmatrix} = I_2$ எனில், x-ஐக் காண்க. 5M

பயிற்சிக்காக:

எ.கா.3.61: குழு 1, குழு 2, குழு 3 எனும் மூன்று குழுக்களில் உள்ள மாணவர்களுக்கு இரண்டு தேர்வுகள் நடத்தப்பட்டுத் தமிழ், ஆங்கிலம், அறிவியல், மற்றும் கணிதம் ஆகிய பாடங்களில் அவர்கள் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்களை A மற்றும் B என்ற அணிகளாகக் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில், மூன்று குழுக்களில் உள்ள மாணவர்கள், இரண்டு தேர்வுகளிலும் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்களைக் காண்க.

A

	தமிழ்	ஆங்கிலம்	அறிவியல்	கணிதம்
குழு 1	22	15	14	23
குழு 2	50	62	21	30
குழு 3	53	80	32	40

B

	தமிழ்	ஆங்கிலம்	அறிவியல்	கணிதம்
குழு 1	20	38	15	40
குழு 2	18	12	17	80
குழு 3	81	47	52	18

(2M)

பயிற்சி 3.19

1. A, B என்ற அணிகள் கீழ்க்கண்டவாறு இருப்பின் AB-யின் வரிசையைக் காண்க. (i) $A \,\&\, B = 3 \times 3$

(i) A-யின் வரிசை = 3×3
B-யின் வரிசை = 3×3

$\therefore$ AB-யின் வரிசை $= \mathbf{3 \times 3}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
A-யின் வரிசைகள்	4×3	4×2	4×5	1×1
B-யின் வரிசைகள்	3×2	2×2	5×1	1×3

2M

2. அணி A-யின் வரிசை $p \times q$ மற்றும் அணி B-யின் வரிசை $q \times r$ இரு அணிகளையும் பெருக்க முடியும் எனில், AB மற்றும் BA ஆகியவற்றின் வரிசையைக் காண்க. 2M PTA-1

A-யின் வரிசை = $p \times q$
B-யின் வரிசை = $q \times r$

AB-யின்வரிசை $= p \times r$

BA-யின் வரிசையை வரையறுக்க முடியாது.

ஏனெனில்,

B-யின் வரிசை $= q \times r$

A-யின் வரிசை $= p \times q$

B-யின் நிரல் $\neq A$-யின் நிரை

3. அணி A-யில் 'a' நிரைகளும் '$a+3$' நிரல்களும் மற்றும் அணி B-யில் 'b' நிரைகளும் '$17-b$' நிரல்களும் உள்ளன. பெருக்கல் அணிகள் AB மற்றும் BA-ஐக் காண முடியும் எனில், a மற்றும் b-யின் மதிப்பைக் காண்க. 2M

AB காண முடியும் எனில்
A-யின் நிரல் $= B$-யின் நிரை $a + 3 = b \Rightarrow a - b = -3 \ldots\ldots (1)$
BA காண முடியும் எனில் B-யின் நிரல் $= A$-யின் நிரை
$17 - b = a \Rightarrow \quad a + b = 17 \ldots\ldots. (2)$

$(1) \Rightarrow a - b = -3$
$(2) \Rightarrow a + b = 17$

$2a = 14 \Rightarrow a = 7$

$a = 7$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$7 - b = -3$$
$$-b = -3 - 7 = -10$$
$$b = 10$$
$$\therefore \mathbf{a = 7,\ b = 10}$$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ எனில், $A(B+C) = AB + AC$-ஐச் சரிபார்க்கவும். 5M

LHS: $B + C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

$A(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2-3 & 2+18 & 4+15 \\ 10+1 & 10-6 & 20-5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 20 & 19 \\ 11 & 4 & 15 \end{bmatrix} \ldots\ldots (1)$

RHS: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1+9 & -1+15 & 2+6 \\ 5-3 & -5-5 & 10-2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 2 & -10 & 8 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-12 & 3+3 & 2+9 \\ 5+4 & 15-1 & 10-3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -11 & 6 & 11 \\ 9 & 14 & 7 \end{bmatrix}$

$AB + AC = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 2 & -10 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 6 & 11 \\ 9 & 14 & 7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 20 & 19 \\ 11 & 4 & 15 \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots (2)$

$\therefore$ $(1) = (2) \Rightarrow$ $\mathbf{A(B+C) = AB + BC}$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **எனில், இவ்விரு அணிகளுக்கும் பரிமாற்றுப் பண்பு $AB = BA$ உண்மை என நிறுவுக.** (5M)

LHS: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-6 & -2+2 \\ 3-3 & -6+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$.... (1)

RHS: $BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-6 & 2-2 \\ -3+3 & -6+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$......... (2)

$(1) = (2)$

$\therefore \boldsymbol{AB = BA},$

$A\&B$ இவ்விரு அணிகளுக்கும் பரிமாற்றுப் பண்பு உண்மையாகும் நிரூபிக்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ எனில், AB மற்றும் BA-ஐக் காண்க. மேலும், $AB = BA$ சரியா என ஆராய்க. (2M)

எ.கா.3.67: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், AB-ஐக் காண்க.

எ.கா.3.68: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ எனில் AB மற்றும் BA காண்க. மேலும் $AB = BA$ என்பது சரியா என ஆராய்க.

எ.கா.3.69: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ எனில், அணியின் பெருக்கலைப் பொறுத்து A மற்றும் B என்ற அணிகளுக்குப் பரிமாற்று விதி உண்மை எனக் காட்டுக.

7. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும். (i)** $\boldsymbol{A(BC) = (AB)C}$ (5M)

(i) $\boldsymbol{A(BC) = (AB)C}$

LHS: $BC = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 2+5 & 0+10 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$

$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8+14 & 0+20 \\ 8+21 & 0+30 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 20 \\ 29 & 30 \end{bmatrix}$............... (1)

RHS: $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+2 & 0+10 \\ 4+3 & 0+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}$

$(AB)C = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 7 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12+10 & 0+20 \\ 14+15 & 0+30 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 22 & 20 \\ 29 & 30 \end{bmatrix}$............... (2)

$(1) = (2)$

$\boldsymbol{A(BC) = (AB)C}$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும். (5M)
(ii) $(A-B)C = AC - BC$ (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$

எ.கா.3.71: $A = [1 \ -1 \ 2]$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ மற்றும் $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ எனில் $(AB)C = A(BC)$ எனக் காட்டுக. (5M)

எ.கா.3.72 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ எனில், $A(B+C) = AB + AC$ என்பதைச் சரிபார்க்க. **(PTA-1)** (5M)

அலகுப்பயிற்சி:

19. $A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ மற்றும் $BA = C^2$ எனில், p, q-ஐக் காண்க. (5M)

20. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $CD - AB = 0$ எனுமாறு அணி D-ஐக் காண்க. (5M)

12. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}}$ எனில், $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$ என்பதைச் சரிபார்க்கவும். APR-23,PTA-3 (5M)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

LHS: $AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5+2+45 & 35+4-9 \\ 1+2+40 & 7+4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 & 30 \\ 43 & 3 \end{bmatrix}$$

$(AB)^T = \begin{bmatrix} 52 & 43 \\ 30 & 3 \end{bmatrix}$............ (1)

RHS: $A^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}, \; B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$B^TA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+2+45 & 1+2+40 \\ 35+4-9 & 7+4-8 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 52 & 43 \\ 30 & 3 \end{bmatrix}$............ (2)

$(1) = (2) \Rightarrow (\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

9. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ எனில், $AA^T = I$ எனக் காட்டுக. (2M)

எ.கா.3.73: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ எனில் $(AB)^T = B^TA^T$ என்பதைச் சரிபார்க்க. **(SEP-20)** (5M)

13. $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$ எனில், $\boldsymbol{A^2 - 5A + 7I_2 = 0}$ என நிறுவுக. JUN-23 (5M)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5A = 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$7I_2 = 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$A^2 - 5A + 7I_2$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7+7 & 0+0 \\ 0+0 & -7+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 0$

$\therefore A^2 - 5A + 7I_2 = 0$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

8. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 + B^2 = I$ என நிறுவுக. (5M)

10. $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 = I$ என்பதைச் சரிபார்க்க. (2M)

11. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ எனில், $A^2 - (a+d)A = (bc - ad)I_2$ என நிறுவுக. (5M)

CQ: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, எனில், $A^2 - 4A + 5I_2 = 0$ என நிரூபிக்க. **(PTA – 5)** (5M)

பயிற்சிக்காக: எ.கா.3.70: தீர்க்க: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ **(2M)**

அலகுப்பயிற்சிக்கான குறிப்பு

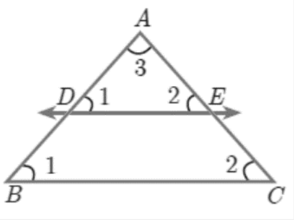
வினா எண்: 1 - பயிற்சி 3.1 ல் - 1 (iii) ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 10 - பயிற்சி 3.10 ல் - 1 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 2 - பயிற்சி 3.1 ல் - 4 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 11 - பயிற்சி 3.12 ல் - 3 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 3 - பயிற்சி 3.1 ல் - 5 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 12 - பயிற்சி 3.12 ல் - 2 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 4 - பயிற்சி 3.2 ல் - 2 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 13,14 - பயிற்சி 3.12 ல் - 9 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 5 - பயிற்சி 3.2 ல் - 1 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 15 - பயிற்சி 3.14 ல் - 2 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 6 - பயிற்சி 3.4 ல் - 1 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 16 - பயிற்சி 3.16 ல் - 4 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 7 - பயிற்சி 3.5 ல் - 2 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 17 - பயிற்சிக்காக
வினா எண்: 8 - பயிற்சி 3.6 ல் - 8 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 18 - பயிற்சி 3.18 ல் - 7 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 9 - பயிற்சி 3.8 ல் - 1 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 19,20 - பயிற்சி 3.19 ல் - 7 ஆம் வினா போன்றது.

4. வடிவியல்

தேற்றங்கள்

தேற்றம் 1: அடிப்படை விகிதச்சம தேற்றம் அல்லது தேல்ஸ் தேற்றம் MAY-22

கூற்று : ஒரு நேர்கோடு முக்கோணத்தின் ஒரு பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மற்ற இரு பக்கங்களை வெட்டுமாறும் வரையப்பட்டால் அக்கோடு அவ்விரண்டு பக்கங்களையும் சம விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.



நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்டவை : ΔABC-யில் AB-யின் மேலுள்ள புள்ளி D, AC-யின் மேல் உள்ள புள்ளி E ஆகும்.

நிரூபிக்க: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

அமைப்பு: $DE \parallel BC$ வரைக.

எண்	கூற்று	காரணம்
1.	$\angle ABC = \angle ADE = \angle 1$	ஒத்த கோணங்கள் சமம். ஏனெனில் $DE \parallel BC$
2.	$\angle ACB = \angle AED = \angle 2$	ஒத்த கோணங்கள் சமம். ஏனெனில் $DE \parallel BC$
3.	$\angle DAE = \angle BAC = \angle 3$	இரு முக்கோணங்களும் ஒரு பொதுவான கோணத்தைக் கொண்டுள்ளது.
4.	$\Delta ABC \sim \Delta ADE$	AAA விதிமுறைப்படி
	$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$	ஒத்த பக்கங்கள் விகிதச்சமம்.
	$\frac{AD+DB}{AD} = \frac{AE+EC}{AE}$	D மற்றும் E-ஐப் பயன்படுத்தி AB மற்றும் AC-ஐ பிரித்தல்.
	$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$	சுருக்குதல்
	$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$	இரு பக்கங்களிலும் 1-ஐ நீக்குக.
	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$	தலைகீழாக மாற்றுக
தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது		

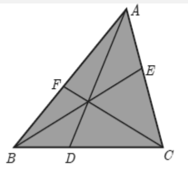
கிளைத்தேற்றம்:

ΔABC-யில் BC-க்கு இணையான நேர்க்கோடு DE-யானது, AB-ஐ D-யிலும், AC-ஐ E-யிலும் வெட்டினால்

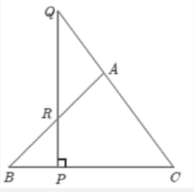
(i) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (ii) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$

சீவாஸ் தேற்றம் (நிரூபணம் இல்லாமல்)

கூற்று : ABC என்பது ஒரு முக்கோணம் என்க. பக்கங்கள் BC, CA, மற்றும் AB-யில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே D, E மற்றும் F என்க. முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் ஒரே திசையைப் பொருத்து, AD, BE, CF என்ற சீவியன்கள் ஒருங்கிசைந்துள்ளது எனில், $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$. ஒவ்வொரு விகிதத்தினையும் தலைகீழியாக மாற்றினாலும் மேற்கூறியது உண்மையே. ஏனெனில் 1-யின் தலைகீழி ஒன்று ஆகும்.



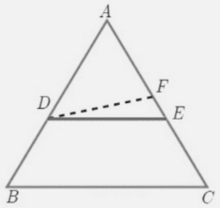
மெனிலாஸ் தேற்றம்:



கூற்று **:** ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் BC, CA, AB (அல்லது அவற்றின் நீட்சி)-யில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே P, Q, R ஆகியன ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகளாக அமையத் தேவையான மற்றும் போதுமான நிபந்தனை $\frac{BP}{PC} \times \frac{CQ}{QA} \times \frac{AR}{RB} = -1$. இந்தச் சூத்திரத்தில் உள்ள கோட்டுத்துண்டுகள் அனைத்தும் திசை சார்ந்தவையாகும்.

தேற்றம் 2: அடிப்படை விகிதசம தேற்றத்தின் மறுதலை (அல்லது) தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை

கூற்று : ஒரு நேர்கோடு ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களைச் சமவிகிதத்தில் பிரித்தால், அந்நேர்கோடானது மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாக இருக்கும்.



நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்டவை : ΔABC-யில் $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

நிரூபிக்க : $DE \parallel BC$

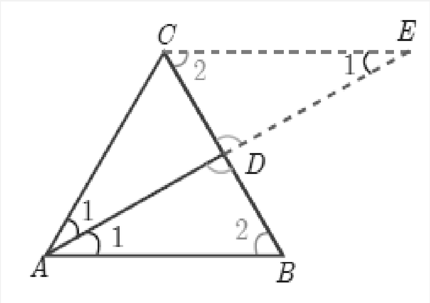
அமைப்பு : DE ஆனது BC-க்கு இணையாக இல்லையெனில், $DF \parallel BC$ என்றவாறு DF -ஐ வரைக.

எண்	கூற்று	காரணம்
1.	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ .... (1)	கொடுக்கப்பட்டது
2.	ΔABC-யில் $DF \parallel BC$	அமைப்பு
3.	$\frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FC}$ .... (2)	தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி,
4.	$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FC}$ $\frac{AE}{EC} + 1 = \frac{AF}{FC} + 1$ $\frac{AE+EC}{EC} = \frac{AF+FC}{FC}$ $\frac{AC}{EC} = \frac{AC}{FC}$ $EC = FC$ எனவே, $E = F$ இதிலிருந்து, $DE \parallel BC$	(1) மற்றும் (2)-லிருந்து இருபுறமும் 1-ஐ கூட்ட இருபுறமும் AC-ஐ நீக்குக ஆகவே DE ஆனது BC-க்கு இணையாக இல்லை என்ற கருதுகோள் தவறு. தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது

தேற்றம் 3: கோண இருசமவெட்டி தேற்றம்

APR-23, JUL-22, SEP-20, PTA-5

கூற்று : ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு கோணத்தின் உட்புற இரு சமவெட்டியானது அக்கோணத்தின் எதிர் பக்கத்தை உட்புறமாக அக்கோணத்தினை அடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கும்.



நிரூபணம்:

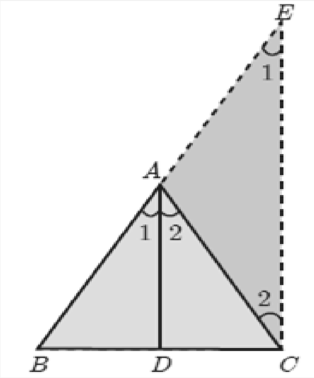
கொடுக்கப்பட்டவை : ΔABC-யில் AD யானது $\angle A$-யின் உட்புற இருசமவெட்டி

நிரூபிக்க: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

அமைப்பு: AB-க்கு இணையாக C வழியாக ஒரு இணைக்கோடு வரைக. AD-யின் நீட்சியானது C வழியாக செல்லும் கோட்டினை E-யில் சந்திக்கிறது.

எண்	கூற்று	காரணம்
1.	$\angle AEC = \angle BAE = \angle 1$ $\angle ABD = \angle ECD = \angle 2$	ஒரு குறுக்குவெட்டியானது இரண்டு இணைகோடுகளை வெட்டுவதால் ஏற்படும் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்.
2.	ΔACE என்பது இரு சமபக்க முக்கோணம் $AC = CE$ ...... (1)	ΔACE-யில் $\angle CAE = \angle CEA$
3.	$\Delta ABD \sim \Delta ECD$ $\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{CD}$	AA விதிமுறைப்படி
4.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$	(1)-லிருந்து, $AC = CE$ தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது

தேற்றம் 4: கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின் மறுதலை



கூற்று: ஒரு முக்கோணத்தின் ஒரு முனையிலிருந்து செல்லும் ஒரு நேர்கோடு, அதன் எதிர் பக்கத்தினை உட்புறமாக மற்ற இரு பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்குமானால், அக்கோடு அமைந்த முனைக் கோணத்தினை உட்புறமாக இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

PTA-3,4

நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்டது: ABC என்பது ஒரு முக்கோணம். AD ஆனது பக்கம் BC-யை D என்ற புள்ளியில் கோணம் $\angle A$-யை உள்ளடக்கிய பக்கங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. அதாவது $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ……… (1)

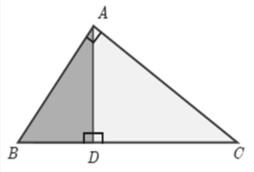
நிரூபிக்க: $\angle A$-யின் உட்புற இருசமவெட்டி AD. அதாவது $\angle 1 = \angle 2$

அமைப்பு: $CE \parallel DA$ வரைக. BA-யின் நீட்சி E-யில் சந்திக்கிறது.

எண்	கூற்று	காரணம்
1.	$\angle BAD = \angle 1$ மற்றும் $\angle DAC = \angle 2$ என்க	அனுமானம்
2.	$\angle BAD = \angle AEC = \angle 1$	$DA \parallel CE$ ஒத்தகோணங்கள் சமம்.
3.	$\angle DAC = \angle ACE = \angle 2$	$DA \parallel CE$ மற்றும் AC ஆனது குறுக்குவெட்டி. ஆகையினால், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் சமம்.
4.	$\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$ ……….. (2)	ΔBCE தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி
5.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$	(1)-லிருந்து
6.	$\frac{AB}{AC} = \frac{BA}{AE}$	(1) மற்றும் (2)-லிருந்து,
7.	$AC = AE$……….(3)	AB-ஐ நீக்க.
8.	$\angle 1 = \angle 2$	(3)-லிருந்து ΔACE ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம்.
9.	$\angle A$ -யின் உட்புற இருசமவெட்டி AD	$\angle 1 = \angle BAD = \angle 2 = \angle DAC$ என்பதால், தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

தேற்றம் 5: பிதாகரஸ் தேற்றம்

JUN-23, SEP-21, PTA-4



கூற்று: ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் கர்ணத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம்.

நிரூபணம்:

கொடுக்கப்பட்டது: ΔABC-யில் $\angle A = 90°$

நிரூபிக்க: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ அமைப்பு: $AD \perp BC$ வரைக.

எண்	கூற்று	காரணம்
1.	ΔABC மற்றும் ΔDBA-ஐ ஒப்பிடுக. $\angle B$ பொதுவானது, $\angle BAC = \angle BDA = 90°$ எனவே, $\Delta ABC \backsim \Delta DBA, \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ $AB^2 = BC \times BD$ …(1)	$\angle BAC = 90°$ கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் $\angle BDA = 90°$ அமைப்பிலிருந்து AA விதிமுறைப்படி
2.	ΔABC மற்றும் ΔDAC-ஐ ஒப்பிடுக. $\angle C$ பொதுவானது, $\angle BAC = \angle ADC = 90°$ எனவே, $\Delta ABC \backsim \Delta DAC, \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$ $AC^2 = BC \times DC$ … (2)	$\angle BAC = 90°$ கொடுக்கப்பட்டது மற்றும் $\angle ADC = 90°$ அமைப்பிலிருந்து AA விதிமுறைப்படி

(1) மற்றும் (2) -ஐக் கூட்ட நாம் பெறுவது,

$AB^2 + AC^2 = (BC \times BD) + (BC \times DC) = BC \times (BD + DC) = BC \times BC$

$AB^2 + AC^2 = BC^2$, தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

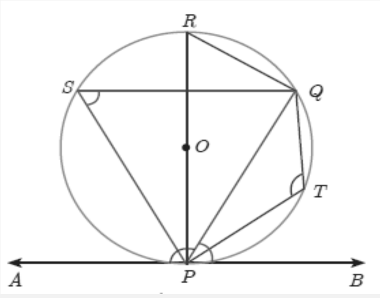
பிதாகரஸ் தேற்றத்தின் மறுதலை:

கூற்று: ஒரு முக்கோணத்தில் நீளமான பக்கத்தின் வர்க்கம் மற்ற இரு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதலுக்குச் சமம் எனில், அந்த முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

தேற்றம் 6: மாற்று வட்டத் துண்டு தேற்றம்

கூற்று: வட்டத்தில் தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி வழியே ஒரு நாண் வரையப்பட்டால், அந்த நாண் தொடுகோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் முறையே ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியாக மாற்று வட்டத்துண்டுகளில் அமைந்த கோணங்களுக்குச் சமம்.

நிரூபணம்:



கொடுக்கப்பட்டது : O-வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தில் AB என்ற தொடுகோடு P என்ற புள்ளி வழியே செல்கிறது மற்றும் PQ என்பது நாண் ஆகும். S மற்றும் T என்பன PQ என்ற நாணிற்கு எதிரெதிர் பக்கங்களில் வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளிகள் ஆகும்.

நிரூபிக்க: (i) $\angle QPB = \angle PSQ$ மற்றும் (ii) $\angle QPA = \angle PTQ$

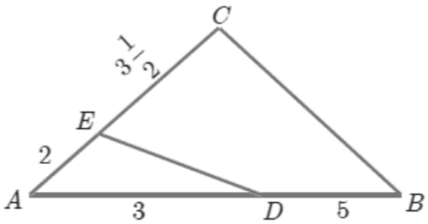
அமைப்பு : POR என்ற விட்டம் வரைக. மேலும் QR, QS மற்றும் PS-யை இணைக்கவும்.

எண்	கூற்று	காரணம்
1.	$\angle RPB = 90°$ $\angle RPQ + \angle QPB = 90°$ ... (1)	விட்டம் RP ஆனது தொடுகோடு AB-க்கு செங்குத்து ஆகும்.
2.	ΔRPQ-வில் $\angle PQR = 90°$ ... (2)	அரைவட்டத்தில் உள்ள கோணம் $90°$.
3.	$\angle QRP + \angle RPQ = 90°$ ... (3)	ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தில் இரு குறுங்கோணங்களின் கூடுதல் $90°$ ஆகும்.
4.	$\angle RPQ + \angle QPB = \angle QRP + \angle RPQ$ $\angle QPB = \angle QRP$ ... (4)	(1) மற்றும் (3)-லிருந்து.
5.	$\angle QRP = \angle PSQ$ ... (5)	ஒரே வட்டத்துண்டிலுள்ள கோணங்கள் சமம்.
6.	$\angle QPB = \angle PSQ$ ... (6)	(4) மற்றும் (5)-லிருந்து, (i) நிரூபிக்கப்பட்டது
7.	$\angle QPB + \angle QPA = 180°$ ... (7)	நேர்கோட்டில் அமைந்த நேரிய இணைக் கோணங்கள்.
8.	$\angle PSQ + \angle PTQ = 180°$ ...(8)	வட்டநாற்கரத்தின் எதிர் கோணங்களின் கூடுதல் $180°$.
9.	$\angle QPB + \angle QPA = \angle PSQ + \angle PTQ$	(7) மற்றும் (8)-லிருந்து
10.	$\angle QPB + \angle QPA = \angle QPB + \angle PTQ$	(6)-லிருந்து $\angle QPB = \angle PSQ$
11.	$\angle QPA = \angle PTQ$	எனவே (ii) நிரூபிக்கப்பட்டது. தேற்றமும் நிரூபிக்கப்பட்டது.

பயிற்சி 4.1

1. கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றில் எந்த முக்கோணங்கள் வடிவொத்தவை என்பதைச் சோதிக்கவும் மேலும் x-யின் மதிப்பு காண்க. **2M**

(i)



$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$\frac{3}{5} = \frac{2}{7/2}$

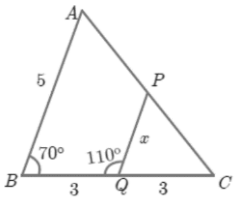
$\frac{3}{5} \neq \frac{4}{7}$

$\Rightarrow ABC \not\sim \Delta AED$

வடிவொத்தவை இல்லை

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(ii)



ΔABC & ΔPQC-ல்

$\angle C$ பொது

$\angle PQC = 180° - \angle PQB$

$= 180° - 110°$

$= 70°$

$\angle A + \angle B + \angle C = \angle P + \angle Q + \angle C$

$\angle A + 70° = \angle P + 70°$

$\angle A = \angle P$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta PQC$

வடிவொத்தவை

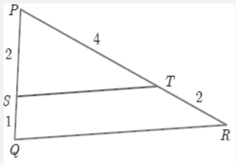
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QC}$

$\frac{5}{x} = \frac{6}{3}$

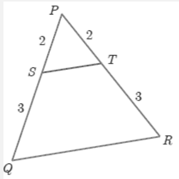
$x = \frac{5}{2} \Rightarrow \boldsymbol{x = 2.5}$ செ.மீ

எ.கா.4.1: $\Delta PST \backsim \Delta PQR$ எனக் காட்டுக. (PTA – 1) **2M**

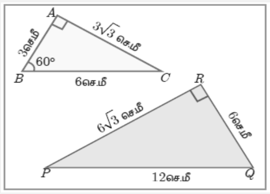
i)



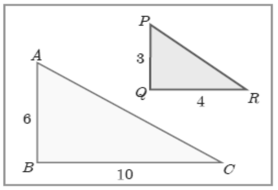
ii)



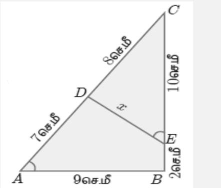
எ.கா.4.3: படத்திலிருந்து $\angle P$-ஐ காண்க. **2M**



எ.கா.4.2: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ஆக இருக்குமா? **2M**



எ.கா.4.5: படத்தில் $\angle A = \angle CED$ எனில், **2M** $\Delta CAB \sim \Delta CED$ என நிரூபிக்கவும். மேலும் x-யின் மதிப்பு காண்க.



அலகுப்பயிற்சி: 7. 2 மீ உயரமுள்ள மனிதர் ஒரு மரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிட விரும்புகிறார். மரத்தின் அடியிலிருந்து 20 மீ தொலைவில் B என்ற புள்ளியில் ஒரு கண்ணாடி கிடைமட்டமாக மேல் நோக்கி வைக்கப்படுகிறது. கண்ணாடியிலிருந்து 4 மீ தொலைவில் C என்ற புள்ளியில் நிற்கும் மனிதர் மரத்தின் உச்சியின் பிரதிபலிப்பைக் கண்ணாடியில் காண முடிகிறது எனில், மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. (மரத்தின் அடி, கண்ணாடி, மனிதர் ஒரே நேர்க்கோட்டில் உள்ளதாகக் கொள்க.) **5M**

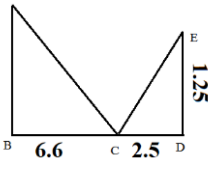
2. ஒரு பெண் விளக்கு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 6.6 மீ தொலைவிலுள்ள கண்ணாடியில் விளக்கு கம்ப உச்சியின் பிரதிபலிப்பைக் காண்கிறாள். 1.25 மீ உயரமுள்ள அப்பெண் கண்ணாடியிலிருந்து 2.5 மீ தொலைவில் நிற்கிறாள். கண்ணாடியானது வானத்தை நோக்கி வைக்கப்பட்டுள்ளது. அப்பெண், கண்ணாடி மற்றும் விளக்கு கம்பம் ஆகியவை எல்லாம் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைவதாக எடுத்துக் கொண்டால், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. **2M**

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD}$

$\frac{AB}{12.5} = \frac{6.6}{2.5}$

$AB = \frac{6.6\times1.25}{2.5}$

$= \frac{8.25}{2.5} = \mathbf{3.3}$ மீ



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.4: 90 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு சிறுவன் விளக்கு கம்பத்தின் அடியிலிருந்து 1.2 மீ/வினாடி வேகத்தில் நடந்து செல்கிறான். தரையிலிருந்து விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 3.6 மீ எனில், 4 வினாடிகள் கழித்துச் சிறுவனுடைய நிழலின் நீளத்தைக் காண்க. **5M**

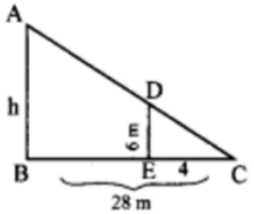
3. 6 மீ உயரமுள்ள செங்குத்தாக நிற்கும் கம்பமானது தரையில் 400 செ.மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறது. ஒரு கோபுரமானது 28 மீ நீளமுள்ள நிழலை ஏற்படுத்துகிறது. கம்பம் மற்றும் கோபுரம் ஒரே நேர்கோட்டில் அமைவதாகக் கருதி வடிவொத்த தன்மையைப் பயன்படுத்தி, கோபுரத்தின் உயரம் காண்க. (2M)

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC}$$

$$\frac{h}{6} = \frac{28}{4}$$

$$h = \frac{28\times6}{4} = 7\times6 = 42$$

கோபுரத்தின் உயரம் $= 42$ மீ



4. QR-ஐ அடிப்பக்கமாகக் கொண்ட இரு முக்கோணங்கள் QPR மற்றும் QSR-யின் புள்ளிகள் P மற்றும் S-யில் செங்கோணங்களாக அமைந்துள்ளன. இரு முக்கோணங்களும் QR-யின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்துள்ளன. PR மற்றும் SQ என்ற பக்கங்கள் T என்ற புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனில், $PT\times TR = ST\times TQ$ என நிறுவுக. (5M) PTA-6

ΔPQR மற்றும் ΔSQR

$\angle P = \angle S = 90^\circ$ மற்றும் ΔSQR

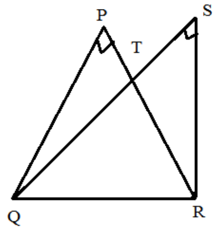
$\angle P = \angle S = 90^\circ$

$\angle PTQ = \angle STR$ (குத்தெதிர் கோணங்கள்)

எனவே, வடிவொத்தமைக்கான, AA விதிமுறைப்படி, $\Delta PTQ \sim \Delta STR$

$$\frac{PT}{ST} = \frac{TQ}{TR}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{PT\times TR = TQ\times ST}$$



5. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், C-ஐ செங்கோணமாகக் கொண்ட ΔABC-யில் $DE\perp AB$ எனில் $\Delta ABC\sim\Delta ADE$ என நிரூபிக்க. மேலும் AE மற்றும் DE ஆகியவற்றின் நீளங்களைக் காண்க. (5M)

ΔABC ல் $\angle C = 90^0$ மற்றும் $DE\perp AB$ மேலும் ΔAEDல், $\angle E = 90^0$

ΔABC மற்றும் ΔAED ல் $\angle A$ பொது

$\Rightarrow$ AA விதிமுறைப்படி. $\Delta ABC\sim\Delta AED$

$AC = 3+2 = 5, BC = 12$

$$AB = \sqrt{AC^2+BC^2}$$
$$= \sqrt{12^2+5^2}$$
$$= \sqrt{169}$$
$$= 13$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{ED}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{3}{13} = \frac{DE}{12} = \frac{AE}{5}$$

$$15 = 13AE$$

$$\frac{15}{13} = AE$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{AE = \frac{15}{13}}$$

$$\frac{DE}{12} = \frac{3}{13}$$

$$13DE = 36$$

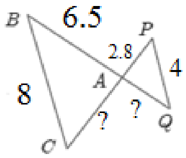
$$\boldsymbol{DE = \frac{36}{13}}$$

6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், $\Delta ACB\sim\Delta APQ$. $BC = 8$ செ.மீ, $PQ = 4$ செ.மீ, $BA = 6.5$ செ.மீ மற்றும் $AP = 2.8$ செ.மீ, எனில், CA மற்றும் AQ-யின் மதிப்பைக் காண்க. (2M)

கொடுக்கப்பட்டது : $\Delta ABC\sim\Delta APQ$

$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AB}{AQ} = \frac{AC}{AP}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6.5}{AQ} = \frac{AC}{2.8}$$



$$2 = \frac{6.5}{AQ}$$

$$AQ = \frac{6.5}{2}$$

$$\boldsymbol{AQ = 3.25}\ \text{செ.மீ}$$

$$2 = \frac{AC}{2.8}$$

$$AC = 2\times2.8$$

$$\boldsymbol{AC = 5.6}\ \text{செ.மீ}$$

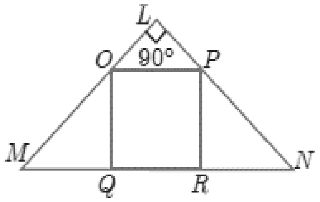
இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.6: படத்திலிருந்து, QA மற்றும் PB ஆனது AB-க்கு செங்குத்தாகும். $AO = 10$ செ.மீ , $BO = 6$ செ.மீ மற்றும் $PB = 9$ செ.மீ. AQ-ஐக் காண்க. (2M)

7. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $OPRQ$ ஆனது சதுரம் & $\angle MLN = 90^0$ எனில், கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும். 2M

(i) $\Delta LOP \sim \Delta QMO$ (ii) $\Delta LOP \sim \Delta RPN$

(iii) $\Delta QMO \sim \Delta RPN$ (iv) $QR^2 = MQ \times RN$



(i) ΔLOP மற்றும் QMO-ல்

$\angle OLP = \angle MQO$ $(= 90°)$

$\angle LOP = \angle QMO$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\Delta LOP \sim \Delta QMO$

(AA விதிமுறைப்படி வடிவொத்தவை)

(ii) ΔLOP மற்றும் ΔPRN,

$\angle PLO = \angle NRP$ $(= 90°)$

$\angle LPO = \angle PNR$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\Delta LOP \sim \Delta RPN$

(iii) ΔQMO மற்றும் ΔRPN ((i) & (ii)-லிருந்து)

$\Delta LOP \sim \Delta QMO$ மற்றும்

$\Delta LOP \sim \Delta \angle RPN$

$\Delta QMO \sim \Delta RPN$

(iv) $\Delta QMO \sim \Delta RPN$ ((iii)-லிருந்து)

$\frac{MQ}{RP} = \frac{QO}{RN}$ $(\because PRQO$ ஒரு சதுரம்)

$\frac{MQ}{QO} = \frac{QO}{RN}$ $(\because RP = QO; QO = QR)$

$MQ.RN = QO^2$

$MQ.RN = QR^2$

$QR^2 = MQ \times RN$

8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$-ல், ΔABC-யின் பரப்பு 9 செ.மீ² ΔDEF-யின் பரப்பு 16 செ.மீ² மற்றும் $BC = 2.1$ செ.மீ. எனில், EF-யின் நீளம் காண்க. 2M

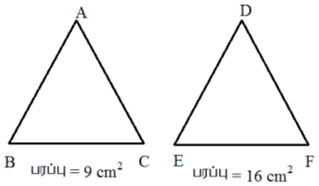
$\frac{\Delta ABC\text{ன் பரப்பு}}{\Delta DEF\text{ன் பரப்பு}} = \frac{BC^2}{EF^2}$

$\frac{9}{16} = \frac{2.1^2}{EF^2}$

$\frac{3}{4} = \frac{2.1}{EF}$

$EF = \frac{2.1 \times 4}{3}$

$EF = 2.8$ **செ.மீ**



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.7: வடிவொத்த முக்கோணங்கள் ABC மற்றும் PQR-ன் சுற்றளவுகள் முறையே 36 செ.மீ மற்றும் 24 செ.மீ ஆகும். $PQ = 10$ செ.மீ எனில், AB-ஐக் காண்க. 2M

எ.கா.4.8: ΔABC ஆனது ΔDEF-க்கு வடிவொத்தவை. மேலும் $BC = 3$ செ.மீ, $EF = 4$ செ.மீ மற்றும் முக்கோணம் ΔABC-யின் பரப்பு $= 54$ செ.மீ² எனில், ΔDEF-யின் பரப்பைக் காண்க. **(PTA – 2)** 2M

9. 6 மீ மற்றும் 3 மீ உயரமுள்ள இரண்டு செங்குத்தான தூண்கள் AC என்ற தரையின் மேல் படத்தில் காட்டியுள்ளவாறு ஊன்றப்பட்டுள்ளது எனில், y -யின் மதிப்பு காண்க. 5M PTA-5

$\Delta PAC, \Delta QBC$ ஆகியவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

$\frac{PA}{QB} = \frac{AC}{BC} = \frac{PQ}{QC}$

$\frac{6}{y} = \frac{AC}{BC}$

$y(AC) = 6BC$...... (1)

ΔACR மற்றும் ΔABQ ஆகியவை வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

$\frac{CR}{QB} = \frac{AC}{AB}$

$\frac{3}{y} = \frac{AC}{AB}$

$3(AB) = (AC)y$................ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow 3AB = 6BC$

$\frac{AB}{BC} = \frac{6}{3} = 2$

$AB = 2BC$

$AC = AB + BC$

$AC = 2BC + BC$ $(AB = 2BC)$

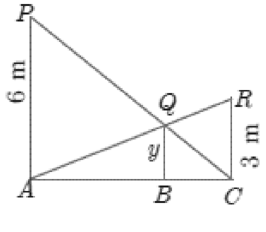
$AC = 3BC$

$AC = 3BC$ என (1) ல் பிரதியிட

$(3BC)y = 6BC$

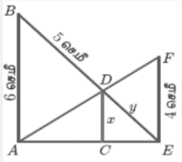
$y = \frac{6BC}{3BC}$

$y = 2$ **மீ**



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.9: p மீட்டர் இடைவெளியில் a மீட்டர் மற்றும் b மீட்டர் உயரமுள்ள இரண்டு தூண்கள் உள்ளன. தூண்களின் உச்சியிலிருந்து எதிரேயுள்ள தூண்களின் அடிக்கு வரையப்படும் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் உயரமானது $\frac{ab}{a+b}$ மீட்டர் என்பதை நிரூபிக்கவும். **(APR-23)** (5M)



(2M)

அலகுப்பயிற்சி: 2. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $AB \parallel CD \parallel EF$. $AB = 6$ செ.மீ, $CD = x$ செ.மீ, $EF = 4$ செ.மீ, $BD = 5$ செ.மீ மற்றும் $DE = y$ செ.மீ எனில், x மற்றும் y-யின் மதிப்பு காண்க.

தயாரிக்கப்பட்ட வினா

1. **ΔABC-ல் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-யில் முறையே P மற்றும் Q என்ற புள்ளிகள் உள்ளன. $AP = 3$ செ.மீ, $PB = 6$ செ.மீ, $AQ = 5$ செ.மீ மற்றும் $QC = 10$ செ.மீ எனில் $BC = 3PQ$ என நிறுவுக.** (2M)

PTA-6

$\frac{AP}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{AQ}{AC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

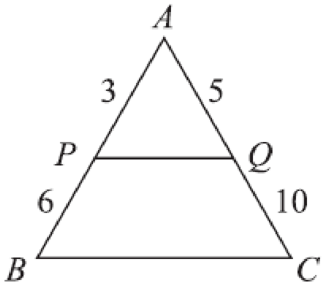
$\Delta APQ, \Delta ABC$ ஆகியவற்றிலிருந்து

வடிவொத்த முக்கோணங்களுக்கான SAS விதிமுறையின் படி

$\Delta APQ \sim \Delta ABC$, $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$

$\Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore BC = 3PQ$



பயிற்சி 4.2

1. **ΔABC-யின் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-யின் மீதுள்ள புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E ஆனது $DE||BC$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது.** (2M) SEP-21

(i) $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ மற்றும் $AC = 15$ செ.மீ எனல் AE-யின் மதிப்பு காண்க.

(i) தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி, $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

$EC = x$, $AE = 15 - x$

$\frac{3}{4} = \frac{15-x}{x}$

$3x = 60 - 4x$

$3x + 4x = 60$

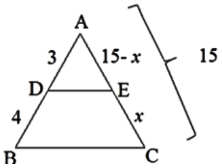
$7x = 60$

$x = \frac{60}{7}$

$x = 8.57$

$AE = 15 - 8.57$

$\boldsymbol{AE = 6.43}$ **செ.மீ**



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

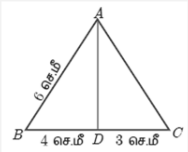
1. ΔABC யின் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-யின் மீதுள்ள புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E ஆனது $DE||BC$ என்றவாறு அமைந்துள்ளது ii) $AD = 8x - 7, DB = 5x - 3, AE = 4x - 3$ மற்றும் $EC = 3x - 1$ எனில், x-ன் மதிப்பு காண்க. (2M)

எ.கா.4.12: ΔABC-யில் $DE \parallel BC$, $AD = x$, $DB = x - 2$, $AE = x + 2$ மற்றும் $EC = x - 1$ எனில், பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-யின் நீளங்களைக் காண்க. (5M)

எ.கா.4.13: ΔABC-யின் பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-ல் அமைந்த புள்ளிகள் முறையே D மற்றும் E மேலும், $AB = 5.6$செ.மீ, $AD = 1.4$ செ.மீ, $AC = 7.2$ செ.மீ மற்றும் $AE = 1.8$ செ.மீ எனில், $DE \parallel BC$ எனக் காட்டுக.

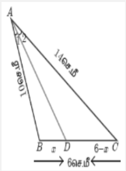
இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.15: படத்தில் $\angle A$-யின் இருசமவெட்டி AD ஆகும். $BD = 4$ செ.மீ, $DC = 3$ செ.மீ மற்றும் $AB = 6$ செ.மீ எனில், AC-யைக் காண்க? **(PTA – 5) (MAY – 22)**



(2M)

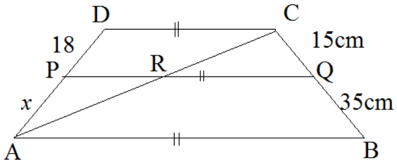
எ.கா.4.16: படத்தில், AD என்பது $\angle BAC$-யின் இருசமவெட்டியாகும். $AB = 10$ செ.மீ, $AC = 14$ செ.மீ & $BC = 6$ செ.மீ. எனில் BD மற்றும் DC-ஐ காண்க. **(APR-23,PTA-3)**



2. **$ABCD$ என்ற ஒரு சரிவகத்தில் $AB||DC$ மற்றும் P, Q என்பன முறையே பக்கங்கள் AD மற்றும் BC-யின் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் ஆகும். மேலும் $PQ||DC$ $PD = 18$ செ.மீ, $BQ = 35$ செ.மீ மற்றும் $QC = 15$ செ.மீ, எனில், AD காண்க.**

JUL - 22

2M



$ABCD$ என்ற ஒரு சரிவகத்தில் $AB||DC$

AC-ஐ இணைக்க அது PQ-வை R-ல் சந்திக்கிறது.

ΔACD ல், $PR \parallel CD$

தேல்ஸ் தேற்றப்படி, $\frac{AP}{PD} = \frac{AR}{RC}$

$\frac{x}{18} = \frac{AR}{RC}$ ....(1)

ΔABC ல், $RQ \parallel AB$

தேல்ஸ் தேற்றப்படி,

$\frac{BQ}{QC} = \frac{AR}{RC}$

$\frac{35}{15} = \frac{AR}{RC}$

$\frac{7}{3} = \frac{AR}{RC}$ ....(2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து

$\frac{x}{18} = \frac{7}{3}$

$3x = 126$

$x = \frac{126}{3} = 42$

$AP = x$ எனில்,

$AP = 42$

$AD = AP + PD$

$= 42 + 18 = \mathbf{60}$ **செ.மீ**

3. **ΔABC-யில் D மற்றும் E என்ற புள்ளிகள் முறையே பக்கங்கள் AB மற்றும் AC ஆகியவற்றின் மீது அமைந்துள்ளன. (i) $AB = 12$ செ.மீ, $AD = 8$ செ.மீ, $AE = 12$ செ.மீ மற்றும் $AC = 18$ செ.மீ எனில் $DE \parallel BC$ என நிறுவுக.**

2M

கொடுக்கப்பட்டது: ΔABC-யில் D மற்றும் E என்ற புள்ளிகள் முறையே பக்கங்கள் AB மற்றும் AC ஆகியவற்றின் மீது அமைந்துள்ளன.

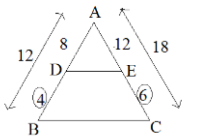
$AB = 12$ செ.மீ, $AD = 8$ செ.மீ, $AE = 12$ செ.மீ, $AC = 18$ செ.மீ

தேல்ஸ் தேற்றத்தின் கிளைத்தேற்றத்தின்படி,

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{12}{8} = \frac{18}{12}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

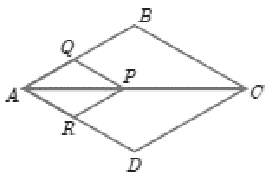
$\Rightarrow \boldsymbol{DE||BC}$



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

3. ΔABC-யில் D மற்றும் E என்ற புள்ளிகள் முறையே பக்கங்கள் AB மற்றும் AC ஆகியவற்றின் மீது அமைந்துள்ளன. (ii) $AB = 5.6$ செ.மீ, $AD = 1.4$ செ.மீ, $AC = 7.2$ செ.மீ மற்றும் $AE = 1.8$ செ.மீ எனில் $DE \parallel BC$ என நிறுவுக. 2M

4. **படத்தில் $PQ||BC$ மற்றும் $PR||CD$ எனில் (i) $\frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AB}$ (ii) $\frac{QB}{AQ} = \frac{DR}{AR}$ என நிறுவுக.** 2M



(i) $\frac{AR}{AD} = \frac{AQ}{AB}$

ΔABC & ΔADC ல்,

$PQ||BC$ & $PR||CD$

தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி,

$\frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$ மற்றும் $\frac{AR}{RD} = \frac{AP}{PC}$

$\Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AR}{RD} \Rightarrow \frac{QB}{AQ} = \frac{RD}{AR}$

$\Rightarrow \frac{QB}{AQ} + 1 = \frac{RD}{AR} + 1$

$\frac{QB+AQ}{AQ} = \frac{RD+AR}{AR}$

$\frac{AB}{AQ} = \frac{AD}{AR} \Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{AR}{AD}$

(ii) $\frac{QB}{AQ} = \frac{DR}{AR}$

ΔABC & ΔAQP-ல், $PQ||BC$

தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி,

$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB}$............... (1)

$PR||CD$

தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி,

$\frac{AP}{PC} = \frac{AR}{RD}$.............. (2)

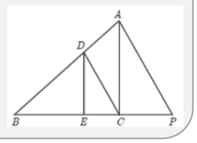
(1) மற்றும் (2) $\Rightarrow$

$\frac{AQ}{QB} = \frac{AR}{RD} \Rightarrow \frac{QB}{AQ} = \frac{DR}{RA}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.14: படத்தில், $DE \parallel AC$ மற்றும் $DC \parallel AP$ எனில், $\frac{BE}{EC} = \frac{BC}{CP}$ என நிறுவுக.

(PTA – 4) 2M



5. **ΔABC-யின் உள்ளே $\angle B$-ஐ ஒரு கோணமாகக் கொண்ட சாய்சதுரம் $PQRB$ அமைந்துள்ளது. P, Q மற்றும் R என்பன முறையே பக்கங்கள் AB, AC மற்றும் BC மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள் ஆகும். $AB = 12$ செ.மீ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ எனில், சாய்சதுரத்தின் பக்கங்கள் PQ, RB-யைக் காண்க.** (5M)

ΔABC-யின் உள்ளே $\angle B$-ஐ ஒரு கோணமாகக் கொண்ட சாய்சதுரம் $PQRB$ அமைந்துள்ளன.

$PQ||BR \Rightarrow \angle RBP = \angle CRQ$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\angle BAC = \angle RQC$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\frac{RC}{BC} = \frac{QR}{AB}$............... (1)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta RQC$ (AA விதிமுறைப்படி)

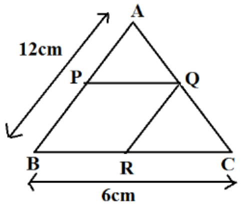
சாய்சதுரத்தின் பக்க அளவு x என்க

(ie) $PQ = BP = BR = RQ = x$

$AB = 12$ செ.மீ மற்றும் $BC = 6$ செ.மீ

$RC = BC - BR$

$= 6 - x$



(1)-லிருந்து,

$\frac{6-x}{6} = \frac{x}{12}$

$12(6 - x) = 6x$

$72 - 12x = 6x$

$72 = 6x + 12x$

$72 = 18x$

$x = \frac{72}{18}$

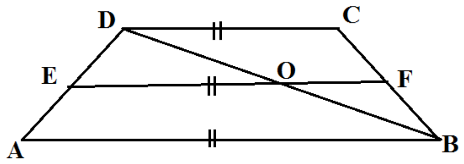
$\Rightarrow x = 4$ செ.மீ

$PQ, RB = 4$ செ.மீ, 4 செ.மீ

6. **சரிவகம் $ABCD$-யில் $AB||DC, E$ மற்றும் F என்பன முறையே இணையற்ற பக்கங்கள் AD மற்றும் BC-ன் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள், மேலும் $EF||AB$ என அமைந்தால் $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ என நிறுவுக.** (5M)

கொடுக்கப்பட்டது: சரிவகம் $ABCD$-யில் $AB||DC, E$ மற்றும் F என்பன முறையே இணையற்ற பக்கங்கள் AD மற்றும் BC-ன் மீது அமைந்துள்ள புள்ளிகள், மேலும் $EF||AB$

BD-ஐ இணைக்க அது EF-ஐ O-வில் சந்திக்கிறது.



ΔABD-ல், $EO||AB$

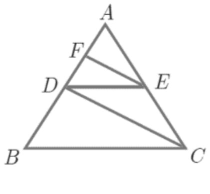
$\frac{AE}{ED} = \frac{BO}{OD}$......... (1) (தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி)

ΔBDC-ல், $OF||DC$

$\frac{BO}{OD} = \frac{BF}{FC}$............... (2) (தேல்ஸ் தேற்றத்தின்படி)

(1) & (2) $\Rightarrow \boldsymbol{\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}}$

7. **படத்தில் $DE||BC$ மற்றும் $CD||EF$ எனில் $AD^2 = AB \times AF$ என நிறுவுக.** (5M)



ΔABC-ல் $DE||BC$ மற்றும் $EF||AB$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$............. (1) (தேல்ஸ் தேற்றத்தின் கிளைத்தேற்றத்தின்படி)

ΔADC-ல் $EF||DC$

$\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC}$................ (2) (தேல்ஸ் தேற்றத்தின் கிளைத்தேற்றத்தின்படி)

(1) & (2)

$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AD}$

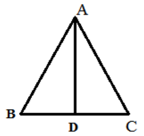
$AD \times AD = AB \times AF$

$\boldsymbol{AD^2 = AB \times AF}$

8. **பின்வருவனவற்றுள் ΔABC-யில் AD ஆனது $\angle A$ யின் இருசமவெட்டி ஆகுமா எனச் சோதிக்கவும்.** 5M

(i) $AB = 5$ செ.மீ, $AC = 10$ செ.மீ, $BD = 1.5$ செ.மீ மற்றும் $CD = 3.5$ செ.மீ

SEP-20



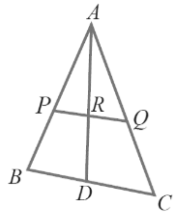
கொடுக்கப்பட்ட ΔABC-ல்,

$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$..................... (1)

$\frac{BD}{DC} = \frac{1.5}{3.5} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ .... (2)

$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \frac{AB}{AC} \neq \frac{BD}{DC}$

$\therefore$ **AD ஆனது $\angle A$ யின் இருசமவெட்டி இல்லை.**



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

8. பின்வருவனவற்றுள் ΔABC-யில் AD ஆனது $\angle A$ யின் இருசமவெட்டி ஆகுமா என சோதிக்கவும். (ii) $AB = 4$ செ.மீ, $AC = 6$ செ.மீ, $BD = 1.6$ செ.மீ மற்றும் $CD = 2.4$செ.மீ (JUN-23) 5M

9. **படத்தில் $\angle QPR = 90^\circ$, PS ஆனது $\angle P$-யின் இருசமவெட்டி மேலும், $ST \perp PR$, எனில், $ST \times (PQ + PR) = PQ \times PR$ என நிறுவுக.** 5M PTA-2

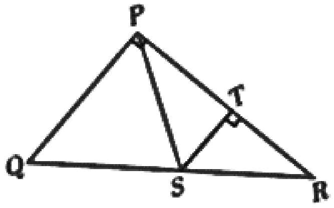
படத்திலிருந்து $\angle QPR = 90^\circ$,

PS ஆனது இருசமவெட்டி மற்றும் $ST \perp PR$

$\frac{PQ}{PR} = \frac{QS}{SR}$ கோண இருசமவெட்டி தேற்றப்படி,

$\frac{PQ}{PR} + 1 = \frac{QS}{SR} + 1$ இருபுறமும் 1-ஐக் கூட்ட

$\frac{PQ+PR}{PR} = \frac{QS+SR}{SR} \Rightarrow \frac{PQ+PR}{PR} = \frac{QR}{SR}$.............. (1)



ΔPQR மற்றும் ΔSTR-ல், $\angle QPR = 90^0$, $\angle STR = 90^0$

$\angle PRS = \angle TRS = \angle R$ ஆனது பொது,

AA விதிமுறைப்படி, $\frac{PQ}{ST} = \frac{QR}{SR} = \frac{PR}{TR}$ ....(2)

$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \frac{PQ+PR}{PR} = \frac{PQ}{ST}$

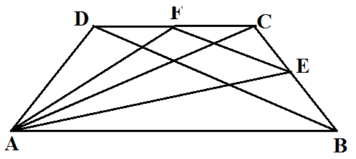
$ST\ (PQ + PR) = PQ \times PR$. நிரூபிக்கப்பட்டது.

10. **நாற்கரம் $ABCD$-யில் $AB = AD$, $\angle BAC$ மற்றும் $\angle CAD$-யின் கோண இருசமவெட்டிகள் BC மற்றும் CD ஆகிய பக்கங்களை முறையே E மற்றும் F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன எனில், $EF || BD$ என நிறுவுக.** 5M

நாற்கரம் $ABCD$-யில் $AB = AD$, $\angle BAC$ மற்றும் $\angle CAD$-யின் கோண இருசமவெட்டிகள் BC மற்றும் CD ஆகிய பக்கங்களை முறையே E மற்றும் F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

அமைப்பு: $AC\ \&\ BD$ ஆகியவற்றை இணைக்க.

ΔABC-ல் AE ஆனது $\angle BAC$-ன் கோண இருசமவெட்டி ஆகும்.



$\therefore$ கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின் படி,

$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC}$.................. (1)

ΔADC-ல் AF ஆனது $\angle DAC$-ன் கோண இருசமவெட்டி ஆகும்.

$\therefore$ கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின் படி, $\frac{AD}{AC} = \frac{DF}{FC}$

ஆனால், $AD = AB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DF}{FC}$................ (2)

$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FC}$

ΔBDC-ல் $\Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FC}$

$\Rightarrow$ **$EF || BD$** (தேல்ஸ் தேற்றத்தின் கிளைத்தேற்றத்தின் படி)

பயிற்சி 4.3

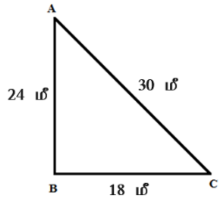
1. **ஒரு மனிதன் 18 மீ கிழக்கே சென்று பின்னர் 24மீ வடக்கே செல்கிறான். தொடக்க நிலையிலிருந்து அவர் இருக்கும் தொலைவைக் காண்க.**

JUL-22 (2M)

கொடுக்கப்பட்டது $BC = 18$ மீ, $BA = 24$ மீ

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,

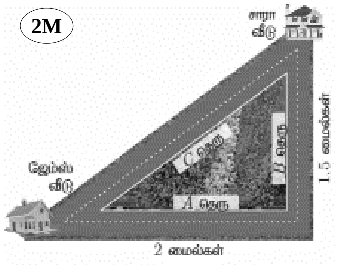
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 24^2 + 18^2$$
$$= 576 +$$
$$= 900 = 30^2$$
$$\boldsymbol{AC = 30} \text{ மீ}$$



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.20: ஒரு விளக்கு கம்பத்தின் உயரம் 6 மீ. அதன் அடியிலிருந்து 8 மீ தொலைவில் உள்ள ஒரு பூச்சி, கம்பத்தை நோக்கி ஒரு குறிப்பிட்ட தொலைவு நகர்கிறது. கம்பத்தின் உச்சிக்கும் தற்பொழுது பூச்சி இருக்கும் இடத்திற்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு, பூச்சி கம்பத்தை நோக்கி நகர்ந்த தொலைவிற்குச் சமம் எனில், கம்பத்தின் அடியிலிருந்து பூச்சி தற்பொழுது எவ்வளவு தொலைவில் உள்ளது? (5M)

2. **சாராவின் வீட்டிலிருந்து ஜேம்ஸின் வீட்டிற்குச் செல்ல இரண்டு வழிகள் உள்ளன. ஒரு வழி 'C' என்ற தெரு வழியாகச் செல்வதாகும். மற்றொரு வழி B மற்றும் A ஆகிய தெருக்கள் வழியாகச் செல்வதாகும். நேரடி பாதை C வழி செல்லும்போது தொலைவு எவ்வளவு குறையும்? (படத்தைப் பயன்படுத்துக.)** (2M)



$$SJ = \sqrt{1.5^2 + 2^2}$$
$$= \sqrt{2.25 + 4} = \sqrt{6.25} = 2.5 \text{ மைல்கள்}$$

C தெரு வழியாக சென்றால் 2.5 மைல்கள் செல்ல வேண்டும்.

A தெரு மற்றும் B தெரு வழியாக சென்றால் $(2 + 1.5) = 3.5$ மைல் செல்ல வேண்டும்.

∴ நேரடி பாதை C வழிச் செல்லும்போது தொலைவு 1 **மைல்** குறையும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.22: சுவரின் அடியிலிருந்து 4 அடி தொலைவில் உள்ள ஏணியானது சுவரின் உச்சியை 7 அடி உயரத்தில் தொடுமெனில் தேவையான ஏணியின் நீளத்தைக் காண்க. விடையை ஒரு தசம இடத்திருத்தமாக தருக. **(MDL)** (2M)

எ.கா.4.23: ஒரு விமானம் விமான நிலையத்தை விட்டு மேலெழுந்து வடக்கு நோக்கி 1000 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு விமானம் அதே விமான நிலையத்தை விட்டு மேலெழுந்து மேற்கு நோக்கி 1200 கி.மீ/மணி வேகத்தில் பறக்கிறது. $1\frac{1}{2}$ மணி நேரத்திற்குப் பிறகு இரு விமானங்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு எவ்வளவு இருக்கும்? **(MAY – 22)** (5M)

3. **A என்ற புள்ளியில் இருந்து B என்ற புள்ளிக்குச் செல்வதற்கு ஒரு குளம் வழியாக, நடந்து செல்ல வேண்டும். குளம் வழியே செல்வதைத் தவிர்க்க 34 மீ தெற்கேயும், 41 மீ கிழக்கு நோக்கியும் நடக்க வேண்டும். குளம் வழியாகச் செல்வதற்குப் பாதை அமைத்து அப்பாதை வழியே சென்றால் எவ்வளவு மீட்டர் தொலைவு சேமிக்கப்படும்?** (5M)

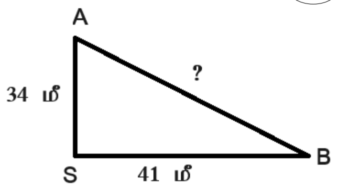
பாதை: I (குளம் வழியாக)

$$AB = \sqrt{34^2 + 41^2}$$
$$= \sqrt{1156 + 1681}$$
$$= \sqrt{2837}$$
$$= 53.26 \text{ மீ}$$

பாதை II (தெற்கிலிருந்து கிழக்காக)

$$AB = AS + SB$$
$$= 34 + 41 = 75 \text{ மீ}$$

சேமிக்கப்படும் தொலைவு $= 75 - 53.26$
$$= \boldsymbol{21.74} \text{ மீ}$$



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப்பயிற்சி: 5. இரண்டு தொடர்வண்டிகள் ஒரே நேரத்தில் ஒரு தொடர்வண்டி நிலையத்திலிருந்து புறப்படுகின்றன. முதல் வண்டி மேற்கு நோக்கியும், இரண்டாவது வண்டி வடக்கு நோக்கியும் செல்கின்றன. முதல் தொடர்வண்டி 20 கி.மீ/மணி வேகத்திலும், இரண்டாவது வண்டி 30 கி.மீ/மணி வேகத்திலும் செல்கின்றன. இரண்டு மணி நேரத்திற்குப் பின்னர் அவைகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு எவ்வளவு? (5M)

4. **$WXYZ$ என்ற செவ்வகத்தில், $XY + YZ = 17$ செ.மீ மற்றும் $XZ + YW = 26$செ.மீ எனில் செவ்வகத்தின் நீளம் மற்றும் அகலத்தைக் கணக்கிடுக.**

5M

கொடுக்கப்பட்ட செவ்வகம் $WXYZ$-லிருந்து,

$XY + YZ = 17$செ.மீ மற்றும் $XZ + YW = 26$ செ.மீ

$l + b = 17 \quad \Rightarrow \quad b = 17 - l$

$d = XZ + YW = 26$

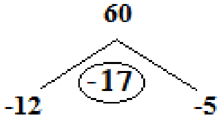
$d + d = 26 \quad \Rightarrow 2d = 26 \quad \Rightarrow d = 13$

$l^2 + (17 - l)^2 = 13^2$

$l^2 + 289 - 34l + l^2 = 169$

$2l^2 - 34l + 289 - 169 = 0$

$2l^2 - 34l + 120 = 0$



2 ஆல் வகுக்க, $\Rightarrow l^2 - 17l + 60 = 0$

$(l - 12)(l - 5) = 0$

$l = 12$ அல்லது $l = 5$

$\boldsymbol{l = 12}$ **செ.மீ** $\Rightarrow b = 17 - 12$

$\boldsymbol{b = 5}$ **செ.மீ**

5. **ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணம் சிறிய பக்கத்தின் 2 மடங்கை விட 6 மீ அதிகம். மேலும் மூன்றாவது பக்கமானது கர்ணத்தை விட 2 மீ குறைவு எனில், முக்கோணத்தின் பக்கங்களைக் காண்க**

5M PTA-3

ΔABC-ல் ; $\angle B = 90^\circ$

$AB = x \Rightarrow AC = 2x + 6$ மற்றும் $BC = 2x + 4$

$(2x + 6)^2 = x^2 + (2x + 4)^2$

$4x^2 + 36 + 24x = x^2 + 4x^2 + 16x + 16$

$x^2 + 16x - 24x + 16 - 36 = 0$

$x^2 - 8x - 20 = 0$

$(x - 10)(x + 2) = 0$

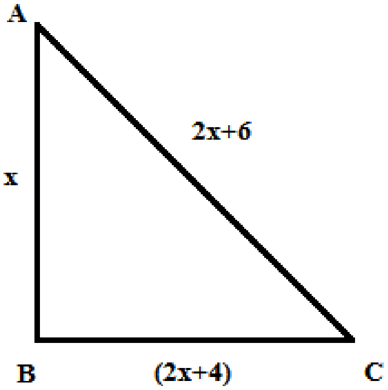
$x = 10$ (அல்லது) $x = -2$

ஆனால் $x \neq -2$

$x = 10$ எனில்,

$\Rightarrow AC = 2x + 6 = 20 + 6 = 26$

$\Rightarrow BC = 2x + 4 = 20 + 4 = 24$



∴ பக்கங்கள் $\boldsymbol{AB = 10}$ **மீ**, $\boldsymbol{BC = 24}$ **மீ**, $\boldsymbol{AC = 26}$ **மீ**

6. **5 மீ நீளமுள்ள ஓர் ஏணியானது ஒரு செங்குத்து சுவர் மீது சாய்த்து வைக்கப்படுகிறது. ஏணியின் மேல் முனை சுவரை 4 மீ உயரத்தில் தொடுகிறது. ஏணியின் கீழ்முனை சுவரை நோக்கி 1.6 மீ நகர்த்தப்படும்போது, ஏணியின் மேல்முனை சுவரில் எவ்வளவு தொலைவு மேல்நோக்கி நகரும் எனக் கண்டுபிடி.**

5M

ΔABC ல்

$AB = 4$மீ, $AC = 5$மீ

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

$= \sqrt{5^2 - 4^2}$

$= \sqrt{25 - 16}$

$= \sqrt{9}$

$BC = 3$ மீ

கொடுக்கப்பட்டது $DC = 1.6$ மீ

$BD = BC - DC$

$= 3 - 1.6$ மீ

$= 1.4$ மீ

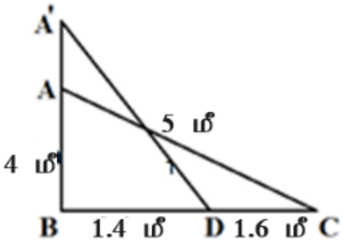
$A'B = \sqrt{A'D^2 - BD^2}$

$= \sqrt{5^2 - 1.4^2}$

$= \sqrt{25 - 1.96}$

$= \sqrt{23.04} = 4.8$ மீ

$AA' = A'B - AB = 4.8 - 4 = \mathbf{0.8}$ **மீ**



7. ΔPQR-யில் அடிப்பக்கம் QR-க்கு செங்குத்தாக உள்ள PS ஆனது QR-ஐ S-யில் சந்திக்கிறது. மேலும், $QS = 3SR$ எனில், $2PQ^2 = 2PR^2 + QR^2$ என நிறுவுக. 5M PTA-6

கொடுக்கப்பட்டது : ΔPQR -யில் அடிப்பக்கம் QR-க்கு செங்குத்தாக உள்ள PS ஆனது QR-ஐ S-யில் சந்திக்கிறது.

மேலும், $S = 3SR$

ΔPQS ல் $\Rightarrow PQ^2 = PS^2 + QS^2$

$\Delta PSR \Rightarrow PR^2 = PS^2 + SR^2$

$\Rightarrow PS^2 = PR^2 - SR^2$

$QR = QS + SR$

$= 3SR + SR$

$QR = 4SR$

$\frac{QR}{4} = SR$

$PQ^2 = PR^2 - SR^2 + (3SR)^2$

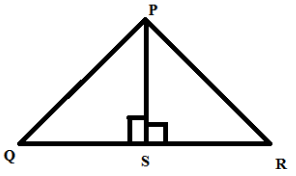
$PQ^2 = PR^2 - SR^2 + 9SR^2$

$PQ^2 = PR^2 + 8SR^2$

$\left[\because SR = \frac{QR}{4}\right]$

$PQ^2 = PR^2 + \frac{8QR^2}{16}$

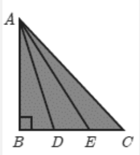
$\mathbf{2PQ^2 = 2PR^2 + QR^2}$



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

8. படத்தில், செங்கோண முக்கோணம் ABC-யில், கோணம் B ஆனது செங்கோணம் மற்றும் D, E என்ற புள்ளிகள் பக்கம் BC-ஐ மூன்று சமபகுதிகளாக பிரிக்கிறது எனில், $8AE^2 = 3AC^2 + 5AD^2$ என நிறுவுக. 5M

எ.கா.4.21: ΔABC-யில் C ஆனது செங்கோணம் ஆகும். பக்கங்கள் CA மற்றும் CB-யின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே P மற்றும் Q எனில் $4(AQ^2 + BP^2) = 5AB^2$ என நிறுவுக. **(MDL)**



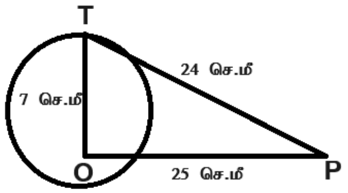
பயிற்சி 4.4

1. **வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 25 செ.மீ தொலைவில் உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் 24 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் என்ன?** 2M

$OT = \sqrt{OP^2 - PT^2}$

$= \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{(25+24)(25-24)}$

$= \sqrt{49(1)} = \sqrt{49} = \mathbf{7}$ **செ.மீ**



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.25: 5 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தில் PQ ஆனது 8 செ.மீ நீளமுள்ள நாண் ஆகும். P மற்றும் Q-வின் வழியே செல்லும் தொடுகோடுகள் T என்ற புள்ளியில் சந்திக்கிறது எனில், TP என்ற தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க. **(MDL)** 5M

எ.கா.4.24: 3 செ.மீ ஆரமுள்ள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து 5 செ.மீ தொலைவில் உள்ள புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

2. **செங்கோண முக்கோணம் LMN-யில் $\angle L = 90^\circ$ ஆகும். ஒரு வட்டமானது செங்கோண முக்கோணத்தின் உள்ளே அதன் பக்கங்களைத் தொடுமாறு வரையப்படுகிறது. செங்கோணத்தைத் தாங்கும் பக்கங்களின் நீளங்கள் 6 செ.மீ மற்றும் 8 செ.மீ எனில், வட்டத்தின் ஆரம் காண்க.** 2M

$MN = \sqrt{LM^2 + LN^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ செ.மீ

வட்டத்தின் ஆரம் "r" அலகுகள் எனில் ΔLMN ன் பரப்பு

ΔLMN ன் பரப்பு= ΔLON ன் பரப்பு $+\Delta LOM$ ன் பரப்பு $+\Delta OMN$ ன் பரப்பு

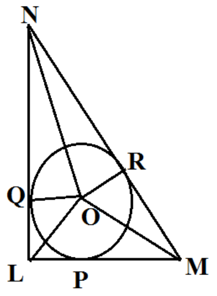
$$\left(\frac{1}{2}LM \times LN\right) = \left(\frac{1}{2} \times LN \times r\right) + \left(\frac{1}{2}r \times LM\right) + \left(\frac{1}{2} \times MN \times r\right)$$

2 ஆல் பெருக்க, $\Rightarrow LM \times LN = LN \times r + r \times LM + MNr$

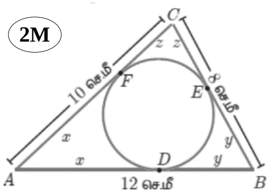
$$8 \times 6 = 6r + (8 \times r) + 10r$$

$$48 = 24r$$

$$r = \frac{48}{24} \Rightarrow \boldsymbol{r = 2} \text{ செ.மீ}$$



3. படத்தில் காட்டியுள்ளபடி, 8 செ.மீ, 10 செ.மீ & 12 செ.மீ பக்கங்கள் உடைய முக்கோணத்தினுள் ஒரு வட்டம் அமைந்துள்ளது எனில், AD, BE & CF ஐக் காண்க. 2M



$AF = AD = x;\quad BD = BE = y;\quad CE = CF = z$ என்க.

$x + y = 12$ செ.மீ ……….. (1)

$z + y = 8$ செ.மீ ………….. (2)

$x + z = 10$ செ.மீ ………..(3)

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow 2(x + y + z) = 30$

$x + y + z = 15$

$x + y = 12 \Rightarrow 12 + z = 15$

$z = 15 - 12 \Rightarrow z = 3$ செ.மீ

$x + z = 10 \Rightarrow y + 10 = 15$

$y = 15 - 10 \Rightarrow y = 5$ செ.மீ

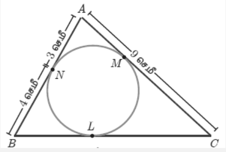
$z + y = 8 \Rightarrow x + 8 = 15$

$x = 15 - 8 = 7$ செ.மீ

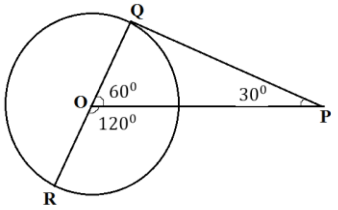
$\therefore$ **$AD = 7$ செ.மீ, $BE = 5$செ.மீ, $CF = 3$செ.மீ**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.27: அருகிலுள்ள படத்திலிருந்து, ΔABC ஆனது ஒரு வட்டத்தைத் தொட்டுக்கொண்டு வட்டத்தைச் சுற்றி அமைந்துள்ளது எனில், BC-யின் நீளத்தைக் காண்க. 2M



4. O-வை மையமாக உடைய வட்டத்திற்கு P-யிலிருந்து வரையப்பட்ட தொடுகோடு PQ. QOR ஆனது விட்டம் ஆகும். வட்டத்தில் $\angle POR = 120^\circ$ எனில், $\angle OPQ$-ஐக் காண்க. 2M



$\angle POQ = 180^\circ - \angle POR$

$= 180^\circ - 120^\circ = \mathbf{60^\circ}$

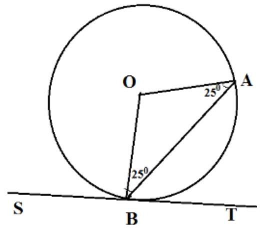
$\angle OPQ = 180^\circ - (\angle OQP + \angle POQ)$

$= 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)$

$= 180^\circ - 150^\circ = \mathbf{30^\circ}$

5. தொடுகோடு ST வட்டத்தினை B என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது. $\angle ABT = 65°$. AB என்பது ஒரு நாண் எனில், $\angle AOB$-ஐ காண்க. இதில் 'O' என்பது வட்டத்தின் மையம் ஆகும். 2M

$\angle OBT = 90^\circ$ (OB ஆரம் & BT- தொடுகோடு)



$\angle OBA = \angle OBT - \angle ABT$

$= 90^\circ - 65^\circ$

$= 25^\circ$

$\angle OAB = 25^\circ; \angle OBA = 25^\circ$

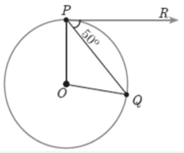
$\therefore \angle AOB = 180^\circ - (25^\circ + 25^\circ)$

$= 180^\circ - 50^\circ$

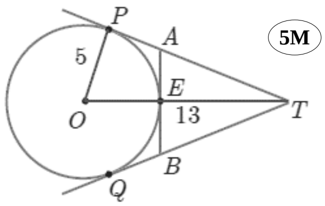
$\mathbf{\angle AOB = 130^\circ}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.26: படத்தில், O ஆனது வட்டத்தின் மையம். PQ ஆனது ஒரு நாண் ஆகும். தொடுகோடு PR ஆனது நாண் PQ-வுடன் P-யில் $50°$ கோணத்தை ஏற்படுத்தினால், $\angle PQ$ காண்க. 2M



6. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் O-வை மையமாக உடைய வட்டத்தின் ஆரம் 5 செ.மீ ஆகும். T-யானது $OT = 13$ செ.மீ என அமைந்த ஒரு புள்ளி மற்றும் OT-யானது வட்டத்தை E-யில் வெட்டுகிறது. வட்டத்தில் E என்ற புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தொடுகோடு AB எனில், AB-யின் நீளம் காண்க. (5M)



AB என்பது E என்ற புள்ளியில் வட்டத்தின் தொடுகோடாகும்.

$OE = 5$ செ.மீ, $OT = 13$ செ.மீ,

$ET = OT - OE$

$= 13 - 5$

$= 8$ செ.மீ

$OP \perp PT$

$\angle OPT = 90°$

$OT^2 = OP^2 + PT^2$

$13^2 = 5^2 + PT^2$

$13^2 - 5^2 = PT^2$

$169 - 25 = PT^2$

$PT^2 = 144$

$PT = 12$ செ.மீ

ΔOPT & ΔAETல்,

$\angle PTO = \angle ATE$

$\angle TPO = \angle AET = 90°$

AA விதிமுறைப்படி

$\Delta OPT \sim \Delta AET$

$\frac{OT}{AT} = \frac{OP}{AE} = \frac{PT}{ET}$

$\frac{13}{AT} = \frac{5}{AE} = \frac{12}{8}$

$\frac{5}{AE} = \frac{12}{8}$

$40 = 12AE$

$AE = \frac{40}{12}$

$AE = \frac{10}{3}$

$AB = 2 \times AE$

$= 2 \times \frac{10}{3}$

$\mathbf{AB = \frac{20}{3}}$ **செ.மீ**

8. O மற்றும் O'-ஐ மையப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட இரு வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே 3 செ.மீ மற்றும் 4 செ.மீ ஆகும். இவை இரண்டும் P, Q என்ற புள்ளிகளில் வெட்டிக்கொள்கின்றன. OP மற்றும் $O'P$ ஆகியவை வட்டங்களின் இரு தொடுகோடுகள் எனில், பொது நாண் PQ-யின் நீளம் காண்க. (5M)

கொடுக்கப்பட்டது $OP = 3$ செ.மீ, $O'P = 4$ செ.மீ,

$OQ = 3$ செ.மீ, $O'Q = 4$ செ.மீ

OO' என்பது PQ ன் மையக்குத்துக்கோடு. PQ மற்றும் OO' ஆகியவற்றை வெட்டும் புள்ளி R

$OO' = \sqrt{OP^2 + O'P^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ செ.மீ

ΔOPR-ல், $OP^2 = PR^2 + OR^2$

$3^2 = PR^2 + OR^2$

$PR^2 + OR^2 = 9$

$PR^2 = 9 - OR^2$ ………….. (1)

$O'R = OO' - OR = 5 - OR$

$\Delta O'PR$-ல், $O'P^2 = PR^2 + O'R^2$

$4^2 = PR^2 + (5 - OR)^2$

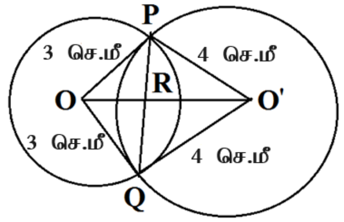
$16 = PR^2 + (5 - OR)^2$

$PR^2 = 16 - (5 - OR)^2$

$PR^2 = 16 - (25 - 10OR + OR^2)$

$PR^2 = 16 - 25 + 10OR - OR^2$

$PR^2 = -9 + 10OR - OR^2$ ….. (2)



(1) & (2) $\Rightarrow$

$9 - OR^2 = -9 + 10OR - OR^2$

$9 + 9 = 10OR$

$10(OR) = 18$

$OR = \frac{18}{10}$

$OR = 1.8$ செ.மீ

$PR = \sqrt{9 - (1.8)^2}$

$= \sqrt{9 - 3.24} = \sqrt{5.76} = 2.4$ செ.மீ

$PQ = 2PR$

$= 2(2.4)$

$= \mathbf{4.8}$ **செ.மீ**

7. இரண்டு பொது மைய வட்டங்களில், 16 செ.மீ நீளமுடைய பெரிய வட்டத்தின் நாணானது 6 செ.மீ ஆரமுள்ள சிறிய வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைந்தால், பெரிய வட்டத்தின் ஆரம் காண்க. (2M)

$OD \perp AB \Rightarrow AD = DB = 8$ செ.மீ

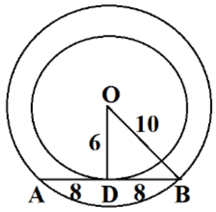
செங்கோண ΔODB,

$OB = \sqrt{OD^2 + DB^2}$

$= \sqrt{6^2 + 8^2}$

$= \sqrt{36 + 64}$

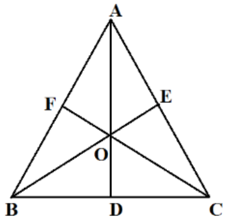
$= \sqrt{100} = \mathbf{10}$ **செ.மீ**



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.28: இரண்டு பொது மைய வட்டங்களின் ஆரங்கள் 4 செ.மீ, 5 செ.மீ ஆகும். ஒரு வட்டத்தின் நாணானது மற்றொரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமைந்தால் அவ்வட்டத்தின் நாணின் நீளம் காண்க. (2M)

9. ஒரு முக்கோணத்தின் கோண இருசம வெட்டிகள் ஒரு புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் எனக் காட்டுக. PTA-4 (5M)



ΔABC-ல் "O" என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி

$\angle AOB, \angle BOC$ மற்றும் $\angle AOC$ ஆகியவற்றின் கோண இருசமவெட்டிகள் AB, BC & CA பக்கங்களில் முறையே D, E & F ல் சந்திக்கின்றன.

$\therefore \Delta BOC$-ல் , OD ஆனது $\angle BOC$-ன் இரு சமவவெட்டி ஆகும்.

$\therefore \frac{OB}{OC} = \frac{BD}{DC}$ ……………… (1)

இதே போல் AOC & AOB

$\frac{OC}{OA} = \frac{CE}{AE}$ ………………….. (2)

$\frac{OA}{OB} = \frac{AF}{FB}$ ……………….. (3)

$(1) \times (2) \times (3) \Rightarrow$

$\frac{OB}{OC} \times \frac{OC}{OA} \times \frac{OA}{OB} = \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{AE} \times \frac{AF}{EB}$

$\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{AE} \times \frac{AF}{FB} = 1$ ……………… (4)

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப்பயிற்சி: 3. O ஆனது முக்கோணம் ABC-யின் உள்ளே அமைந்த ஒரு புள்ளி ஆகும். $\angle AOB$, $\angle BOC$ மற்றும் $\angle COA$-யின் இருசமவெட்டிகள், பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் CA-வை முறையே D, E மற்றும் F-ல் சந்திக்கின்றன எனில், $AD \times BE \times CF = DB \times EC \times FA$ எனக் காட்டுக. (5M)

எ.கா.4.32: ஒரு முக்கோணத்தின் நடுக்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக் காட்டுக. **(SEP – 21)** (5M)

AD, BE & CF ஆகியன $\angle A, \angle B$ & $\angle C$ ஆகியவற்றின் இருசமவெட்டிகள் எனில், கோண இருசமவெட்டி தேற்றத்தின் படி $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$; $\frac{BC}{CA} = \frac{AF}{FB}$; $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC}$

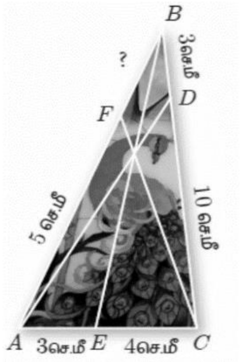
$\frac{AB}{AC} \times \frac{BC}{CA} \times \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{DC} \times \frac{AF}{FB} \times \frac{AE}{EC}$

$1 = 1$ ((4) லிருந்து)

$\therefore O$ என்பது கோண இருசமவெட்டிகள் சந்திக்கும் புள்ளியாகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் கோண இருசம வெட்டிகள் ஒரு புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும்.

10. படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு முக்கோண வடிவக் கண்ணாடி ஜன்னலை முழுமையாக உருவாக்க ஒரு சிறிய கண்ணாடித்துண்டு ஒரு கலை நிபுணருக்குத் தேவைப்படும். மற்ற கண்ணாடி துண்டுகளின் நீளங்களைப் பொருத்து அவருக்குத் தேவையான கண்ணாடித் துண்டின் நீளத்தைக் கணக்கிடவும். (5M)



ΔABC-ல் AD, BE, CF ஆகியவை முறையே $\angle AOB, \angle BOC , \angle AOC$ ஆகியவற்றின் கோண இருசமவெட்டிகளாகும்.

$\frac{OB}{OA} = \frac{BF}{FA}$ ………… (1), $\frac{OC}{OB} = \frac{DC}{DB}$ ………… (2), $\frac{OA}{OC} = \frac{AE}{EC}$………… (3)

$(1) \times (2) \times (3) \Rightarrow \frac{OB}{OA} \times \frac{OC}{OB} \times \frac{OA}{OC} = \frac{BF}{FA} \times \frac{DC}{DB} \times \frac{AE}{EC}$

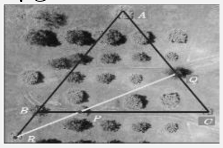
$1 = \frac{BF}{5} \times \frac{10}{3} \times \frac{3}{4}$

$\boldsymbol{BF = 2}$ **செ.மீ**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.4.33: ΔABC-ல், D, E, F ஆகிய புள்ளிகள் முறையே BC, CA, AB மீது உள்ளது. AB, AC மற்றும் BC ஆகியவற்றின் நீளங்கள் முறையே 13, 14 மற்றும் 15 ஆகும். $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{5}$ மற்றும் $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{8}$ எனில், BD மற்றும் DC காண்க. (5M)

எ.கா.4.34: பல மரங்களைக் கொண்ட ஒரு தோட்டத்தில் P, Q, R என்ற மூன்று மரங்கள் பின்வருமாறு அமைந்துள்ளன. ABC என்ற முக்கோணத்தில் BC-யின் மீது P-யும், AC-யின் மீது Q-வும் AB-யின் மீது R-ம் புள்ளிகளாக உள்ளன. மேலும் $BP = 2$ மீ, $CQ = 3$ மீ, $RA = 10$ மீ, $PC = 6$ மீ, $QA = 5$ மீ, $RB = 2$ மீ ஆகும். மரங்கள் P, Q, R ஒரே நேர்கோட்டில் அமையுமா எனச் சோதிக்கவும்.



அலகுப் பயிற்சி - 4

அலகுப்பயிற்சிக்கான குறிப்பு
வினா எண்: 2 – பயிற்சி 4.1 ல் - 9 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 3 – பயிற்சி 4.4 ல் - 9 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 5 – பயிற்சி 4.3 ல் - 3 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 7 – பயிற்சி 4.1 ல் - 1 ஆம் வினா போன்றது.

1. கொடுக்கப்பட்ட படத்தில் $BD \perp AC$ & $CE \perp AB$, எனில் (i) $\Delta AEC \backsim \Delta ADB$ (ii) $\frac{CA}{AB} = \frac{CE}{DB}$ என நிரூபிக்கவும். (2M)

i) ΔAEC மற்றும் ΔADB ஆகியன இரண்டு முக்கோணங்கள்.

மேலும் $\angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$

[BD ஆனது AC-க்கு செங்குத்து மற்றும் CE ஆனது AB-க்கு செங்குத்து]

$\therefore \angle EAC = \angle DAB$

$\angle A$ பொது AA – விதிமுறைப்படி,

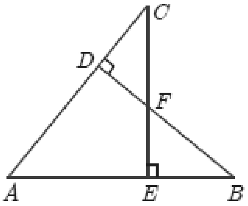
$\Delta AEC \backsim \Delta ADB$

ii) $\Delta AEC \backsim \Delta ADB$ ((i)-லிருந்து)

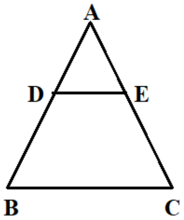
$\Rightarrow \frac{CA}{BA} = \frac{EC}{DB}$

$\Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{CE}{DB}$

நிரூபிக்கப்பட்டது.



4. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் ABC-யில் $AB = AC$ ஆகும். $AD = AE$ என இருக்குமாறு D மற்றும் E என்ற புள்ளிகள் முறையே பக்கங்கள் AB மற்றும் AC-யின் மீது அமைந்துள்ளன. B, C, E மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்டுக. (5M)



நாம் நிரூபிக்க வேண்டியது

$\angle ABC + \angle CED = 180^\circ$

$\angle ABC + \angle BDE = 180^\circ$

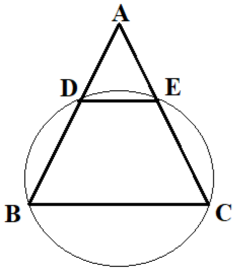
B, C, E மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் ஒரே வட்டத்தில் அமையும் எனக் காட்ட வேண்டும்.

ΔABC-ல்

$AD = AE, \ AB = AC$

$AB - AD = AC - AE$

$DB = EC$



தேல்ஸ் தேற்றத்தின் மறுதலையின் படி,

$AD = AE, \ DB = EC$

$\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ADE$ (ஒத்த கோணங்கள்)

$\angle ABC + \angle BDE = \angle ADE + \angle BDE$

இருபுறமும் $\angle BDE$-ஐக் கூட்ட

$\angle ABC + \angle BDE = 180^\circ$

$\angle ACB + \angle BDE = 180^\circ$

$\because \angle ABC = \angle ACB \ (AB = AC)$

$DE \parallel BC$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle AED$

$\Rightarrow \angle ACB + \angle CED = \angle AED + \angle CED$

$\angle CED$-ஐ இருபுறமும் கூட்ட

$\Rightarrow \angle ACB + \angle CED = 180^\circ$

$\angle ABC + \angle CED = 180^\circ$

[காரணம் $\angle ABC = \angle ACB$)

$\therefore BDEC$ நாற்கரம் ஆதலால்

$\Rightarrow \angle ABC + \angle CED = 180^\circ$

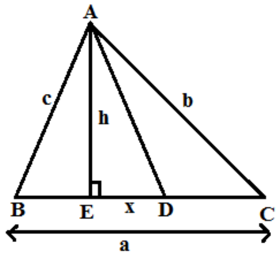
$\Rightarrow \angle ACB + \angle BDE = 180^\circ$

$\therefore$ B, C, E மற்றும் D என்ற புள்ளிகள் **ஒரே வட்டத்தில் அமையும்.**

6. BC-யின் மையப்புள்ளி D மற்றும் $AE \perp BC. BC = a,\ AC = b,\ AB = c,\ ED = x,\ AD = p$ மற்றும் $AE = h$, எனில் (i) $b^2 = p^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ (ii) $c^2 = p^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ (iii) $b^2 + c^2 = 2p^2 + \frac{a^2}{2}$ என நிரூபிக்க. (5M)

BC ன் மையப்புள்ளி D, $\angle AED = 90^\circ$

$\angle ADE < 90^\circ \Rightarrow \angle ADE$ ஆனது குறுங்கோணம் மற்றும் $\angle ADC > 90^\circ \Rightarrow \angle ADC$ ஆனது விரிகோணம்



(i) ΔADC-ல், $\angle ADC$ ஆனது விரிகோணம்

$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\,DC \times DE$

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + (\frac{1}{2}BC)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\,BC \cdot DE\right)$

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + \frac{1}{4}BC^2 + (\,BC \cdot DE)$

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + (DE \cdot BC) + \frac{1}{4}BC^2$ …… (1)

$\Rightarrow \boldsymbol{b^2 = p^2 + ax + \frac{1}{4}a^2}$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

(ii) ΔABD ல், $\angle ADE$ ஆனது குறுங்கோணம்

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\,BD \cdot DE$

$AB^2 = AD^2 + \left[\frac{1}{2}BC\right]^2 - \left[2 \times \frac{1}{2}BC \cdot DE\right]$

$AB^2 = AD^2 + \frac{1}{4}BC^2 - BC \cdot DE$

$AB^2 = AD^2 - BC \cdot DE + \frac{1}{4}BC^2$ ………….. (2)

$\Rightarrow \boldsymbol{c^2 = p^2 - ax + \frac{1}{4}a^2}$

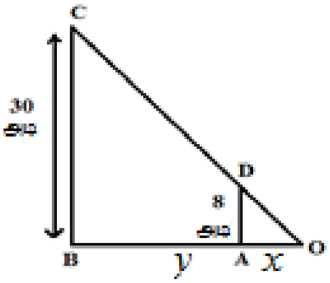
(iii) (1) மற்றும் (2)-லிருந்து,

$AB^2 + BC^2 = 2\,AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

$\boldsymbol{c^2 + b^2 = 2p^2 + \frac{a^2}{2}}$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

8. **30 அடி உயரமுள்ள ஒரு தூணின் அடிப்பகுதியிலிருந்து 8 அடி உயரமுள்ள ஒரு ஈமு கோழி விலகி நடந்து செல்கிறது. ஈமு கோழியின் நிழல் அது நடந்து செல்லும் திசையில் அதற்கு முன் விழுகிறது. ஈமு கோழியின் நிழலின் நீளத்திற்கும், ஈமு தூணிலிருந்து இருக்கும் தொலைவிற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பைக் காண்க.** (5M)



OA என்பது ஈமுவின் நிழல் $= x$

$AB = y$

தூணின் நிழல் OB

$OB = OA + AB = x + y$

தேல்ஸ் தேற்றத்தின் படி

$\frac{OA}{OB} = \frac{AD}{BC}$

$\frac{x}{x+y} = \frac{8}{30}$

தலைகீழி எடுக்க,

$\frac{x+y}{x} = \frac{30}{8}$

$\frac{x}{x} + \frac{y}{x} = \frac{30}{8}$

$1 + \frac{y}{x} = \frac{30}{8}$

$\frac{y}{x} = \frac{30}{8} - 1$

$\frac{y}{x} = \frac{30-8}{8}$

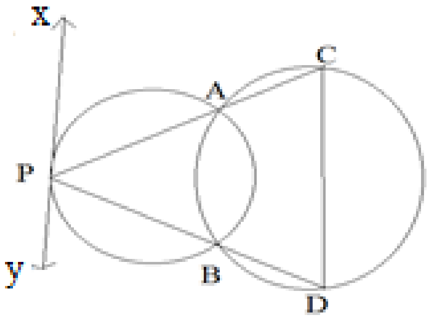
$\frac{y}{x} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$

$\frac{y}{x} = \frac{11}{4}$

$x = \frac{4}{11} \times y$

ஈமுவின் நிழல் $= \boldsymbol{\frac{4}{11}} \times$ **தொலைவு**

9. A மற்றும் B என்ற புள்ளிகளில் இரு வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்கின்றன. ஒரு வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளி P-யிலிருந்து வரையப்படும் PAC மற்றும் PBD என்ற கோடுகள் இரண்டாவது வட்டத்தினை முறையே C மற்றும் D-யில் வெட்டுகின்றன எனில், CD-யானது P வழியே வரையப்படும் தொடுகோட்டிற்கு இணை என நிரூபிக்கவும். (5M)



XY ஆனது புள்ளி P வழியே வரையப்படும் தொடுகோடு

நிரூபிக்க: $CD \parallel XY$

AB -ஐ இணைக்க வேண்டும்.

நிரூபணம்: $ABCD$ ஆனது வட்ட நாற்கரமாகும்.

$\angle BDC + \angle BAC = 180^\circ$ .... (1)

$\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC$ .... (2)

$\angle BDC = \angle PAB$

$\angle PBA = \angle ACD$

XY ஆனது புள்ளி P வழியே வரையப்படும் தொடுகோடு என்பதால்,

$\angle PAB = \angle BPY$ (மாற்று வட்டத்துண்டு தேற்றத்தின் படி)

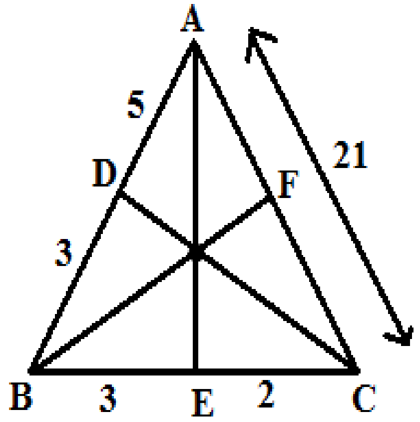
$\therefore\ \angle PAB = \angle PDC$

$\angle BPY = \angle PDC$

$\therefore$ **$XY \parallel CD$**

நிரூபிக்கப்பட்டது.

10. ABC என்ற ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் AB, BC, AC-யின் (அல்லது பக்கங்களின் நீட்சி) மீது முறையே D, E, F என்ற புள்ளிகள் உள்ளன. $AD : DB = 5 : 3, BE : EC = 3 : 2$ மற்றும் $AC = 21$ எனில், கோட்டுத்துண்டு CF-யின் நீளம் காண்க. (5M)



$$\frac{AD}{DB} = \frac{5}{3}$$

மேலும் $\frac{BE}{EC} = \frac{3}{2}$

$AC = 21$

$\Rightarrow \frac{CF}{FA} = \frac{CF}{21-CF}$

∴ சீவாஸ் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{BE}{EC} \times \frac{CF}{FA} \times \frac{AD}{DB} = 1$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{CF}{21-CF} \times \frac{5}{3} = 1$$

$$\frac{CF}{21-CF} \times \frac{5}{2} = 1$$

$$\frac{CF}{21-CF} = \frac{2}{5}$$

$$5CF = 42 - 2CF$$

$$7CF = 42$$

$$CF = \frac{42}{7}$$

$= 6$ **அலகுகள்.**

5. ஆயத்தொலை வடிவியல்

பயிற்சி 5.1

1. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க. 5M

(i) $(1,-1),(-4,6)$ மற்றும் $(-3,-5)$

முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -4 & -3 & 1\\ -1 & 6 & -5 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[(6+20+3)-(4-18-5)]$$

$$=\frac{1}{2}[29-(-19)]$$

$A=\frac{1}{2}[29+19]=\frac{1}{2}(48)=$ **24 ச.அலகுகள்**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

1. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க. (ii) $(-10,-4),(-8,-1)$ மற்றும் $(-3,-5)$

எ.கா. 5.1: $(-3,5)$, $(5,6)$ மற்றும் $(5,-2)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

2. கீழ்க்காணும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையுமா எனத் தீர்மானிக்கவும். 5M

(i) $\left(-\frac{1}{2},3\right),(-5,6)$ மற்றும் $(-8,8)$

முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -5 & -8 & -\frac{1}{2}\\ 3 & 6 & 8 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[(-3-40-24)-(-15-48-4)]$$

$$=\frac{1}{2}[(-67)-(-67)]$$

$$=\frac{1}{2}[-67+67]$$

$$\boldsymbol{A=0}$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் **ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும்.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

2. கீழ்க்காணும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையுமா எனத் தீர்மானிக்கவும். (ii) $(a,b+c),(b,c+a)$ மற்றும் $(c,a+b)$

4. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமைந்தவை எனில் 'a'-யின் மதிப்பைக் காண்க. (i) $(2,3),(4,a)$ மற்றும் $(6,-3)$ (ii) $(a,2-2a),(-a+1,2a)$ மற்றும் $(-4-a,6-2a)$

எ.கா .5.2: $P(-1.5,3)$, $Q(6,-2)$, மற்றும் $R(-3,4)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் எனக் காட்டுக. **(PTA-4, MAY-22)**

3. வரிசையில் அமைந்த முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகளும், அதன் பரப்பளவுகளும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $'p'$-யின் மதிப்பைக் காண்க. 5M

(i) முனைப் புள்ளிகள்: $(0,0),(p,8),(6,2)$ பரப்பு : 20 சதுர அலகுகள்

முக்கோணத்தின் பரப்பு = 20

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & p & 6 & 0\\ 0 & 8 & 2 & 0\end{bmatrix}=20$$

$$\frac{1}{2}[(0+2p+0)-(0+48+0)]=20$$

$$2p-48=40$$

$$2p=40+48=88$$

$$\boldsymbol{p=44}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

3. வரிசையில் அமைந்த முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகளும், அதன் பரப்பளவுகளும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. $'p'$-யின் மதிப்பைக் காண்க. (ii) முனைப் புள்ளிகள்: $(p,p),(5,6),(5,-2)$ பரப்பு: 32 சதுர அலகுகள் 5M

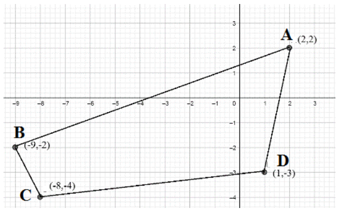
எ.கா. 5.3: $A(-1,2)$, $B(k,-2)$ மற்றும் $C(7,4)$ ஆகியவற்றை வரிசையான முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 22 சதுர அலகுகள் எனில், k-யின் மதிப்புக் காண்க. **(JUL-22)** 5M

5. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க? JUN-23 5M

(i) $(-9,-2),(-8,-4),(2,2)$ மற்றும் $(1,-3)$

$ABCD$ ன் பரப்பைக் காண கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளைக் கடிகார முள்ளின் எதிர் திசையில் அமையுமாறு எடுத்துக்கொள்ளவும்

$\boldsymbol{A(2,2), B(1,-3), C(-8,-4), D(-9,-2)}$



$ABCD$ ன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -9 & -8 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}[(-4+36+24+2)-(-18+16-4-6)]$

$= \frac{1}{2}[(62-4)-(-28+16)]$

$= \frac{1}{2}[58-(-12)] = \frac{1}{2}[58+12] = \frac{1}{2}(70)$

பரப்பு $= \mathbf{35}$ சதுர அலகுகள்

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க. 5M
(ii) $(-9,0),(-8,6),(-1,-2)$ மற்றும் $(-6,-3)$

எ.கா. 5.6: $(8,6)$, $(5,11)$, $(-5,12)$ மற்றும் $(-4,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க. **(APR-23, JUL-22)**

6. $(-4,-2),(-3,k),(3,-2)$ மற்றும் $(2,3)$ ஆகிய முனைகளை வரிசையாக கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு 28 ச.அலகுகள் எனில், k-யின் மதிப்புக் காண்க. 5M PTA-5, SEP-20

நாற்கரத்தின் பரப்பு $= 28$ சதுர அலகுகள்

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -3 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & k & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = 28$

$[(-4k+6+9-4)-(6+3k-4-12)] = 56$

$(-4k+11)-(3k-10) = 56$

$-4k+11-3k+10 = 56$

$-7k = 56-21$

$-7k = 35$

$k = \frac{35}{-7}$

$\boldsymbol{k = -5}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப்பயிற்சி: 5M

4. $A(-5,7)$, $B(-4,k)$, $C(-1,-6)$ மற்றும் $D(4,5)$ ஆகியவற்றை முனைகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பரப்பு 72 ச.அலகுகள் எனில், k-யின் மதிப்பைக் காண்க.

7. $A(-3,9), B(a,b)$ மற்றும் $C(4,-5)$ என்பன ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகள் மற்றும் $a+b=1$ எனில், a மற்றும் b-யின் மதிப்பைக் காண்க. 5M

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= 0$

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & a & 4 & -3 \\ 9 & b & -5 & 9 \end{bmatrix} = 0$

$[(-3b-5a+36)-(9a+4b+15)] = 0$

$-3b-5a+36-9a-4b-15 = 0$

$-5a-9a-3b-4b+21 = 0$

$-14a-7b+21 = 0$

$-2a-b+3 = 0$

$2a+b = 3$ …………….. (1)

$a+b = 1$ (கொடுக்கப்பட்டது)……….. (2)

(1) – (2) $\Rightarrow 2a+b-a-b = 3-1$

$\Rightarrow \boldsymbol{a = 2}$

$a = 2$ என (2) ல் பிரதியிட

$2+b = 1$

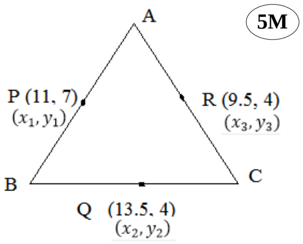
$b = 1-2$

$\boldsymbol{b = -1}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 5.4: $P(-1,-4)$, $Q(b,c)$ மற்றும் $R(5,-1)$ என்பன ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் புள்ளிகள் என்க. மேலும் $2b+c=4$ எனில் b மற்றும் c –யின் மதிப்பு காண்க. **(SEP-21)** 5M

8. ΔABC-யின் பக்கங்கள் AB, BC மற்றும் AC ஆகியவற்றின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே $P(11,7), Q(13.5,4)$ மற்றும் $R(9.5,4)$ என்க. முக்கோணத்தின் முனைப் புள்ளிகள் A, B மற்றும் C காண்க. மேலும், ΔABC-யின் பரப்பை ΔPQR-யின் பரப்புடன் ஒப்பிடுக. 5M



முனை A: சூத்திரம் $(x_1 + x_3 - x_2, \ y_1 + y_3 - y_2), P(11,7), R(9.5,4)$

$= (11 + 9.5 - 13.5, \ 7 + 4 - 4) = A(7,7)$

முனை B: சூத்திரம் $(x_1 + x_2 - x_3, \ y_1 + y_2 - y_3)$,

$= (11 + 13.5 - 9.5, \ 7 + 4 - 4) = B(15,7)$

முனை C : சூத்திரம் $(x_2 + x_3 - x_1, \ y_2 + y_3 - y_1)$,

$= (13.5 + 9.5 - 11, 4 + 4 - 7) = C(12,1)$

முக்கோணம் ABC இன் பரப்பு

$A(7,7), \ B(15,7), C \ (12,1)$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 15 & 12 & 7 \\ 7 & 7 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}[(49 + 15 + 84) - (105 + 84 + 7)]$

$= \frac{1}{2}[148 - 196] \ = -\frac{48}{2} \ = -24$

$= -24$ சதுர அலகுகள்

முக்கோணம் PQR இன் பரப்பு

$P(11,7) \ Q(13.5,4)$ மற்றும் $R(9.5,4)$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 11 & 13.5 & 9.5 & 11 \\ 7 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

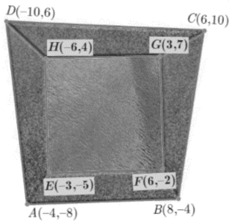
$= \frac{1}{2}[(44 + 54 + 66.5) - (94.5 + 38 + 44)]$

$= \frac{1}{2}[164.5 - 176.5] = \frac{1}{2}(12)$

$= 6$ சதுர அலகுகள்

ΔABC இன் பரப்பு $= 24 \ = 4(6) = \mathbf{4} \times \Delta \boldsymbol{PQR}$ **இன் பரப்பு**

9. **நாற்கர வடிவ நீச்சல் குளத்தின் கான்கிரீட் உள்முற்றமானது படத்தில் காட்டியுள்ளபடி அமைக்கப்பட்டுள்ளது எனில், உள்முற்றத்தின் பரப்பு காண்க** PTA-2 5M



நீச்சல் குளத்தின் உள்முற்றத்தின் பரப்பை கண்டறிய நாற்கரம் $ABCD$ ன் பரப்பிலிருந்து நாற்கரம் EFGH ன் பரப்பை கழிக்க வேண்டும்.

$\boldsymbol{A(-4,-8), B(8,-4), C(6,10), D(-10,6)}$

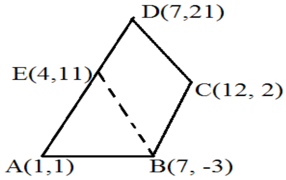
நாற்கரம் $ABCD$ ன் பரப்பு:

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 8 & 6 & -10 & -4 \\ -8 & -4 & 10 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}[(16 + 80 + 36 + 80) - (-64 - 24 - 100 - 24)]$

$= \frac{1}{2}[212 - (-212)] \ = \frac{1}{2}[212 + 212] \ = \frac{1}{2}[424] = \mathbf{212}$ சதுர அலகுகள்

நாற்கரம் $EFGH$-ன் பரப்பு: $\boldsymbol{E(-3,-5), F(6,-2), G(3,7), H(-6,4)}$



$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 & -6 & -3 \\ -5 & -2 & 7 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}[(6 + 42 + 12 + 30) - (-30 - 6 - 42 - 12)]$

$= \frac{1}{2}[90 - (-90)] \ = \frac{1}{2}[180] \ = 90$ சதுர அலகுகள்

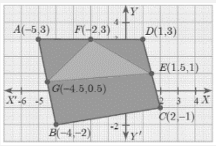
உள்முற்றத்தின் பரப்பு $=$ நாற்கரம் $ABCD$ ன் பரப்பு $-$ நாற்கரம் $EFGH$ ன் பரப்பு

$= 212 - 90 \ = \mathbf{122}$ **சதுர அலகுகள்.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

10. $A(-5,-4), B(1,6)$ மற்றும் $C(7,-4)$ ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாக் கொண்ட முக்கோண வடிவக் கண்ணாடிக்கு வர்ணம் பூசப்படுகிறது. 6 சதுர அடி பரப்புக்கு வர்ணம் பூச ஒரு வாளி தேவைப்படுகிறது எனில் கண்ணாடியின் முழுப் பகுதியையும் ஒரு முறை வர்ணம் பூச எத்தனை வாளிகள் தேவைப்படும்?

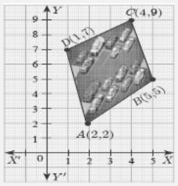


11. படத்தைப் பயன்படுத்திப் பரப்பைக் காண்க.
(i) முக்கோணம் AGF (ii) முக்கோணம் FED (iii) நாற்கரம் $BCEG$.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 5.5: ஓர் அறையின் தளமானது ஒரே மாதிரியான முக்கோண வடிவத் தரை ஓடுகளைக் கொண்டு (tiles) அமைக்கப்படுகிறது. அதில் ஓர் ஓட்டின் முனைகள் $(-3,2)$, $(-1,-1)$ மற்றும் $(1,2)$ ஆகும். தரைத்தளத்தை முழுமையாக அமைக்க 110 ஓடுகள் தேவைப்படுகின்றது எனில், அதன் பரப்பைக் காண்க. **5M**

எ.கா .5.7: கொடுக்கப்பட்ட படமானது ஒரு வளாகத்தில் புதிய வாகன நிறுத்தம் ஏற்படுத்த அமைக்கப்பட்ட பகுதியைக் காட்டுகிறது. இதை அமைப்பதற்கு ஒரு சதுர அடிக்கு ₹ 1300 செலவாகும் என மதிப்பிடப்படுகிறது எனில், வாகன நிறுத்தம் ஏற்படுத்துவதற்குத் தேவையான மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடவும்.



பயிற்சி 5.2

1. **X அச்சுடன் மிகை திசையில் சாய்வு கோணத்தைக் கொண்ட கோட்டின் சாய்வு என்ன?** **2M**

(i) 90°

$m = \tan\theta$

$= \tan 90^\circ = \infty$

$m =$ **வரையறுக்க முடியாது**

(ii) 0°

$m = \tan\theta$

$m = \tan 0^\circ$

$m = \mathbf{0}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 5.8: (i) ஒரு கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் $30°$ எனில், அக்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க. **2M**

2. **பின்வரும் சாய்வுகளைக் கொண்ட நேர்கோடுகளின் சாய்வுக் கோணம் என்ன?** **2M** PTA-3

(i) 0

$m = 0$

$\tan\theta = 0$

சாய்வுக் கோணம் 0°

(ii) 1

சாய்வு $m = 1$

$\tan\theta = 1$

$\theta = 45^\circ$ $(\because \tan 45^\circ = 1)$

சாய்வுக் கோணம் 45°

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 5.8: (ii) ஒரு கோட்டின் சாய்வு $\sqrt{3}$ எனில், அக்கோட்டின் சாய்வுக் கோணம் காண்க. **2M**

3. **கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.** **2M** PTA-2

(ii) $(\sin\theta, -\cos\theta)$ மற்றும் $(-\sin\theta, \cos\theta)$

சாய்வு $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{\cos\theta-(-\cos\theta)}{-\sin\theta-\sin\theta}$

$= \frac{2\cos\theta}{-2\sin\theta}$

$(x_1, y_1) = (\sin\theta, -\cos\theta)$
$(x_2, y_2) = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$= \frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$

$= -\cot\theta$

$\boldsymbol{m = -\cot\theta}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

3. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க. (i) $(5, \sqrt{5})$ மற்றும் ஆதிப்புள்ளி **(JUN-23, JUL-22)** **2M**

7. $(-2, a)$ மற்றும் $(9,3)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சாய்வு $-\frac{1}{2}$ எனில் a-யின் மதிப்பு காண்க.

எ.கா. 5.9: கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க (i) $(-6,1)$ மற்றும் $(-3,2)$ (ii) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ மற்றும் $\left[\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right]$ (iii) $(14,10)$ மற்றும் $(14,-6)$ **(SEP-20)**

எ.கா. 5.13: $A(1,-2)$, $B(6,-2)$, $C(5,1)$ மற்றும் $D(2,1)$ என்பன நான்கு புள்ளிகள் எனில், (i) (a) AB (b) CD என்ற கோட்டுத் துண்டுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க. (ii) (a) BC (b) AD என்ற கோட்டுத் துண்டுகளின் சாய்வுகளைக் காண்க. (iii) விடைகளிலிருந்து நீங்கள் அறிவது என்ன? **5M**

4. **$A(5,1)$ மற்றும் P ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வு என்ன? இதில் P என்பது $(4,2)$ & $(-6,4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி ஆகும்.** **2M**

P என்பது $(4,2)$ மற்றும் $(-6,4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி P ஐக் கண்டறிய வேண்டும்.

நடுப்புள்ளி $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{4+(-6)}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{6}{2}\right) = (-1,3)$

$A(5,1)$ மற்றும் $P(-1,3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு செங்குத்தான கோட்டின் சாய்வை கண்டறிய வேண்டும்.

AP ன் சாய்வு $\times$ தேவையான கோட்டின் சாய்வு $= m_1 \times m_2 = -1$

AP ன் சாய்வு $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3-1}{-1-5} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$

$\therefore$ தேவையான கோட்டின் சாய்வு $= \frac{-1}{-\frac{1}{3}} = \mathbf{3}$

5. $(-3,-4),(7,2)$ மற்றும் $(12,5)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தவை எனக் காட்டுக. SEP-21

$A(-3,-4), B(7,2)$ மற்றும் $C(12,5)$ என்க. 2M

AB இன் சாய்வு $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{[2-(-4)]}{[7-(-3)]}$

$= \frac{2+4}{7+3}$

$= \frac{6}{10}$

$= \frac{3}{5}$

BC இன் சாய்வு

$= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{5-2}{12-7} = \frac{3}{5}$

AB இன் சாய்வு $= BC$ இன் சாய்வு

∴ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் **ஒரே கோடமைந்தவை** ஆகும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

6. $(3,-1),(a,3)$ மற்றும் $(1,-3)$ ஆகிய மூன்று புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்தவை எனில் a-யின் மதிப்பு காண்க? 2M

எ.கா. 5.12: $(-2,5)$, $(6,-1)$ மற்றும் $(2,2)$ ஆகிய புள்ளிகள் ஒரு கோடமைந்த புள்ளிகள் எனக் காட்டு. 5M

8. $(-2,6)$ மற்றும் $(4,8)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடானது $(8,12)$ மற்றும் $(x,24)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்து எனில், x-யின் மதிப்பு காண்க. PTA - 6

$(-2,6)$ மற்றும் $(4,8)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் கோட்டின் சாய்வு 2M

சாய்வு $m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .... (1)

$(8,12)$ மற்றும் $(x,24)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் கோட்டின் சாய்வு

சாய்வு $m_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$............ (2)

கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில்,

$m_1 \times m_2 = -1$

$\frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1$

$\frac{4}{x-8} = -1$

$4 = -(x-8) = -x+8$

$x = 8-4$

$\mathbf{x = 4}$

9. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யுமா என ஆராய்க. (i) $A(1,-4), B(2,-3)$ மற்றும் $C(4,-7)$ 5M

AB இன் சாய்வு $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$A(1,-4) \Rightarrow (x_1,y_1)$ $B(2,-3) \Rightarrow (x_2,y_2)$

$= \frac{[-3-(-4)]}{2-1}$

$= \frac{-3+4}{1} = 1$

BCஇன் சாய்வு $= \frac{[-7-(-3)]}{4-2}$

$B(2,-3) \Rightarrow (x_1,y_1)$ $C(4,-7) \Rightarrow (x_2,y_2)$

$= \frac{-7+3}{2}$

$= -\frac{4}{2} = -2$

CAஇன் சாய்வு $= \frac{[-7-(-4)]}{4-1}$

$C(4,-7) \Rightarrow (x_1,y_1)$ $A(1,-4) \Rightarrow (x_2,y_2)$

$= \frac{-7+4}{3} = -\frac{3}{3}$

$= -1$

AB இன் சாய்வு $\times CA$ இன் சாய்வு $= -1$

$1 \times (-1) = -1$

$-1 = -1$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிகளாகும்.

பிதாகரஸ் தேற்றத்தை பரிசோதிக்க,

$A(1,-4), B(2,-3), C(4,-7)$

$AB = \sqrt{(-3+4)^2+(2-1)^2}$

$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(-7+3)^2+(4-2)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2+(2)^2} = \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{20}$

$CA = \sqrt{(-7+4)^2+(4-1)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2+(3)^2} = \sqrt{9+9}$

$= \sqrt{18}$

$BC^2 = AB^2 + CA^2$

$(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{18})^2$

$20 = 20$

ஆம், பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

9. கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக. மேலும் பிதாகரஸ் தேற்றத்தை நிறைவு செய்யுமா என ஆராய்க. (ii). $L(0,5)$, $M(9,12)$ மற்றும் $N(3,14)$ **5M**

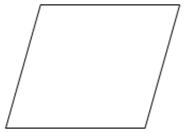
எ.கா. 5.15: பிதாகரஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தாமல், $(1,-4)$, $(2,-3)$ மற்றும் $(4,-7)$ என்ற முனைப் புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக. **(PTA-4)** **2M**

10. $A(2.5,3.5), B(10,-4), C(2.5,-2.5)$ மற்றும் $D(-5,5)$ ஆகியன இணைகரத்தின் முனைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக. **5M**

இணைகரத்தில் எதிரெதிர் பக்கங்கள் இணையாக இருக்கும். எதிரெதிர் பக்கங்களின் சாய்வுகள் சமம் எனக்காட்டுவதன் மூலம் அப்பக்கங்கள் இணை என காட்ட முடியும்.

சாய்வு $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$A(2.5,3.5), B(10,-4), C(2.5,-2.5), D(-5,5)$



AB இன் சாய்வு $m_1 = \frac{-4-3.5}{10-2.5} = \frac{-7.5}{7.5} = -1$

CD இன் சாய்வு $m_2 = \frac{[5-(-2.5)]}{-5-2.5} = \frac{5+2.5}{-7.5} = \frac{7.5}{-7.5} = -1$

$m_1 = m_2$

BC இன் சாய்வு $m_1 = \frac{(-2.5+4)}{2.5-10}$

$= \frac{1.5}{-7.5}$

$= \frac{-15}{75}$

$= -\frac{1}{5}$

DA இன் சாய்வு $m_2 = \frac{5-3.5}{-5-2.5}$

$= \frac{1.5}{-7.5}$

$= \frac{-15}{75} = -\frac{1}{5}$

$\therefore AB$ இன் சாய்வு $=$ CD இன் சாய்வு $= -1$

BC இன் சாய்வு $=$ DA இன் சாய்வு $= -\frac{1}{5}$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் **இணைகரத்தை** அமைக்கும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.
5M

11. $A(2,2)$, $B(-2,-3)$, $C(1,-3)$ மற்றும் $D(x,y)$ ஆகிய புள்ளிகள் இணைகரத்தை அமைக்கும் எனில் x மற்றும் y-யின் மதிப்பைக் காண்க.

அலகுப்பயிற்சி:

1. $P(-1,-1), Q(-1,4), R(5,4)$ மற்றும் $S(5,-1)$ ஆகிய புள்ளிகளால் ஆன செவ்வகம் $PQRS$-யில் A, B, C மற்றும் D என்பன முறையே பக்கங்கள் PQ, QR, RS மற்றும் SP-யின் நடுப்புள்ளிகள் ஆகும். $ABCD$ என்ற நாற்கரமானது ஒரு சதுரம், செவ்வகம் அல்லது சாய்சதுரமா? உங்கள் விடையைக் காரணத்தோடு விளக்குக.
5. தொலைவு காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தாமல், $(-2,-1), (4,0), (3,3)$ மற்றும் $(-3,2)$ என்பன இணைகரத்தின் முனைப் புள்ளிகள் எனக் காட்டுக.

12. $A(3,-4), B(9,-4), C(5,-7)$ மற்றும் $D(7,-7)$ ஆகிய புள்ளிகள் $ABCD$ என்ற சரிவகத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக. (5M)

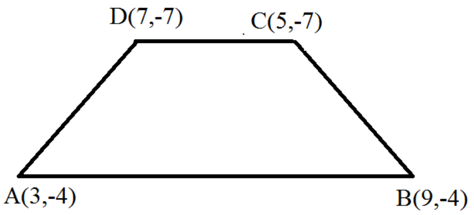
ஒரு சரிவகத்தில் இரண்டு பக்கங்கள் இணையாகவும், இரண்டு பக்கங்கள் இணையற்றதாகவும் இருக்கும்.

ABஇன் சாய்வு $m = \frac{-4+4}{9-3} = \frac{0}{6} = 0$

BC இன் சாய்வு $m = \frac{-7+4}{5-9} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

CD இன் சாய்வு $m = \frac{-7+7}{7-5} = \frac{0}{2} = 0$

DA இன் சாய்வு $m = \frac{-7+4}{7-3} = \frac{-3}{4}$



பக்கங்கள் AB மற்றும் CD ஆகியவை இணையாகும்.

பக்கங்கள் BC மற்றும் DA ஆகியவை இணையற்றவை. **எனவே $ABCD$ ஒரு சரிவகமாகும்.**

13. $A(-4,-2), B(5,-1), C(6,5)$ மற்றும் $D(-7,6)$ ஆகியவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் எனக் காட்டுக. (5M) MAY-22

பக்கம் AB இன் நடுபுள்ளி $= \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{-2-1}{2}\right)$

$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

பக்கம் BC இன் நடுபுள்ளி $= \left(\frac{5+6}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$

$Q = \left(\frac{11}{2}, \frac{4}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 2\right)$

பக்கம் CD இன் நடுபுள்ளி $= \left(\frac{6-7}{2}, \frac{5+6}{2}\right)$

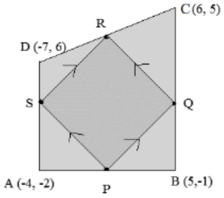
$R = \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

பக்கம் DA இன் நடுபுள்ளி $= \left(\frac{-7-4}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$

$= \left(-\frac{11}{2}, \frac{4}{2}\right)$

$S = \left(-\frac{11}{2}, 2\right)$

எதிரெதிர் பக்கங்களின் சாய்வு:



PQ இன் சாய்வு $= \frac{2+\frac{3}{2}}{\frac{11}{2}-\frac{1}{2}}$

$= \frac{7/2}{10/2} = \mathbf{\frac{7}{10}}$

RS இன் சாய்வு $= \frac{2-\frac{11}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{11}{2}} = \frac{7/2}{10/2} = \mathbf{\frac{7}{10}}$

QR இன் சாய்வு $= \frac{\frac{11}{2}-2}{-\frac{1}{2}-\frac{11}{2}} = \frac{7/2}{-12/2} = -\mathbf{\frac{7}{12}}$

PS இன் சாய்வு $= \frac{2+\frac{3}{2}}{-\frac{11}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{-11-1}{2}} = \frac{7/2}{-12/2} = -\mathbf{\frac{7}{12}}$

$PQ = RS$

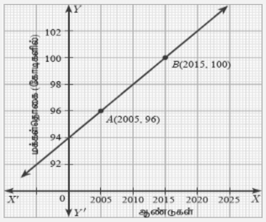
$QR = PS$

∴ நாற்கரத்தின் பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் **ஓர் இணைகரத்தை** அமைக்கும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 5.10: $(-2,2), (5,8)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு r மற்றும் $(-8,7)$, $(-2,0)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு s ஆகும் எனில், நேர்க்கோடு r-ஆனது நேர்க்கோடு s-க்கு செங்குத்தாக அமையுமா? (2M)

எ.கா. 5.11: $(3,-2)$, $(12,4)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு p மற்றும் $(6,-2)$ மற்றும் $(12,2)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு q ஆகும். p ஆனது q-க்கு இணையாகுமா? **(MAY - 22)** (5M)



எ.கா. 5.14 கீழே கொடுக்கப்பட்ட மக்கள் தொகைப் பெருக்கம் (கோடிகளில்) மற்றும் ஆண்டிற்கான வரைபடத்தில் AB என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க. மேலும் 2030-ம் ஆண்டிற்கான மக்கள் தொகையையும் கணக்கிடுக. (5M)

எ.கா. 5.16: ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத் துண்டானது, மூன்றாவது பக்கத்திற்கு இணையாகவும் மூன்றாவது பக்கத்தின் பாதியாகவும் இருக்கும் எனத் தொலைவு மற்றும் சாய்வு கருத்தைப் பயன்படுத்தி நிரூபிக்க. (5M)

CQ: $PQRS$ என்பது ஒரு சாய்சதுரம். அதன் மூலைவிட்டங்கள் PR மற்றும் QS ஆனது வெட்டும் புள்ளி M ஆகவும் $QS = 2PR$ எனவும் உள்ளது. S மற்றும் M-யின் ஆயப் புள்ளிகள் முறையே $(1,1)$ மற்றும் $(2,-1)$ எனில், P-யின் ஆயப் புள்ளிகளைக் காண்க. **(PTA-4)** (5M)

பயிற்சி 5.3

1. **$(1,-5)$ மற்றும் $(4,2)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியாகச் செல்வதும், கீழ்க்கண்டவற்றிற்கு இணையானதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (i) X அச்சு (ii) Y அச்சு** (2M)

கோட்டுத்துண்டின் நடுப்புள்ளி $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{1+4}{2}, \frac{-5+2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

(i) X அச்சு

தேவையான கோடு x -அச்சுக்கு இணையாகவும் $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$என்ற புள்ளி வழியும் செல்கிறது.

$x-$ அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் கோட்டின் சாய்வு $y = c$

$y = -\frac{3}{2}$

$2y = -3$

$2y + 3 = 0$

x-அச்சுக்கு இணையாக உள்ள கோட்டின் சமன்பாடு $\mathbf{2y+3=0}$

(ii) Y அச்சு

தேவையான கோடு x-அச்சுக்கு இணையாகவும் $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$என்ற புள்ளி வழியும் செல்கிறது.

y-அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் கோட்டின் சாய்வு $x = b$

$x = \frac{5}{2}$

$2x = 5$

$\mathbf{2x-5=0}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 5.17: $(5,7)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதும் (i) X அச்சுக்கு இணையாகவும் (ii) Y அச்சுக்கு இணையாகவும் அமைந்த நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (2M)

2. **$2(x-y)+5=0$ என்ற நேர்கோட்டு சமன்பாட்டின் சாய்வு, சாய்வு கோணம் மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.** (2M)

$2(x-y)+5=0$

$2x-2y+5=0$

$2y = 2x+5$

$y = x + \frac{5}{2}$

சாய்வு $\mathbf{m = 1}$

சாய்வு கோணம்: $m = 1$

$\tan\theta = \tan 45$

$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$

y வெட்டுத்துண்டு $(c) = \mathbf{\frac{5}{2}}$

3. **சாய்வு கோணம் 30° மற்றும் y-வெட்டுத்துண்டு -3 ஆகியவற்றைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.** (2M)

$\theta = 30^\circ$

$m = \tan\theta$

$m = \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

y வெட்டுத்துண்டு $= -3$ நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$y = mx + c$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}x + (-3) = \frac{x}{\sqrt{3}} - 3$

$\sqrt{3}y = x - 3\sqrt{3}$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$\boldsymbol{x - \sqrt{3}y - 3\sqrt{3} = 0}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா. 5.18: பின்வரும் விவரங்களைப் பயன்படுத்தி நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. (i) சாய்வு 5 மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு -9 (ii) சாய்வு கோணம் $45°$ மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு 11

4. **$\sqrt{3}x + (1-\sqrt{3})y = 3$ என்ற நேர்க்கோட்டு சமன்பாட்டின் சாய்வு, y-வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் காண்க.** (2M)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை $y = mx + c$ உடன் ஒப்பிட $(1-\sqrt{3})y = -\sqrt{3}x + 3$

$y = \frac{(-\sqrt{3}x+3)}{1-\sqrt{3}}$

$y = \frac{-\sqrt{3}x}{1-\sqrt{3}} + \frac{3}{1-\sqrt{3}}$

சாய்வு $= -\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = m$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$

$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-1}$

$= \mathbf{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$

y வெட்டுத்துண்டு $= \frac{3}{1-\sqrt{3}}$

$= \frac{3}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$= \frac{3(1+\sqrt{3})}{1-3}$

$= \mathbf{\frac{3+3\sqrt{3}}{-2}}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 5.19: $8x - 7y + 6 = 0$ என்ற கோட்டின் சாய்வு மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக. **(SEP-21)** (2M)

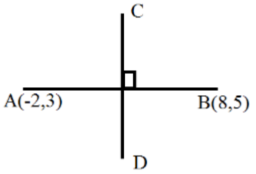
5. $(-2,3)$ & $(8,5)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோடானது, $y = ax + 2$ என்ற நேர்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானது எனில், 'a'-யின் மதிப்பு காண்க.

2M

$(-2,3)$ மற்றும் $(8,5)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு

$m_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{5-3}{8+2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$AB \perp CD$



$m_1 \times m_2 = -1$

$\frac{1}{5} \times m_2 = -1$

$m_2 = -1 \times \frac{5}{1} = -5$

$y = ax + 2$ என்ற கோட்டின் சாய்வு

$m_2 = a$

$m_2 = -5$

$\boldsymbol{a = -5}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

எ.கா .5.22: $(2,5)$ மற்றும் $(4,7)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும், $A\,(1,4)$ என்ற புள்ளி வழி செல்லுவதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

6. (19, 3) என்ற புள்ளியை அடியாகக் கொண்ட குன்றானது செங்கோண முக்கோண வடிவில் உள்ளது. தரையுடன் குன்று ஏற்படுத்தும் சாய்வுக் கோணம் 45° எனில், குன்றின் அடி மற்றும் உச்சியை இணைக்கும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

குன்றின் உச்சி மற்றும் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் கோட்டின் சமன்பாடு

2M

சாய்வு $m = \tan 45^\circ = 1$

சமன்பாடு: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 3 = 1(x - 19)$

$y - 3 = x - 19$

$0 = x - y - 19 + 3$

$\therefore x - y - 16 = 0$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு

$\boldsymbol{x - y - 16 = 0}$ ஆகும்.

7. கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2M

(i) $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ மற்றும் $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

தேவையான சமன்பாடு $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$\frac{y-\frac{2}{3}}{-2-\frac{2}{3}} = \frac{x-2}{-\frac{1}{2}-2}$

$\frac{\frac{3y-2}{3}}{-\frac{8}{3}} = \frac{x-2}{-\frac{5}{2}}$

$\frac{-(3y-2)}{8} = \frac{-2(x-2)}{5}$

$5(3y-2) = 16(x-2)$

$15y - 10 = 16x - 32$

$16x - 15y - 32 + 10 = 0$

$16x - 15y - 22 = 0$

தேவையானகோட்டின் சமன்பாடு $\boldsymbol{16x - 15y - 22 = 0}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

7. கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேரக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (ii) $(2,3)$ & $(-7,-1)$

எ.கா.5.23: $(5,-3)$ & $(7,-4)$ என்ற இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

8. ஒரு பூனை xy-தளத்தில் $(-6,-4)$ என்ற புள்ளியில் உள்ளது. $(5,11)$ என்ற புள்ளியில் ஒரு பால் புட்டி வைக்கப்பட்டுள்ளது. பூனை மிகக் குறுகிய தூரம் பயணித்துப் பால் அருந்த விரும்புகிறது எனில், பாலைப் பருகுவதற்குத் தேவையான பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தவையான பாதையின்சமன்பாடு $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$(-6,-4)$ மற்றும் $(5,11)$ 2M APR-23

$\frac{y+4}{15} = \frac{x+6}{11}$

$(x_1, y_1) \Rightarrow (-6,-4)$
$(x_2, y_2) \Rightarrow (5,11)$

$11(y+4) = 15(x+6)$

$11y + 44 = 15x + 90$

$15x - 11y + 90 - 44 = 0$

தேவையான சமன்பாடு $\boldsymbol{15x - 11y + 46 = 0}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

CQ: ஒரு பூனை xy-தளத்தில் $(6,4)$ என்ற புள்ளியில் உள்ளது. $(-5,-11)$ என்ற புள்ளியில் ஒரு பால் புட்டி வைக்கப்பட்டுள்ளது. பூனை மிகக் குறுகிய தூரம் பயணித்துப் பால் அருந்த விரும்புகிறது எனில், பாலைப் பருகுவதற்குத் தேவையான பாதையின் சமன்பாட்டைக் காண்க. **(JUL- 22)**

எ.கா. 5.24: வெவ்வேறு உயரங்கள் கொண்ட இரண்டு கட்டடங்கள் ஒன்றுக்கொன்று எதிரெதிராக உள்ளன. ஒரு கனமான கம்பியானது கட்டடங்களின் மேற்புறங்களை $(6,10)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(14,12)$ என்ற புள்ளி வரை இணைக்கிறது எனில், கம்பியின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

அலகுப்பயிற்சி: 7. ஒரு பால்கடை உரிமையாளர் 1 லிட்டர் ₹16 வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு 1220 லிட்டரும், 1 லிட்டர் ₹14 வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு 980 லிட்டரும் விற்பனை செய்கிறார். விற்பனை விலையானது தேவையோடு நேரிய தொடர்பு உடையது என ஊகித்துக் கொண்டால், 1 லிட்டர், ₹17 வீதம் ஒரு வாரத்திற்கு எத்தனை லிட்டர் விற்பனை செய்வார்?

10. $(-1,2)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதும், சாய்வு $-\frac{5}{4}$ உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2M MAY-22

சாய்வு $m = -\frac{5}{4}$

$(-1,2)$ என்ற புள்ளி வழியாக செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = \left(-\frac{5}{4}\right)(x - (-1))$

$4(y-2) = -5(x+1)$

$4y - 8 = -5x - 5$

$5x + 4y + 5 - 8 = 0$

தேவையான சமன்பாடு $\boldsymbol{5x + 4y - 3 = 0}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

எ.கா.5.21: $(3,-4)$ என்ற புள்ளியின் வழி செல்வதும், $\frac{-5}{7}$-ஐ சாய்வாக உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

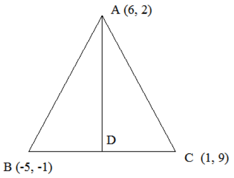
CQ: $(-4,3)$ என்ற புள்ளியின் வழி செல்வதும் $-\frac{7}{5}$ -ஐ சாய்வாக உடையதுமானநேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக்காண்க. **(PTA - 1)**

9. $A(6,2), B(-5,-1)$ மற்றும் $C(1,9)$-ஐ முனைகளாகக் கொண்ட ΔABC-யின் முனை A-யிலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோடு மற்றும் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. **5M** SEP-21, PTA-6

முனை A-யிலிருந்து வரையப்படும் நடுக்கோடானது, BC ன் நடுப்புள்ளி Dயில் சந்திக்கிறது.

$$D = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-1+9}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{8}{2}\right) = (-2,4)$$

$(x_1, y_1) \Rightarrow B(-5,-1)$
$(x_2, y_2) \Rightarrow C(1,9)$



நடுக்கோடு AD ன் சமன்பாடு:

$(x_1, y_1) \Rightarrow A(6,2)$
$(x_2, y_2) \Rightarrow D(-2,4)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{x-6}{-2-6} = \frac{y-2}{2} = \frac{x-6}{-8}$$

$$-8(y-2) = 2(x-6)$$

$$-8y + 16 = 2x - 12$$

$$2x + 8y - 12 - 16 = 0 \Rightarrow 2x + 8y - 28 = 0$$

2 ஆல் வகுக்க, $\boldsymbol{x + 4y - 14 = 0}$

நடுக்கோடு AD ஆனது BC-க்கு செங்குத்தாகும்.

BC ன் சாய்வு $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{9+1}{1+5} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow m_1 \times m_2 = -1$

$$\frac{5}{3} \times m_2 = -1 \Rightarrow \quad m_2 = -1 \times \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$$

A வழியாக செல்லும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = -\frac{3}{5}(x-6)$$

$$5(y-2) = -3(x-6)$$

$$3x + 5y - 10 - 18 = 0$$

$$\boldsymbol{3x + 5y - 28 = 0}$$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். **2M**

CQ: $A(-1,3), B(1,-1)$ மற்றும் $C(5,1)$ என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் முனைகள் எனில் முனை C வழியே செல்லும் நடுக்கோட்டின் நீளம் காண்க. **(MDL)**

11. நீங்கள் ஒரு பாடலைப் பதிவிறக்கம் செய்யும்போது, x வினாடிகளுக்குப் பிறகு பதிவிறக்கம் செய்யவேண்டிய மீதமுள்ள பாடலின் சதவீதம் (மெகா பைட்டில்) y-ஆனது (தசமத்தில்) $\boldsymbol{y = -0.1x + 1}$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் குறிக்கப்பட்டால், **5M**

(i) பாடலின் மொத்த MB அளவைக் காண்க. (ii) 75% பாடலைப் பதிவிறக்கம் செய்ய எவ்வளவு வினாடிகள் ஆகும்? (iii) எத்தனை வினாடிகள் கழித்துப் பாடல் முழுமையாகப் பதிவிறக்கம் செய்யப்படும்?

(i) பாடலின் மொத்த MB அளவைக் காண, $x = 0$ எனக் கொடுக்க வேண்டும்.

$$y = -0.1x + 1$$

$x = 0$ எனில்,

$$y = -0.1(0) + 1$$
$$= 0 + 1 = 1$$

பாடலின்மொத்தஅளவு **1MB.**

(ii) $y = 75\% = 0.75 = 1 - 0.25$

$y = 0.25$ MB ஐ பதிவிறக்கம் செய்ய வேண்டும். $y = -0.1x + 1$

$$0.25 = -0.1x + 1$$
$$0.25 - 1 = -0.1x$$
$$-0.75 = -0.1x$$
$$x = \frac{0.75}{0.1}$$

$\therefore \boldsymbol{x = 7.5}$ **வினாடிகள்**

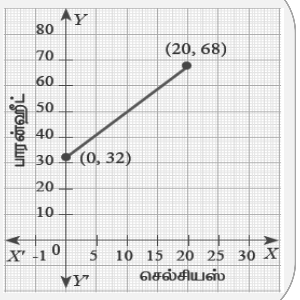
(iii) $0 = -0.1x + 1$

$$0.1x = 1$$
$$x = \frac{1}{0.1} = 10$$

10 வினாடிகள் கழித்துப் பாடல் முழுமையாகப் பதிவிறக்கம் செய்யப்படும்.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.5.20: வரைபடமானது y அச்சில் பாரன்ஹீட் டிகிரி வெப்பநிலையையும் x அச்சில் செல்சியஸ் டிகிரி வெப்பநிலையையும் குறிக்கிறது எனில், (a) கோட்டின் சாய்வு மற்றும் y வெட்டுத்துண்டு காண்க. (b) கோட்டின் சமன்பாட்டை எழுதுக. (c) பூமியின் சராசரி வெப்பநிலை $25°$ செல்சியஸாக இருக்கும்போது பூமியின் சராசரி வெப்பநிலையைப் பாரன்ஹீட்டில் காணலாம். **5M**



எ.கா.5.27: ஓர் அலைபேசி மின்கலத்தின் சக்தி 100% இருக்கும்போது (battery power) அலைபேசியைப் பயன்படுத்தத் தொடங்குகிறோம். x மணி நேரம் பயன்படுத்திய பிறகு மீதி இருக்கும் மின்கலத்தின் சக்தி y சதவீதம் (தசமத்தில்) ஆனது $y = -0.25x + 1$ ஆகும். (i) எத்தனை மணி நேரத்திற்குப் பிறகு மின்கலத்தின் சக்தி 40% ஆகக் குறைந்திருக்கும் எனக் காண்க. (ii) மின்கலம் தனது முழுச் சக்தியை இழக்க எடுத்துக்கொள்ளும் கால அளவு எவ்வளவு? **2M**

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y வெட்டுத் துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. (i) $(4, -6)$ (2M)

(i) x வெட்டுத்துண்டு $\Rightarrow a = 4$

y வெட்டுத்துண்டு $\Rightarrow b = -6$

வெட்டுத்துண்டு வடிவம்

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1$$

$$\frac{x}{4}-\frac{y}{6}=1$$

$$6x-4y=24$$

$$3x-2y=12$$

$$\mathbf{3x-2y-12=0}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள x, y வெட்டுத் துண்டுகளைக் கொண்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. (ii) $-5, \frac{3}{4}$ (2M)

CQ: AB என்ற நேர்க்கோடு ஆய அச்சுகளை A & B புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. AB-ன் நடுப்புள்ளி $(2,3)$ எனில் AB-ன் சமன்பாட்டினைக் காண்க. **(SEP-20)** (5M)

13. கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டிலிருந்து ஆய அச்சுகளின் மேல் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க. (i) $3x-2y-6=0$ SEP-21 (2M)

(i) $3x-2y=6$ ஐ 6 ஆல் வகுக்க

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$$

x வெட்டுத்துண்டு $\Rightarrow \mathbf{2}$

y வெட்டுத்துண்டு $\Rightarrow \mathbf{-3}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

13. கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாட்டிலிருந்து ஆய அச்சுகளின் மேல் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க. (ii) $4x+3y+12=0$

எ.கா.5.26: $4x-9y+36=0$ என்ற நேர்க்கோடு ஆய அச்சுகளில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளைக் காண்க.

14. நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. (5M)

(i) $(1,-4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், வெட்டுத்துண்டுகளின் விகிதம் $2:5$

(ii) $(-8,4)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத்துண்டுகள் சமம்.

(i) x வெட்டுத்துண்டு $= 2k$,

y வெட்டுத்துண்டு $= 5k$

வெட்டுத்துண்டு வடிவம் $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

$(1,-4)$ என்ற புள்ளி வழியாக செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{1}{2k}+\left(\frac{-4}{5k}\right)=1 \Rightarrow \frac{5-8}{10k}=1$$

$$-3=10k \Rightarrow k=\frac{-3}{10}$$

$$a=2\left(\frac{-3}{10}\right)=-\frac{3}{5}\,;\, b=5\left(\frac{-3}{10}\right)=-\frac{3}{2}$$

தேவையான கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{-\frac{3}{5}}+\frac{y}{-\frac{3}{2}}=1$

$$-5x-2y=3$$

(ii) $a=b$ (ஆயஅச்சுகளின்வெட்டுத்துண்டுகள் சமம்.)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1 \Rightarrow -\frac{8}{a}+\frac{4}{a}=1$$

$$(-8+4)=a$$

$$a=-4$$

தேவையான கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow \frac{x}{-4}+\frac{y}{-4}=1$$

$$x+y=-4$$

$$\mathbf{x+y+4=0}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)

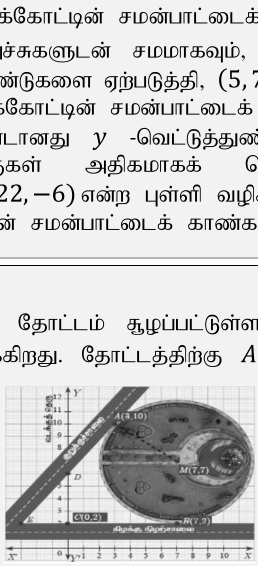
எ.கா.5.28: $(-3,8)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதும், ஆய அச்சுகளின் மிகை வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் 7 உடையதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

எ.கா.5.25: ஆய அச்சுகளுடன் சமமாகவும், எதிர் குறியும் உடைய வெட்டுத்துண்டுகளை ஏற்படுத்தி, $(5,7)$ என்ற புள்ளி வழி செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

CQ: x- வெட்டுத்துண்டானது y -வெட்டுத்துண்டின் அளவை விட 5 அலகுகள் அதிகமாகக் கொண்ட ஒரு நேர்க்கோடானது $(22,-6)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்கின்றது எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. **(MAY-22)**

பயிற்சிக்காக:

எ.கா.5.29: கிழக்கு நிழற்சாலை மற்றும் குறுக்குச் சாலைகளால் ஒரு வட்ட வடிவத் தோட்டம் சூழப்பட்டுள்ளது. குறுக்குச் சாலையானது வடக்கு தெருவை D-யிலும், கிழக்குச் சாலையை E-யிலும் சந்திக்கிறது. தோட்டத்திற்கு $A(3,10)$ என்ற புள்ளியில் AD ஆனது தொடுகோடாக அமைகிறது. படத்தைப் பயன்படுத்தி



(a) பின்வருவனவற்றின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(i) கிழக்கு நிழற்சாலை (ii) வடக்குத் தெரு (iii) குறுக்குச் சாலை

(b) குறுக்குச் சாலை கீழ்க்கண்டவற்றைச் சந்திக்கின்ற புள்ளியைக் காண்க.

(i) வடக்குத் தெரு (ii) கிழக்கு நிழற்சாலை **(2M)**

பயிற்சி 5.4

1. **பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வைக் காண்க. (i) $5y - 3 = 0$** (2M)

(i) சாய்வு $m = \frac{-x \text{ - யின் கெழு}}{y \text{ - யின் கெழு}} = \frac{0}{5} = 0$

$m = 0$

கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டின் சாய்வு **0.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(2M)
1. பின்வரும் நேர்க்கோடுகளின் சாய்வைக் காண்க. (ii) $7x - \left(\frac{3}{17}\right) = 0$

எ.கா.5.30: $6x + 8y + 7 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

2. **(i) $y = 0.7x - 11$ -க்கு இணையாக (ii) $x = -11$-க்கு செங்குத்தாக அமையும் நேர்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.** (2M)

(i) இரண்டு கோடுகள் இணை எனில் அவற்றின் சாய்வுகள் சமமாக இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சாய்வு, $\boldsymbol{m = 0.7}$

(ii) $x = -11 \Rightarrow x + 11 = 0$

கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சாய்வு $= -\frac{1}{0}$

= வரையறுக்கப்படவில்லை

இந்த கோட்டிற்கு செங்குத்தான கோட்டின்

சாய்வு $= -\frac{1}{\text{வரையறுக்கப்படவில்லை}} = \frac{1}{1/0} = \mathbf{0}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(2M)
எ.கா.5.31: (i) $3x - 7y = 11$ -க்கு இணையான
(ii) $2x - 3y + 8 = 0$ –க்கு செங்குத்தான நேர்க்கோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

3. **கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோடுகள் இணையானவையா அல்லது செங்குத்தானவையா எனச் சோதிக்கவும்.**
(i) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{1}{7} = 0$ மற்றும் $\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{1}{10} = 0$ (ii) $5x + 23y + 14 = 0$ மற்றும் $23x - 5y + 9 = 0$ (2M)

(i) சாய்வு $m = \frac{-x \text{ - யின் கெழு}}{y \text{ - யின் கெழு}}$

முதல் கோட்டின் சாய்வு $m_1 = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{4}{1} = -\frac{4}{3}$

இரண்டாவது கோட்டின் சாய்வு $m_2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{1} = -\frac{4}{3}$

சாய்வுகள் சமமாக இருப்பதால், எனவே கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் **இணையானவையாகும்.**

(ii) சாய்வு $m = \frac{-x \text{ - யின் கெழு}}{y \text{ - யின் கெழு}}$

முதல் கோட்டின் சாய்வு $m_1 = \frac{-5}{23}$

இரண்டாவது கோட்டின் சாய்வு $m_2 = \frac{-23}{-5}$

$= \frac{23}{5}$

$m_1 \times m_2 = -1$

$-\frac{5}{23} \times \frac{23}{5} = -1$

$-1 = -1$

எனவே கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் **செங்குத்தானவையாகும்.**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(2M)
4. $12y = -(p+3)x + 12, 12x - 7y = 16$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் 'p'-யின் மதிப்பைக் காண்க. **(APR-23)**

எ.கா.5.32: $2x + 3y - 8 = 0,\ 4x + 6y + 18 = 0$ ஆகிய நேரக்கோடுகள் இணை எனக் காட்டுக.

எ.கா.5.33: $x - 2y + 3 = 0, 6x + 3y + 8 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காட்டுக. **(PTA-5)**

CQ: $3x - 5y + 7 = 0$ மற்றும் $15x + 9y + 4 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து என நிறுவுக. **(PTA-3)**

5. **$Q(3,-2)$ மற்றும் $R(-5,4)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்கு இணையானதும், $P(-5,2)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.** (2M)

QR இன் சாய்வு $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{[4-(-2)]}{-5-3}$

$= \frac{4+2}{-8}$

$= \frac{6}{-8}$

QR இன் சாய்வு $= -\frac{3}{4}$

இணையான கோட்டின் சாய்வு $= -\frac{3}{4}$

$P(-5,2)$ என்ற புள்ளி வழி செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \left(-\frac{3}{4}\right)[x - (-5)]$$

$$4(y-2) = -3(x+5)$$

$$4y - 8 = -3x - 15$$

$$3x + 4y - 8 + 15 = 0$$

$$\therefore 3x + 4y + 7 = 0$$

தேவையான கோட்டின் சமன்பாடு $\mathbf{3x + 4y + 7 = 0}$

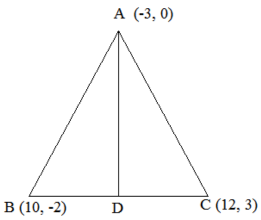
இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

6. $(6,7)$ மற்றும் $(2,-3)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும் $(6,-2)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

7. **ΔABC-யின் முனைகள் $A(-3,0), B(10,-2)$ மற்றும் $C(12,3)$ எனில், A மற்றும் B-யிலிருந்து முக்கோணத்தின் எதிர்பக்கத்திற்கு வரையப்படும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.** (5M)

A வழியாக செல்லும் குத்துக்கோடானது, BC ஐ Dல் சந்திக்கும்.

AD ஆனது BC க்கு செங்குத்தாகும்.



BC இன் சாய்வு $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{3-(-2)}{12-10} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$

$(x_1, y_1) \Rightarrow (10,-2)$
$(x_2, y_2) \Rightarrow (12,3)$

புள்ளி A வழியாக செல்லும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$A(-3,0)$ மற்றும் $m = \frac{5}{2}$

$$y - 0 = -\frac{1}{\frac{5}{2}}(x - (-3))$$

$$y = -\frac{2}{5}(x+3)$$

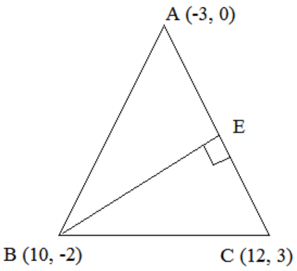
$$5y = -2x - 6$$

$$\mathbf{2x + 5y + 6 = 0}$$

AC இன் சாய்வு $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$= \frac{3-0}{12-(-3)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$(x_1, y_1) \Rightarrow (-3,0)$
$(x_2, y_2) \Rightarrow (12,3)$



புள்ளி B வழியாக செல்லும் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$\Rightarrow B(10,-2)$ மற்றும் $m = \frac{1}{5}$

$$y - (-2) = -\frac{1}{\frac{1}{5}}(x - 10)$$

$$y + 2 = -5(x - 10)$$

$$y + 2 = -5x + 50$$

$$5x + y + 2 - 50 = 0$$

$$\mathbf{5x + y - 48 = 0}$$

8. $A(-4,2)$ & $B(6,-4)$ என்ற புள்ளிகளை இணைக்கும் மையக் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

மையக் குத்துக்கோடு எனில் AB ன் நடுப்புள்ளியில் 90° கோணத்தில் செல்லும் கோடு ஆகும் JUN-23

$(x_1, y_1) \Rightarrow (-4,2)$
$(x_2, y_2) \Rightarrow (6,-4)$

மையப்புள்ளி $= \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$= \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{2-4}{2}\right)$

$= \left(\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (1,-1)$

AB இன் சாய்வு $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-4-2}{6+4} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

மையக் குத்துக்கோட்டின் சமன்பாடு (2M)

$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

$y + 1 = \frac{5}{3}(x-1)$

$3(y+1) = 5x - 5$

$3y + 3 = 5x - 5$

$5x - 3y - 5 - 3 = 0$

$\therefore \mathbf{5x - 3y - 8 = 0}$

10. $5x - 6y = 2,\ 3x + 2y = 10$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும் $4x - 7y + 13 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகவும் அமையும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (5M)

$5x - 6y = 2$………….(1)

$3x + 2y = 10$………..(2)

$(1) \Rightarrow 5x - 6y = 2$

$3 \times (2) \Rightarrow 9x + 6y = 30$

$14x = 32$

$x = \frac{32}{14} = \frac{16}{7}$ என (1) ல் பிரதியிட

$5\left(\frac{16}{7}\right) - 6y = 2 \Rightarrow \frac{80}{7} - 6y = 2 \Rightarrow \frac{80}{7} - 6y = 2 \Rightarrow 6y = \frac{80}{7} - 2 \Rightarrow \quad y = \frac{66}{6\times7} = \frac{11}{7}$

$5x - 6y = 2,\ 3x + 2y = 10$ ஆகிய நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி $\left(\frac{16}{7}, \frac{11}{7}\right)$

$4x - 7y + 13 = 0$ என்ற கோட்டிற்கு செங்குத்தாக அமையும் கோட்டின் சமன்பாடு:

சாய்வு $= -\frac{a}{b} = -\left(\frac{4}{-7}\right) = \frac{4}{7}$

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

$y - \frac{11}{7} = -\frac{7}{4}\left(x - \frac{16}{7}\right)$

$\frac{7y-11}{7} = -\frac{7}{4}\left(\frac{7x-16}{7}\right)$

$4(7y - 11) = -7(7x - 16)$

$28y - 44 = -49x + 112$

$49x + 28y - 44 - 112 = 0$

தேவையான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\mathbf{49x + 28y - 156 = 0}$ ஆகும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

9. $7x + 3y = 10,\ 5x - 4y = 1$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், $13x + 5y + 12 = 0$ என்ற நேர்கோட்டிற்கு இணையாகவும் அமையும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (5M)

அலகுப்பயிற்சி: 10. $2x - 3y + 4 = 0$ மற்றும் $3x + 4y - 5 = 0$ என்ற நேர்க்கோடுகளால் குறிக்கப்படும் இரண்டு பாதைகள் சந்திக்கும் புள்ளியில் நிற்கும் ஒருவர் $6x - 7y + 8 = 0$ என்ற நேர்கோட்டால் குறிக்கப்படும் பாதையைக் குறுகிய நேரத்தில் சென்றடைய விரும்புகிறார் எனில், அவர் செல்ல வேண்டிய பாதையின் சமன்பாட்டினைக் காண்க. (5M)

எ.கா.5.34: $3x - 7y = 12$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாகவும் $(6,4)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. **(JUN-23)** (2M)

எ.கா.5.35: $y = \frac{4}{3}x - 7$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்குச் செங்குத்தானதும், $(7,-1)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (2M)

எ.கா.5.36: $4x + 5y = 13,\ x - 8y + 9 = 0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், Y-அச்சுக்கு இணையாகவும் உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (5M)

எ.கா.5.37: $A(0,5)$ மற்றும் $B(4,1)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடானது $C(4,4)$-ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் தொடுகோடு எனில், (i) AB என்ற கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (ii) C வழியாகவும் AB என்ற கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (iii) AB என்ற கோடானது வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியைக் காண்க. (5M)

CQ: $7x - 3y = -12, 2y = x + 3$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழி செல்வதும் X- அச்சுக்கு இணையானதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. **(APR-23)** (5M)

11. $7x-3y=-12$ மற்றும் $2y=x+3$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும், $3x+y+2=0$ மற்றும் $x-2y-4=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

PTA-3

5M

$3x+y+2=0$ ………… (1)

$x-2y-4=0$ ………… (2)

$2\times(1) \Rightarrow 6x+2y+4=0$

$(2) \Rightarrow x-2y-4=0$

$7x = 0 \Rightarrow x=0$

$x=0$ என (1) ல் பிரதியிட

$3(0)+y+2=0$

$y=-2$

(1) மற்றும் (2) ஆகியவை சந்திக்கும் புள்ளி $(0,-2)$

$7x-3y=-12$ ………… (3)

$2y=x+3$

$x-2y=-3$ ………… (4)

$2\times(3) \Rightarrow 14x-6y=-24$

$-3\times(4) \Rightarrow 3x-6y=-9$

$(-) \quad (+) \quad (+)$

$11x = -15 \Rightarrow x=-\frac{15}{11}$

$x=-\frac{15}{11}$ என (4) ல் பிரதியிட,

$-\frac{15}{11}-2y=-3$

$-2y=-3+\frac{15}{11}$ $\quad -2y=\frac{-33+15}{11}$

$-2y=-\frac{18}{11} \Rightarrow y=\frac{9}{11}$

(3), (4) ஆகியவை சந்திக்கும் புள்ளி $\left(\frac{-15}{11},\frac{9}{11}\right)$

$(0,-2),\left(\frac{-15}{11},\frac{9}{11}\right)$ ஆகிய புள்ளிகள் வழியாக செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டை காண வேண்டும்.

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$\frac{y+2}{\frac{9}{11}+2}=\frac{x-0}{-\frac{15}{11}-0}$

$\frac{y+2}{\frac{31}{11}}=\frac{x-0}{-\frac{15}{11}}$

$-15(y+2)=31(x-0)$

$-15y-30=31x$

$31x+15y+30=0$

தேவையான கோட்டின் சமன்பாடு **$31x+15y+30=0$** ஆகும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

12. $8x+3y=18, 4x+5y=9$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் வழியாகவும், $(5,-4)$ மற்றும் $(-7,6)$ ஆகிய புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்க்கோட்டுத் துண்டின் நடுப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

அலகுப்பயிற்சி:

9. $4x+7y-3=0$ மற்றும் $2x-3y+1=0$ ஆகிய நேர்க்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழியாகவும், ஆய அச்சுகளின் வெட்டுத் துண்டுகள் சமமானதுமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

அலகுப் பயிற்சி - 5

அலகுப்பயிற்சிக்கான குறிப்பு

வினா எண்: 1 - பயிற்சி 5.2 ல் - 10 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 4 - பயிற்சி 5.1 ல் - 6 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 5 - பயிற்சி 5.2 ல் - 10 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 7 - பயிற்சி 5.3 ல் - 8 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 9 - பயிற்சி 5.4 ல் - 11 ஆம் வினா போன்றது.	வினா எண்: 10 - பயிற்சி 5.4 ல் -10 ஆம் வினா போன்றது.

2. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு 5 ச.அலகுகள் $(2,1)$ மற்றும் $(3,-2)$ என்பன முக்கோணத்தின் இரண்டு முனைப் புள்ளிகள் ஆகும். மூன்றாம் முனைப் புள்ளி (x,y) என்பதில் $y=x+3$ என இருந்தால் அப்புள்ளியைக் காண்க.

PTA-1

5M

ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு 5 ச.அலகுகள்

புள்ளிகள்: $(2,1),(3,-2)$ மற்றும் $C(x,y)$

இங்கு $y=x+3$

முக்கோணத்தின் பரப்பு $=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 3 & x & 2\\ 1 & -2 & y & 1\end{bmatrix}=5$

$(-4+3y+x)-(3-2x+2y)=10$

$x+3y-4-3+2x-2y=10$

$3x+y=17$ …… (1)

$y=x+3$ ஐ (1)-ல் பிரதியிட

$3x+x+3=17$

$4x+3=17 \Rightarrow 4x=17-3$

$4x=14 \Rightarrow x=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$

$x=\frac{7}{2}$ என $y=x+3$-ல் பிரதியிட

$y=\frac{7}{2}+3=\frac{13}{2}$

∴ மூன்றாவது முனைப்புள்ளி $\left(\frac{7}{2},\frac{13}{2}\right)$

3. $3x+y-2=0, 5x+2y-3=0$ மற்றும் $2x-y-3=0$ ஆகிய கோடுகளால் அமைக்கப்படும் முக்கோணத்தின் பரப்பு காண்க. (5M)

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள்

$3x+y-2=0$ .... (1) $5x+2y-3=0$ .... (2) $2x-y-3=0$ .... (3)

(1) & (2)-ஐத் தீர்க்க

$(1)\times 2 \Rightarrow 6x+2y=4$

$(2) \Rightarrow 5x+2y=3$

$x \quad = 1$

$x=1$ என (1)-ல் பிரதியிட, $3(1)+y-2=0$

$y=-1 \Rightarrow A(1,-1)$

(1) & (3)-ஐத் தீர்க்க $3x+y=2$

$2x-y=3$

$5x \quad =5$

$\therefore x=1$

$x=1$ என (1)-ல் பிரதியிட, $3(1)+y-2=0$

$y=-1 \Rightarrow \therefore B(1,-1)$

(2) & (3)-ஐத் தீர்க்க

$(2) \Rightarrow 5x+2y=3$

$(3)\times 2 \Rightarrow 4x-2y=6$

$9x \quad =9$

$x=1$

$x=1$ என (3)-ல் பிரதியிட

$2-y-3=0$

$-y=1$

$\therefore y=-1$

$C\ (1,-1)$

$A(1,-1), B(1,-1), C(1,-1)$

எல்லா புள்ளிகளும் ஒரே புள்ளிகள்.

முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \mathbf{0}$ **ச.அ**

6. இரு வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் மற்றும் அவற்றின் பெருக்கற்பலன் முறையே 1, -6 எனில், நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காண்க. (2M)

x வெட்டுத்துண்டு $=a$, y வெட்டுத்துண்டு $=b$

வெட்டுத்துண்டுகளின் கூடுதல் $=1$

$\Rightarrow a+b=1$

$\therefore b=1-a$

வெட்டுத்துண்டுகளின் பெருக்கற்பலன் $=-6$

$ab=-6$

$a(1-a)=-6$

$a-a^2=-6$

$a^2-a-6=0$

$(a-3)(a+2)=0$

$\therefore a=3,-2$

$a=3, b=-2$ எனில்,

$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$

$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1$

$\mathbf{2x-3y-6=0}$

$a=-2, b=3$ எனில்,

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$

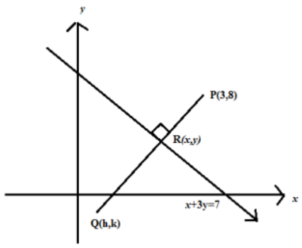
$\frac{-3x+2y}{6}=1$

$-3x+2y=6$

$\mathbf{3x-2y+6=0}$

8. $x+3y=7$ என்ற நேர்க்கோட்டினைச் சமதள ஆடியாகக் கொண்டு $(3,8)$ என்ற புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளியைக் காண்க. (2M)

$x+3y=7$ என்ற நேர் கோட்டினைச் சமதள ஆடியாகக் கொண்டு $(3,8)$ என்ற புள்ளியின் பிம்பப் புள்ளி $Q(h,k)$ என்க.



$\therefore x+3y=7$-ன் மையக்குத்துக்கோடு PQ மற்றும் நடுப்புள்ளி R என்க. $(x,y)=\left(\frac{h+3}{2},\frac{k+8}{2}\right)$

$\therefore x=\frac{h+3}{2}, y=\frac{k+8}{2}$

$x+3y=7$ ல் உள்ள ஒரு புள்ளி $R(x,y)$

$\left(\frac{h+3}{2}\right)+3\left(\frac{k+8}{2}\right)=7$

$h+3+3k+24=14 \Rightarrow h+3k=-13$ ..... (2)

PQ-ன் சாய்வு $\times (x+3y=7)$-ன் சாய்வு $=-1$

$\frac{k-8}{h-3}\times\frac{-1}{3}=-1$

$\frac{k-8}{h-3}=3$

$k-8=3h-9$

$3h-k=1$ .... (3)

(2) & (3)-ஐத் தீர்க்க

$(2) \Rightarrow h+3k=-13$

$(3)\times 3 \Rightarrow 9h-3k=3$

$10h \quad =-10 \Rightarrow h=-1$

$h=-1$ என (2)-ல் பிரதியிட

$-1+3k=-13$

$3k=-12 \Rightarrow k=-4$

$\therefore \boldsymbol{Q\ (-1,-4)}$

6. முக்கோணவியல்

பயிற்சி 6.1

1. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும். (2M)

(i) $\cot\theta + \tan\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

$$\cot\theta + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos\theta.\sin\theta} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\sin\theta}$$
$$= \sec\theta\,.\operatorname{cosec}\theta$$
$$\therefore \cot\theta + \tan\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$$

(ii) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

$$\tan^4\theta + \tan^2\theta = (\tan^2\theta)^2 + \tan^2\theta$$
$$= \tan^2\theta\,(\tan^2\theta + 1)$$
$$= (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta$$
$$= \sec^4\theta - \sec^2\theta$$
$$\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.6.1: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.(JUN-23) (2M)

எ.கா.6.12: $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A\cos^2 B}$ என்பதை நிரூபிக்கவும். (5M)

2. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும். (2M)

(i) $\frac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta - 1} = \tan^2\theta$

$$\frac{1-\tan^2\theta}{\cot^2\theta-1} = \frac{1-\tan^2\theta}{\frac{1}{\tan^2\theta}-1} \quad \left[\because \cot^2\theta = \frac{1}{\tan^2\theta}\right]$$
$$= \frac{1-\tan^2\theta}{\frac{1-\tan^2\theta}{\tan^2\theta}}$$
$$= 1-\tan^2\theta \times \frac{\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$= \tan^2\theta$$

(ii) $\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

> பகுதி மற்றும் தொகுதியை 1+sin θ என்ற இணையால் பெருக்கவும்.

$$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$$
$$= \frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} \quad [\because 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta]$$
$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta - \tan\theta$$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப்பயிற்சி:

1. நிரூபிக்கவும் (ii) $\frac{\tan^2\theta - 1}{\tan^2\theta + 1} = 1 - 2\cos^2\theta$ (2M)

எ.கா.6.3: $1 + \frac{\cot^2\theta}{1+cosec\,\theta} = cosec\,\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

எ.கா.6.15: $\left[\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}\right] = \left[\frac{1-\tan A}{1-\cot A}\right]^2$ எனக் காட்டுக. (5M)

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.6.2: $\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$ என்பதை நிரூபிக்கவும். (2M)

எ.கா.6.4: $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

3. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும். **(i)** $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$ (2M) SEP-20

$$\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \times \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$
$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + \tan\theta$$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

3. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும். (5M)

(ii) $\sqrt{\frac{1+sin\theta}{1-sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-sin\theta}{1+sin\theta}} = 2sec\theta$.(JUN-23)

எ.கா.6.5: $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = cosec\,\theta + \cot\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும். (2M)

5. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும். (5M)

(i) $\sec^4\theta\,(1-\sin^4\theta)-2\tan^2\theta=1$

$\sec^4\theta\,(1-\sin^4\theta)-2\tan^2\theta$

$=\sec^4\theta-\sin^4\theta.\sec^4\theta-2\tan^2\theta$

$=\sec^4\theta-\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}-2\tan^2\theta$ $\left(\because \sec^4\theta=\frac{1}{\cos^4\theta}\right)$

$=\sec^4\theta-\tan^4\theta-2\tan^2\theta$

$=[(\sec^2\theta)^2-(\tan^2\theta)^2]-2\tan^2\theta$

$=(\sec^2\theta+\tan^2\theta)(\sec^2\theta-\tan^2\theta)-2\tan^2\theta$ $(\because a^2-b^2=(a+b)(a-b))$

$=(\sec^2\theta+\tan^2\theta)\times 1-2\tan^2\theta$ $(\because \sec^2\theta-\tan^2\theta=1)$

$=\sec^2\theta+\tan^2\theta-2\tan^2\theta$

$=\sec^2\theta-\tan^2\theta$

$=\mathbf{1}$

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.**
>
> 4. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும். (5M)
> (i) $\sec^6\theta=\tan^6\theta+3\tan^2\theta.\sec^2\theta+1$
> (ii) $(sin\theta+sec\theta)^2+(cos\theta+cosec\theta)^2=1+(sec\theta+cosec\theta)^2$
>
> **எ.கா.6.7:** $\sin^2A\cos^2B+\cos^2A\sin^2B+\cos^2A\cos^2B+\sin^2A\sin^2B=1$ என்பதை நிரூபிக்கவும். (2M)
>
> **எ.கா.6.9:** $(cosec\,\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=1$ என்பதை நிரூபிக்கவும். (2M)

(ii) $\frac{\cot\theta-\cos\theta}{\cot\theta+\cos\theta}=\frac{cosec\,\theta-1}{cosec\,\theta+1}$

$\frac{\cot\theta-\cos\theta}{\cot\theta+\cos\theta}=\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\cos\theta}$

$=\frac{\frac{\cos\theta-\sin\theta.\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta+\sin\theta.\cos\theta}{\sin\theta}}$

$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$

$=\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$=\frac{1-\frac{1}{cosec\,\theta}}{1+\frac{1}{cosec\,\theta}}$

$=\frac{\frac{cosec\,\theta-1}{cosec\,\theta}}{\frac{cosec\,\theta+1}{cosec\,\theta}}$

$=\frac{\mathbf{cosec\,\theta-1}}{\mathbf{cosec\,\theta+1}}$

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.**
>
> **எ.கா.6.6:** $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\cot\theta$ என்பதை நிரூபிக்கவும். **(APR-23)** (2M)

6. பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும். (2M)

(i) $\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\frac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=0$

$\frac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\frac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin^2A-\sin^2B+\cos^2A-\cos^2B}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$(\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)=\frac{(\sin^2A+\cos^2A)-(\sin^2B+\cos^2B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$=\frac{1-1}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$

$=\mathbf{0}$

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.**
>
> பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்கவும்.
>
> **எ.கா.6.10:** $\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{\sin A}{1-\cos A}=2cosec\,A$ (2M)
>
> **எ.கா.6.14:** $\frac{\sin A}{\sec A+\tan A-1}+\frac{\cos A}{cosec\,A+\cot A-1}=1$ (5M)

(ii) $\frac{\sin^3A+\cos^3A}{\sin A+\cos A}+\frac{\sin^3A-\cos^3A}{\sin A-\cos A}=2$

$\frac{\sin^3A+\cos^3A}{\sin A+\cos A}+\frac{\sin^3A-\cos^3A}{\sin A-\cos A}$

$=\frac{(\sin A+\cos A)(\sin^2A+\cos^2A-\sin A.\cos A)}{\sin A+\cos A}+\frac{(\sin A-\cos A)(\sin^2A+\cos^2A+\sin A.\cos A)}{\sin A-\cos A}$

$=1-\sin A.\cos A+1+\sin A.\cos A$

$=1+1$

$=\mathbf{2}$

> **இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.** (5M)
>
> **எ.கா.6.16:** $\frac{(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)}{\sec^3A-cosec^3A}=\sin^2A\cos^2A$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.
>
> **எ.கா.6.13:** $\left(\frac{\cos^3A-\sin^3A}{\cos A-\sin A}\right)-\left(\frac{\cos^3A+\sin^3A}{\cos A+\sin A}\right)=2\sin A\cos A$ என்பதை நிரூபிக்கவும். **(PTA-6)**

$\because a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$

7. (i) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{3}$ எனில், $\tan\theta+\cot\theta=1$ என்பதை நிரூபிக்கவும். (5M)

கொடுக்கப்பட்டது: $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{3}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $(\sin\theta+\cos\theta)^2=3$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta.\cos\theta=3$

$1+2\sin\theta.\cos\theta=3$

$2\sin\theta.\cos\theta=3-1=2$

$\sin\theta.\cos\theta=1$ .... (1)

$\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}=\frac{1}{1}$ [(1) லிருந்து]

$\mathbf{\tan\theta+\cot\theta=1}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.6.8: (2M)
$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ எனில், $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ என நிரூபிக்க.

(ii) $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=0$ எனில், $\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ என நிறுவுக. (PTA-3) (5M)

கொடுக்கப்பட்டது: $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=0$

$\sqrt{3}\sin\theta=\cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\theta=30^0$

$\left(\because\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

LHS: $\tan 3\theta=\tan 3(30^\circ)=\tan 90^\circ=\infty$ ..... (1)

RHS: $\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{3\times\tan 30^\circ-\tan^3 30^\circ}{1-3\tan^2 30^\circ}$

$=\frac{3\times\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1-3\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{1-3\times\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}{0}=\infty$ ...(2)

$(1)=(2)\ \therefore\ \mathbf{\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}}$

8. (i) $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=m$ மற்றும் $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}=n$, எனக் கொண்டு $(m^2+n^2)\cos^2\beta=n^2$ என்பதை நிரூபிக்கவும். (5M)

(ii) $\cot\theta+\tan\theta=x$ மற்றும் $\sec\theta-\cos\theta=y$ எனில், $(x^2y)^{\frac{2}{3}}-(xy^2)^{\frac{2}{3}}=1$ என்பதை நிரூபிக்கவும்.

(i) கொடுக்கப்பட்டது: $m=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, $n=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$

$\mathbf{(m^2+n^2)\cos^2\beta}=\left[\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)^2+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^2\right]\cos^2\beta$

$=\left(\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}\right)(\cos^2\beta)=\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\beta.\sin^2\beta}\times\cos^2\beta$

$=\frac{\cos^2\alpha\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta\right)}{\sin^2\beta}=\frac{\cos^2\alpha(1)}{\sin^2\beta}$ $[\because\sin^2\beta+\cos^2\beta=1]$

$=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^2=\mathbf{n^2}$ [கொடுக்கப்பட்டது: $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}=n$]

(ii) கொடுக்கப்பட்டது: $\cot\theta+\tan\theta=x$, $\sec\theta-\cos\theta=y$

$(x^2y)^{\frac{2}{3}}=[(\cot\theta+\tan\theta)^2(\sec\theta-\cos\theta)]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2(\sec\theta-\cos\theta)\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\left[\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}\right]^2(\sec\theta-\cos\theta)\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\left(\frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}\right)^2\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\frac{1}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}\times\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\frac{1}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\frac{1}{\cos^3\theta}\right]^{\frac{2}{3}}$

$(x^2y)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\cos^2\theta}$........................ (1)

$(xy^2)^{\frac{2}{3}}=[(\cot\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\cos\theta)^2]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[(\cot\theta+\tan\theta)\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\left[\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right]\left[\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right]^2\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\left(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\frac{1}{\sin\theta.\cos\theta}\times\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}\right]^{\frac{2}{3}}$

$=\left[\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}\right]^{\frac{2}{3}}$

$(xy^2)^{\frac{2}{3}}=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ .... (2)

$(1)-(2)\Longrightarrow\mathbf{(x^2y)^{\frac{2}{3}}-(xy^2)^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\mathbf{1}$

9. (i) $\boldsymbol{sin\theta + \cos\theta = p}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{sec\theta + cosec\theta = q}$ **எனில்,** $\boldsymbol{q(p^2-1) = 2p}$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.** 5M

(ii) $\boldsymbol{sin\theta(1+\sin^2\theta) = \cos^2\theta}$ **எனில்,** $\boldsymbol{cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8cos^2\theta = 4}$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.**

(i) கொடுக்கப்பட்டது: $p = \sin\theta + \cos\theta,\ q = \sec\theta + \text{cosec}\,\theta$

LHS: $q(p^2-1) = (\sec\theta + \text{cosec}\,\theta)((\sin\theta+\cos\theta)^2 - 1)$

$= (\sec\theta + \text{cosec}\,\theta)((\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\sin\theta.\cos\theta - 1)$

$= (\sec\theta + \text{cosec}\,\theta)(1 + 2\sin\theta.\cos\theta - 1)$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)(2\sin\theta.\cos\theta)$

$= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta.\cos\theta} \times 2\sin\theta.\cos\theta$

$= 2(\sin\theta + \cos\theta) = 2p \quad (\text{since } p = \sin\theta + \cos\theta)$

$\therefore \boldsymbol{q(p^2-1) = 2p}$. Hence proved

(ii) கொடுக்கப்பட்டது: $\sin\theta(1+\sin^2\theta) = \cos^2\theta$

$\sin\theta(1 + 1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த, $\sin^2\theta(2-\cos^2\theta)^2 = \cos^4\theta$

$(1-\cos^2\theta)(4+\cos^4\theta - 4\cos^2\theta) = \cos^4\theta \quad (\because (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab)$

$4 + \cos^4\theta - 4\cos^2\theta - 4\cos^2\theta - \cos^6\theta + 4\cos^4\theta = \cos^4\theta$

$4 - 4\cos^2\theta - 4\cos^2\theta - \cos^6\theta + 4\cos^4\theta = \cos^4\theta - \cos^4\theta$

$4 - 8\cos^2\theta - \cos^6\theta + 4\cos^4\theta = 0$

$4 = \cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta$

$$\boldsymbol{\cos^6\theta - 4\cos^4\theta + 8\cos^2\theta = 4}$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

எ.கா.6.17: $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = p$ மற்றும் $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = q$ எனில், $p^2q^2(p^2+q^2+3) = 1$ என நிரூபிக்க.

அலகுப்பயிற்சி:

3. $x\sin^3\theta + y\cos^3\theta = \sin\theta\cos\theta$ மற்றும் $x\sin\theta = y\cos\theta$ எனில் $x^2+y^2 = 1$ என நிரூபிக்கவும்.
4. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ எனில் $(a\sin\theta + b\cos\theta) = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ என நிரூபிக்கவும்.

10. $\boldsymbol{\frac{\cos\theta}{1+sin\theta} = \frac{1}{a}}$ **எனில்,** $\boldsymbol{\frac{a^2-1}{a^2+1} = \sin\theta}$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.** 5M

LHS: $\frac{a^2-1}{a^2+1} = \frac{1-\frac{1}{a^2}}{1+\frac{1}{a^2}}$

(பகுதி மற்றும் தொகுதியை a^2-ஆல் வகுக்க)

$= \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^2}$

$= \frac{1-\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}{1+\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}}{1+\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}}$

$= \frac{\frac{(1+\sin\theta)^2 - \cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}}{\frac{(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}}$

$= \frac{1+\sin^2\theta + 2\sin\theta - \cos^2\theta}{1+\sin^2\theta+2\sin\theta+\cos^2\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta}{1+1+2\sin\theta}$

$= \frac{2\sin^2\theta + 2\sin\theta}{2+2\sin\theta}$

$= \frac{2\sin\theta(\sin\theta+1)}{2(1+\sin\theta)}$

$\therefore \boldsymbol{\frac{a^2-1}{a^2+1} = \sin\theta}$ RHS

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.6.11: $cosec\,\theta + \cot\theta = P$ எனில், $\cos\theta = \frac{P^2-1}{P^2+1}$ என்பதை நிரூபிக்கவும். 5M

தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்

பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்கவும்.

1. $\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$ PTA-4 2M

$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A}$

$= \frac{\frac{\cos A - \cos A \sin A}{\sin A}}{\frac{\cos A + \cos A \sin A}{\sin A}}$

$= \frac{\cos A(1 - \sin A)}{\cos A(1 + \sin A)}$

$= \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec} A}}{1 + \frac{1}{\operatorname{cosec} A}} = \frac{\frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A}}{\frac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A}}$

$= \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$

2. $\sqrt{\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$ PTA-5 2M

$\sqrt{\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}} = \sqrt{\frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta} \times \frac{\sec\theta - \tan\theta}{\sec\theta - \tan\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(\sec\theta - \tan\theta)^2}{1}}$

$= \sec\theta - \tan\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

பயிற்சி 6.2

1. $10\sqrt{3}$ மீ உயரமுள்ள கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 30 மீ தொலைவில் தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணத்தைக் காண்க. 2M

செங்கோண முக்கோணம் ΔABC ல்

$AB =$ கோபுரம் $= 10\sqrt{3}$ மீ , $BC = 30$ மீ

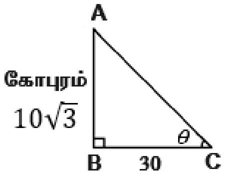
கோபுரத்தின் ஏற்றக் கோணம் θ ஐ காண வேண்டும்.

$tan\theta = \frac{AB}{BC}$ PTA-2, SEP-21, JUL-22

$= \frac{10\sqrt{3}}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

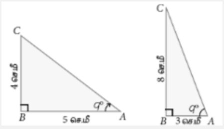


$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 2M

எ.கா.6.18: பின்வரும் முக்கோணங்களில் $\angle BAC$ –ஐ காண்க. **(MDL)**
$(\tan 38.7° = 0.8011,$
$\tan 69.4° = 2.6604)$



எ.கா.6.19: ஒரு கோபுரம் தரைக்குச் செங்குத்தாக உள்ளது. கோபுரத்தின் அடிப்பகுதியிலிருந்து தரையில் 48 மீ, தொலைவில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 30° எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. **(PTA-1)**

எ.கா.6.20: தரையிலிருந்து ஒரு பட்டம் 75 மீ உயரத்தில் பறக்கிறது. ஒரு நூல் கொண்டு தற்காலிகமாகத் தரையின் ஒரு புள்ளியில் பட்டம் கட்டப்பட்டுள்ளது. நூல் தரையுடன் ஏற்படுத்தும் சாய்வு கோணம் 60° எனில், நூலின் நீளம் காண்க. (நூலை ஒரு நேர்க்கோடாக எடுத்துக்கொள்ளவும்.

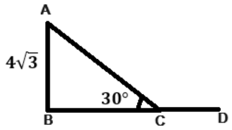
2. ஒரு சாலையின் இருபுறமும் இடைவெளியே இல்லாமல் வரிசையாக வீடுகள் தொடர்ச்சியாக உள்ளன. அவற்றின் உயரம் $4\sqrt{3}$ மீ. பாதசாரி ஒருவர் சாலையின் மையப் பகுதியில் நின்றுகொண்டு வரிசையாக உள்ள வீடுகளை நோக்குகிறார். 30° ஏற்றக்கோணத்தில் பாதசாரி வீட்டின் உச்சியை நோக்குகிறார் எனில், சாலையின் அகலத்தைக் காண்க. 2M

$AB =$ வீட்டின் உயரம் $= 4\sqrt{3}$ மீ

$C =$ சாலையின் மையப்பகுதி

$BD =$ சாலையின் அகலம்

$\therefore BC = CD$



ஏற்றக்கோணம் $\theta = 30^\circ$

சாலையின் அகலத்தைக் காண வேண்டும்.

ΔABC ல், $\tan\theta = \frac{\text{எ.ப}}{\text{அ.ப}}$

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = BC \Rightarrow 4 \times 3 = BC = 12$ மீ

$\therefore$ சாலையின் அகலம் $BD = BC + CD$

$= 12 + 12$

$\boldsymbol{BD = 24}$ மீ

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 5M

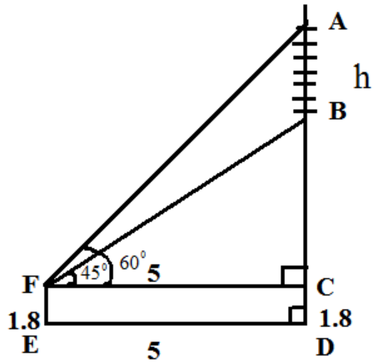
எ.கா.6.25: படத்தில் உள்ளவாறு ஒரு சமதளத் தரையில் இரண்டு மரங்கள் உள்ளன. தரையில் உள்ள X என்ற புள்ளியிலிருந்து இரு மர உச்சிகளின் ஏற்றக்கோணமும் 40° ஆகும். புள்ளி X-லிருந்து சிறிய மரத்திற்கான கிடைமட்டக் தொலைவு 8 மீ மற்றும் இரண்டு மரங்களின் உச்சிகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவு 20 மீ எனில்,

(i) புள்ளி X-க்கும் சிறிய மரத்தின் உச்சிக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு

(ii) இரண்டு மரங்களுக்கும் இடையேயுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவு $(\cos 40° = 0.7660)$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

3. ஒருவர் அவருடைய வீட்டிற்கு வெளியில் நின்றுகொண்டு ஒரு ஜன்னலின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றை முறையே 60° மற்றும் 45° ஆகிய ஏற்றக்கோணங்களில் காண்கிறார். அவரின் உயரம் 180 செ.மீ. மேலும் வீட்டிலிருந்து 5 மீ தொலைவில் அவர் உள்ளார் எனில், ஜன்னலின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$.

5M JUL-22



$AB =$ ஜன்னல் $= h$

$EF =$ நபர் $= 180$ செ.மீ $= 1.8$ மீ $= CD$

$CF = 5$ மீ

ஜன்னலின் உயரத்தைக் காண வேண்டும்.

செங்கோண ΔBCFல்

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{5}$$

$$1 = \frac{BC}{5}$$

$\therefore BC = 5$மீ

செங்கோண ΔACF ல்

$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{5} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{5} \Rightarrow AC = 5\sqrt{3}$$

$$BC + AB = 5\sqrt{3} \Rightarrow 5 + h = 5\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 5\sqrt{3} - 5 = (5 \times 1.732) - 5$$

$$= 8.660 - 5 = 3.66 \text{ மீ}$$

ஜன்னலின் உயரம் $\boldsymbol{h = 3.66}$ **மீ**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

4. 1.6 மீ உயரமுள்ள சிலை ஒன்று பீடத்தின் மேல் அமைந்துள்ளது. தரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து 60° ஏற்றக்கோணத்தில் சிலையின் உச்சி அமைந்துள்ளது. மேலும் அதே புள்ளியிலிருந்து பீடத்தின் உச்சியானது 40° ஏற்றக்கோணத்தில் உள்ளது எனில், பீடத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\tan 40^0 = 0.8391, \sqrt{3} = 1.732)$

5. 'r' மீ ஆரம் கொண்ட அரைக் கோளக் குவிமாடத்தின் மீது 'h' மீ உயரமுள்ள ஒரு கொடிக்கம்பம் நிற்கிறது. குவிமாடத்தின் அடியிலிருந்து 7 மீ தொலைவில் ஒருவர் நிற்கிறார். அவர் கொடிக்கம்பத்தின் உச்சியை 45° ஏற்றக் கோணத்திலும் நிற்குமிடத்திலிருந்து மேலும் 5 மீ தொலைவு விலகிச் சென்று கொடிக்கம்பத்தின் அடியை 30° ஏற்றக் கோணத்திலும் பார்க்கிறார் எனில், (i) கொடிக்கம்பத்தின் உயரம் (ii) அரைக் கோளக் குவிமாடத்தின் ஆரம் ஆகியவற்றைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

அலகுப்பயிற்சி:

5. 80 மீ உயரமுள்ள மரத்தின் உச்சியில் ஒரு பறவை இருக்கிறது. தரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பறவையின் ஏற்றக்கோணம் 45°. பறவை ஒரே உயரத்தில் கிடைமட்டத்தில் பறந்து செல்கிறது. 2 வினாடிகள் கழித்து அதே புள்ளியிலிருந்து பறவையின் ஏற்றக்கோணம் 30° எனில், பறவை பறக்கும் வேகத்தினைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

6. விமானம் ஒன்று புவிப் பரப்பிற்கு இணையாக 600 மீ உயரத்தில் 175 மீ/வி வேகத்தில் செல்கிறது. புவியின் மீது ஒரு புள்ளியிலிருந்து விமானத்திற்கு உள்ள ஏற்றக்கோணம் 37° ஆகும். அதே புள்ளியிலிருந்து ஏற்றக்கோணம் 53° -க்கு அதிகரிக்க எவ்வளவு நேரம் தேவைப்படும்? $(\tan 53^\circ = 1.3270, \tan 37^\circ = 0.7536)$

எ.கா.6.21: இரு கப்பல்கள் கலங்கரை விளக்கத்தின் இரு பக்கங்களிலும் கடலில் பயணம் செய்கின்றன. இரு கப்பல்களிலிருந்து கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 30° மற்றும் 45° ஆகும். கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் 200 மீ எனில், இரு கப்பல்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$
(JUN-23,PTA-5, SEP-21)

எ.கா.6.22: தரையின்மீது ஒரு புள்ளியிலிருந்து 30 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் மேலுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் அடி மற்றும் உச்சியின் ஏற்றக்கோணங்கள் முறையே 45° மற்றும் 60° எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$
(MAY-22)

எ.கா .6.23: ஒரு கால்வாயின் கரையில் ஒரு தொலைக்காட்சிக் கோபுரம் செங்குத்தாக உள்ளது. கால்வாயின் மறு கரையில் உள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து காணும்பொழுது கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 58° ஆக உள்ளது. அப்புள்ளியிலிருந்து விலகி ஒரே நேர்க்கோட்டில் 20 மீ தொலைவில் சென்றவுடன் கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 30° எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தையும், கால்வாயின் அகலத்தையும் காண்க. $(\tan 58^\circ = 1.6003)$

6. **15 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரம் உள்ளது. ஒரு மின் கம்பத்தின் அடி மற்றும் உச்சியிலிருந்து கோபுரத்தின் உச்சியை முறையே 60°, 30° என்ற ஏற்றக்கோணங்களில் பார்த்தால் மின் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க.**

5M

$AC =$ கோபுரம் $= 15$ மீ

$DE =$ மின் கம்பம் $= h$

$\therefore BC = h \therefore AB = 15 - h$

$CD = BE = x$ என்க

செங்கோண ΔACD ல், $\theta = 60^\circ$

$\tan 60^\circ = \frac{AC}{CD} = \sqrt{3}$

$\frac{15}{x} = \sqrt{3}$

$x = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3}$

$x = 5\sqrt{3}$ மீ.

செங்கோண ΔABE ல்,

$\theta = 30^\circ$

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

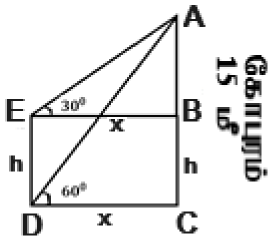
$\frac{15-h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $(\because x = 5\sqrt{3})$

$\frac{15-h}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$15 - h = 5$

$h = 15 - 5 = 10$ மீ

மின் கம்பத்தின் உயரம் $= \mathbf{10}$ **மீ**



தயாரிக்கப்பட்ட வினா

1. **ஒரு சிறுமியின் உயரம் 1.2மீ ஆகும். 88.2 மீ உயரத்தில் கிடைமட்டமாக காற்றில் நகரும் பலூனை அவள் தரையில் நின்றவாறு பார்க்கிறாள். ஒரு புள்ளியில் பலூனின் ஏற்றக்கோணம் 60°. சிறிது நேரத்தில் மற்றொரு புள்ளியில் பலூனின் ஏற்றக்கோணம் 30° ஆகக் குறைகிறது. இந்த இடைவெளியில் பலூன் கடந்த தூரத்தைக் காண்க.**

5M PTA-2

ΔACEல், $\frac{AE}{CE} = \tan 60^\circ$

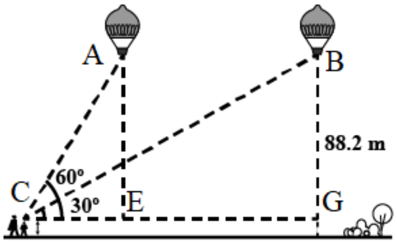
$\frac{88.2-1.2}{CE} = \sqrt{3}$

$CE = 29\sqrt{3}$

ΔBCGல், $\frac{BG}{CG} = \tan 30^\circ$

$\frac{88.2-1.2}{CG} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$CG = 87\sqrt{3}$ மீ



பலூன் கடந்த தூரம் $= EG = GC - EC$

$= 87\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = 58\sqrt{3}$ மீ

பயிற்சி 6.3

1. **$50\sqrt{3}$ மீ உயரமுள்ள ஒரு பாறையின் உச்சியிலிருந்து 30° இறக்கக்கோணத்தில் தரையிலுள்ள மகிழுந்து ஒன்று பார்க்கப்படுகிறது எனில், மகிழுந்திற்கும் பாறைக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.**

PTA-6, MAY-22

2M

$AB =$ மலையின் உயரம் $= 50\sqrt{3}$

இறக்கக்கோணம் $= 30^0$

செங்கோண Δ ABC ல்,

$\theta = 30^\circ$

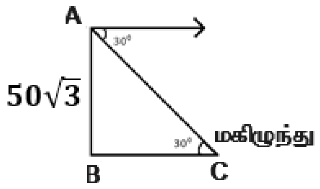
$= \tan 30^0$

$= \frac{AB}{BC}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{50\sqrt{3}}{BC}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$



$BC = 50\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 50 \times 3 = 150$ மீ

மகிழுந்திற்கும் பாறைக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவு $= \mathbf{150}$ **மீ**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.6.26: 20 மீ உயரமுள்ள கட்டடத்தின் உச்சியில் ஒரு விளையாட்டு வீரர் அமர்ந்துகொண்டு தரையிலுள்ள ஒரு பந்தை 60° இறக்கக்கோணத்தில் காண்கிறார் எனில், கட்டட அடிப்பகுதிக்கும் பந்திற்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$ **(PTA-3)** 2M

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. இரண்டு கட்டடங்களுக்கு இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு 70 மீ ஆகும். இரண்டாவது கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து முதல் கட்டடத்தின் உச்சிக்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் $45°$ ஆகும். இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரம் 120 மீ எனில் முதல் கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க. 2M

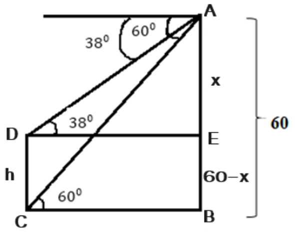
எ.கா.6.27: இரண்டு கட்டடங்களுக்கு இடையேயுள்ள கிடைமட்டத் தொலைவு 140 மீ. இரண்டாவது கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து முதல் கட்டடத்தின் உச்சிக்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் $30°$ ஆகும். முதல் கட்டடத்தின் உயரம் 60 மீ எனில் இரண்டாவது கட்டடத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$ 5M

எ.கா.6.28: 50 மீ உயரமுள்ள ஒரு கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒரு மரத்தின் உச்சி மற்றும் அடி ஆகியவற்றின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே $30°$ மற்றும் $45°$ எனில், மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$ 5M

3. 60 மீ உயரமுள்ள கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து செங்குத்தாக உள்ள ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே $38°$ மற்றும் $60°$ எனில், விளக்குக் கம்பத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\tan 38^0 = 0.7813, \sqrt{3} = 1.732)$ 5M SEP-20

$AB =$ கோபுரம் $= 60$ மீ
$CD =$ விளக்குக் கம்பம் $= h$
$AE = x$
$CD = BE = 60 - x = h$
செங்கோண $\Delta\ AEC$ ல்
$\tan 38° = \frac{AE}{DE} = 0.7813$
$DE = \frac{x}{0.7813}$ ……………………. (1)
செங்கோண $\Delta\ ABC$ ல், $\theta = 60^0$
$\tan 60° = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$
$\frac{60}{BC} = \sqrt{3}$

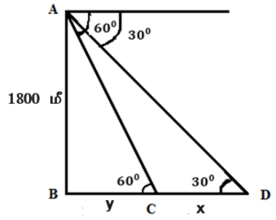
$BC = \frac{60}{\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{3} = 20\sqrt{3}$
$BC = DE$
$\therefore DE = 20\sqrt{3}$ ……………. (2)
(1) & (2) லிருந்து
$DE \Rightarrow \frac{x}{0.7813} = 20\sqrt{3}$
$x = 20\sqrt{3} \times 0.7813$
$x = 20 \times 1.732 \times 0.7813$
$x = 27.064$ மீ
விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம்
$h = 60 - x = 60 - 27.064$
$\boldsymbol{h = 32.93}$ **மீ**



4. 1800மீ உயரத்தில் பறக்கும் ஒரு விமானத்திலிருந்து ஒரே திசையில் விமானத்தை நோக்கிச் செல்லும் இரு படகுகள் பார்க்கப்படுகிறது. விமானத்திலிருந்து இரு படகுகளை முறையே $60°$ மற்றும் $30°$ இறக்கக்கோணங்களில் உற்று நோக்கினால், இரண்டு படகுகளுக்கும் இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$ 5M

$AB =$ தரையிலிருந்து விமானத்தின் உயரம் $= 1800$ மீ
$C =$ படகு 1, $D =$ படகு 2
$CD =$ இரு படகுகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம்
செங்கோண $\Delta\ ABC$ ல், $\theta = 60°$
$\tan 60^0 = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1800}{y}$
$\frac{1800}{y} = \sqrt{3}$
$y = \frac{1800}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1800\sqrt{3}}{3}$
$y = 600\sqrt{3}$ மீ……………. (1)

செங்கோண $\Delta\ ABD$ ல், $\theta = 30°$
$\tan 30° = \frac{AB}{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1800}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$x + y = 1800\sqrt{3}$………… (2)
(1) ஐ (2) ல் பிரதியிட
$x + 600\sqrt{3} = 1800\sqrt{3}$
$x = 1800\sqrt{3} - 600\sqrt{3}$
$x = 1200\sqrt{3}$
$x = 1200 \times 1.732 = 2078.4$ மீ
இரு படகுகளுக்கும் இடைப்பட்ட தொலைவு
$= \mathbf{2078.4}$ **மீ**



இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.6.29: 60 மீ உயரமுள்ள கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து ஒருவர் கடல்மட்டத்திலுள்ள இரு கப்பல்களை முறையே $28°$ மற்றும் $45°$ இறக்கக்கோணத்தில் பார்க்கிறார். ஒரு கப்பல் மற்றொரு கப்பலுக்குப் பின்னால் ஒரே திசையில் கலங்கரை விளக்கத்துடன் நேர்கோட்டில் உள்ளது எனில், இரண்டு கப்பல்களுக்கும் இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க. $(\tan 28° = 0.5317)$ **(PTA-1)** 5M

எ.கா.6.30: ஒருவர் கோபுரத்திலிருந்து விலகி கடலில் சென்று கொண்டிருக்கும் படகு ஒன்றை, கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து பார்க்கிறார். கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 200 மீ தொலைவில் படகு இருக்கும் போது, படகை அவர் $60°$ இறக்கக்கோணத்தில் காண்கிறார். 10 வினாடிகள் கழித்து இறக்கக்கோணம் $45°$ ஆக மாறுகிறது எனில், படகு செல்லும் வேகத்தினைத் (கி.மீ/மணியில்) தோராயமாகக் கணக்கிடுக. மேலும் படகு நிலையான தண்ணீரில் செல்கிறது எனக் கருதுக. $(\sqrt{3} = 1.732)$

5. ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து எதிரெதிர் பக்கங்களில் உள்ள இரண்டு கப்பல்கள் 30° மற்றும் 60° இறக்கக்கோணத்தில் பார்க்கப்படுகின்றன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் h மீ. இரு கப்பல்கள் மற்றும் கலங்கரை விளக்கத்தின் அடிப்பகுதி ஆகியவை ஒரே நேர்கோட்டில் அமைகின்றன எனில், இரண்டு கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு $\frac{4h}{\sqrt{3}}$ மீ என நிரூபிக்க. APR-23 5M

$A \to$ கப்பல் 1.
$B \to$ கப்பல் 2
$CD =$ கலங்கரை விளக்கம் $= h$ மீ
$AD = x$, $BD = y$ என்க
செங்கோண $\Delta\, ADC$ ல், $\theta = 30^0$

$\tan 30^\circ = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{h}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = \sqrt{3}h$ .... (1)

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

செங்கோண $\Delta\, BDC$ ல், $\theta = 60^0$

$\tan 60^\circ = \frac{CD}{BD} = \sqrt{3}$

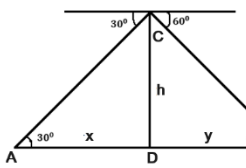
$\frac{h}{y} = \sqrt{3}$

$y = \frac{h}{\sqrt{3}}$.................. (2)

இரண்டு கப்பல்களுக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு (1) + (2)

$x + y = \sqrt{3}h + \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{3h+h}{\sqrt{3}}$

$\boldsymbol{AB = \frac{4h}{\sqrt{3}}}$ **மீ,** நிரூபிக்கப்பட்டது.



அலகுப்பயிற்சி: 8. கலங்கரை விளக்கம் இருக்கும் இடத்திலிருந்து கடலில் எதிரெதிர் திசையில் இரு கப்பல்கள் பயணம் செய்கின்றன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியிலிருந்து இரு கப்பல்களின் இறக்கக்கோணங்கள் முறையே 60° மற்றும் 45°. கப்பல்களுக்கு இடையே உள்ள தொலைவு $200\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)$ மீ எனில், கலங்கரை விளக்கத்தின் உயரம் காண்க. 5M

6. 90 அடி உயரமுள்ள கட்டடத்தின் மேலிருந்து ஒளி ஊடுருவும் கண்ணாடிச் சுவர் கொண்ட மின் தூக்கியானது கீழ் நோக்கி வருகிறது. கட்டடத்தின் உச்சியில் மின் தூக்கி இருக்கும்போது பூந்தோட்டத்தில் உள்ள ஒரு நீரூற்றின் இறக்கக்கோணம் 60° ஆகும். இரண்டு நிமிடம் கழித்து அதன் இறக்கக்கோணம் 30° ஆக குறைகிறது. மின்தூக்கியின் நுழைவு வாயிலிருந்து நீரூற்று $30\sqrt{3}$ அடி தொலைவில் உள்ளது எனில் மின்தூக்கி கீழே வரும் வேகத்தைக் காண்க. 5M

$AB =$ மின் தூக்கி $= 90$ அடி, $C =$ நீரூற்று
$BC = 30\sqrt{3}$ அடி , $AD = x$
(2 நிமிடத்தில் மின் தூக்கி கடந்த தூரம்)
செங்கோண $\Delta\, DBC$ ல்,
$\theta = 30^0$

$\tan 30^\circ = \frac{DB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{90-x}{30\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 90 - x = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

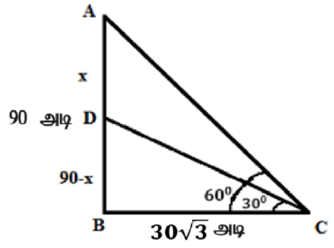
$90 - x = 30$
$x = 60$ அடி

வேகம் $= \frac{\text{தூரம்}}{\text{நேரம்}}$

தூரம் $= 60$ அடி
$\therefore$ நேரம் $= 2$ நிமிடம்

வேகம் $= \frac{60 \text{ அடி}}{2 \text{ நிமிடம்}} = 30$

வேகம் $= 30$ அடி/நிமிடம்



பயிற்சி 6.4

1. 13 மீ உயரமுள்ள ஒரு மரத்தின் உச்சியிலிருந்து மற்றொரு மரத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக்கோணம் முறையே 45° மறறும் 30° எனில், இரண்டாவது மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$ 5M

$AB =$ மரம் 1 $= 13$ மீ,
$CD =$ மரம் 2 $= 13 + x$
$DE = x$
$AE = BC = y$
செங்கோண $\Delta\, AED$ல், $\theta = 45^\circ$

$\tan 45^\circ = \frac{DE}{AE} = 1$

$\frac{x}{y} = 1$

$x = y$

செங்கோண $\Delta\, ABC$ ல், $\theta = 30^\circ$

$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{13}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 13\sqrt{3} = 13 \times 1.732 = 22.516$

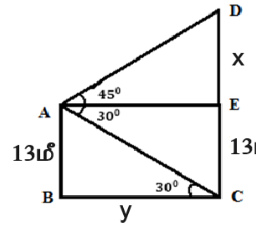
$x = y$

$\therefore x = 22.516$

இரண்டாவது மரத்தின் உயரம்

$= x + 13 = 22.516 + 13 = 35.516$ மீ

$\boldsymbol{h = 35.52}$ **மீ**



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. கடலின் நீர் மட்டத்திலிருந்து 40 மீட்டருக்கு மேலே உள்ள ஒரு கப்பலின் மேல் பகுதியில் நின்று கொண்டிருக்கிற ஒருவர், குன்றின் உச்சியை 60° ஏற்றக்கோணத்திலும் அடிப்பகுதியை 30° இறக்கக்கோணத்திலும் காண்கிறார் எனில், கப்பலிலிருந்து குன்றுக்கு உள்ள தொலைவையும், குன்றின் உயரத்தையும் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$ **5M**

எ.கா.6.31: 12 மீ உயரமுள்ள கட்டிடத்தின் உச்சியிலிருந்து மின்சாரக் கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 60° மற்றும் அதன் அடியில் இறக்கக்கோணம் 30° எனில், மின்சாரக் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

எ.கா.6.32: ஒரு கோபுர உச்சியின் மீது 5மீ உயரமுள்ள கம்பம் பொருத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளது. தரையில் உள்ள 'A' என்ற புள்ளியிலிருந்து கம்பத்தின் உச்சியை 60° ஏற்றக்கோணத்திலும், கோபுரத்தின் உச்சியிலிருந்து 'A' என்ற புள்ளியை 45° இறக்கக் கோணத்திலும் பார்த்தால், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. $(\sqrt{3} = 1.732)$

3. ஏரியின் நீர் மட்டத்திலிருந்து 'h' மீ உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து ஒரு மேகத்தின் ஏற்றக்கோணம் θ_1 மற்றும் ஏரி நீரில் விழும் மேகப் பிம்பத்தின் இறக்கக்கோணம் θ_2 எனில், தரையிலிருந்து மேகத்தின் உயரம் $\frac{h(\tan\theta_1+\tan\theta_2)}{\tan\theta_2-\tan\theta_1}$ என நிரூபிக்கவும். **5M**

$AB \rightarrow$ ஏரியின் பரப்பு

$C \rightarrow$ மேகம்

$C' \rightarrow$ ஏரி நீரில் விழும் மேகப் பிம்பம்

கொடுக்கப்பட்டது,

$AD = h,$

$DE = AB$

தரையிலிருந்து மேகக்கூட்டத்தின் உயரம் $= h + x$

செங்கோண $\Delta\, DEC$ ல்,

$\tan\theta_1 = \frac{x}{DE}$

$DE = \frac{x}{\tan\theta_1}$ .... (1)

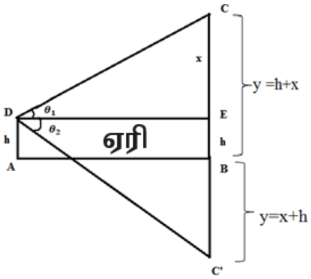
செங்கோண $\Delta\, DEC'$ ல்

$\tan\theta_2 = \frac{EC'}{DE}$

$= \frac{h+y}{DE}$

$\tan\theta_2 = \frac{h+x+h}{DE}$ $[\because y = x + h]$

$DE = \frac{2h+x}{\tan\theta_2}$ .... (2)



(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$\frac{x}{\tan\theta_1} = \frac{2h+x}{\tan\theta_2}$

$x\tan\theta_2 = 2h\tan\theta_1 + x\tan\theta_1$

$x\tan\theta_2 - x\tan\theta_1 = 2h\tan\theta_1$

$x[\tan\theta_2 - \tan\theta_1] = 2h\tan\theta_1$

$x = \frac{2h\tan\theta_1}{\tan\theta_2-\tan\theta_1}$

தரையிலிருந்து மேகக்கூட்டத்தின் உயரம்

$= x + h$

$= \frac{2h\tan\theta_1}{\tan\theta_2-\tan\theta_1} + h$

$= \frac{2h\tan\theta_1+h\tan\theta_2-h\tan\theta_1}{\tan\theta_2-\tan\theta_1}$

$= \frac{h\tan\theta_1+h\tan\theta_2}{\tan\theta_2-\tan\theta_1}$

$= \frac{h[\tan\theta_1+\tan\theta_2]}{\tan\theta_2-\tan\theta_1}$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.6.33: ஒரு தெருவில் உள்ள ஒரு வீட்டின் சன்னலிலிருந்து, (சன்னல் தரைக்கு மேல் h மீ உயரத்தில் உள்ளது) தெருவின் எதிர்ப் பக்கத்தில் உள்ள மற்றொரு வீட்டின் உச்சி, அடி ஆகியவற்றின் ஏற்றக்கோணம், இறக்கக்கோணம் முறையே θ_1 மற்றும் θ_2 எனில், எதிர்ப்பக்கத்தில் அமைந்த வீட்டின் உயரம் $h\left(1+\frac{\cot\theta_2}{\cot\theta_1}\right)$ என நிரூபிக்க. **5M**

4. உயரமான அடுக்குமாடிக் குடியிருப்பின் அடியிலிருந்து அலைபேசி கோபுர உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் $60°$ மற்றும் குடியிருப்பின் உச்சியிலிருந்து கோபுர அடியின் இறக்கக்கோணம் $30°$ ஆகும். அடுக்குமாடி குடியிருப்பின் உயரம் 50 மீ எனில் அலைபேசிக் கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க. கதிர்வீச்சுக் கட்டுப்பாடு விதியின்படி அலைபேசிக் கோபுரத்தின் குறைந்தபட்ச உயரம் 120 மீ இருக்க வேண்டும். மேற்கண்ட அலைக்கோபுரம் இந்தக் கட்டுப்பாட்டிற்கு உட்படுகிறதா?

5M

$AB \rightarrow$ அலைபேசி கோபுரம்

$= AE + EB = (x + 50)$ மீ

$CD \rightarrow$ அடுக்குமாடி குடியிருப்பு $= 50$ மீ

செங்கோண $\Delta\, BCD$ல் $\theta = 30^{\circ}$

$\tan 30^{\circ} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{50}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$BC = 50\sqrt{3}$ .... (1)

செங்கோண $\Delta\ ABC$-ல்

$\tan 60^{0} = \frac{AB}{BC} = \sqrt{3}$

$\frac{x+50}{BC} = \sqrt{3}$

$BC = \frac{x+50}{\sqrt{3}}$ .... (2)

(1) மற்றும் (2)-லிருந்து

$50\sqrt{3} = \frac{x+50}{\sqrt{3}}$

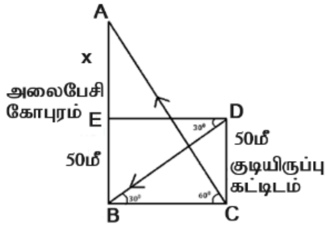
$x + 50 = 50\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$x + 50 = 50 \times 3$

$x + 50 = 150$

$x = 150 - 50$

$x = 100$ மீ



$\therefore$ அலைபேசி கோபுரத்தின் உயரம் AB

$AB = x + 50 = 100 + 50$

$= \mathbf{150}$ **மீ**

ஆம், கதிர்வீச்சுக் கட்டுப்பாடு விதியின்படி அலைபேசிக் கோபுரத்தின் குறைந்தபட்ச உயரம் **120 மீ** இருக்க வேண்டும். மேற்கண்ட அலைக்கோபுரம் 150மீ உயரம் உள்ளதால், இந்தக் கட்டுப்பாட்டிற்கு **உட்படுகிறது.**

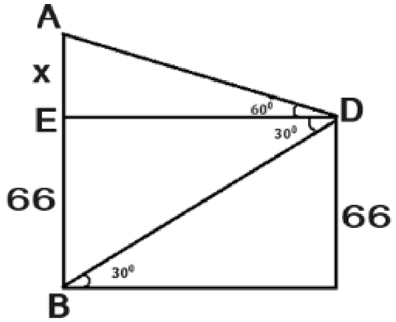
5. 66 மீ உயரமான அடுக்குமாடிக் குடியிருப்பின் உச்சியிலிருந்து ஒரு விளக்குக் கம்பத்தின் உச்சி மற்றும் அடியின் ஏற்றக்கோணம் மற்றும் இறக்கக்கோணம் முறையே $60°$, $30°$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம்.

(ii) விளக்குக் கம்ப உயரத்திற்கும் அடுக்குமாடியின் உயரத்திற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம்.

(iii) விளக்குக் கம்பத்திற்கும் அடுக்குமாடிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு. $(\sqrt{3} = 1.732)$

5M



$CD =$ அடுக்குமாடி குடியிருப்பு $= 66$ மீ

$AB =$ விளக்குக் கம்பம்

$AB = x + 66$

$BC = DE$

செங்கோண $\Delta\ BCD$-ல், $\theta = 30^{\circ}$

$\tan 30^{\circ} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{66}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$BC = 66\sqrt{3}$ .... (1)

செங்கோண $\Delta\, AED$ல், $\theta = 60^{\circ}$

$\tan 60^{\circ} = \frac{AE}{ED} = \sqrt{3}$

$\frac{x}{BC} = \sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \times BC$

$= \sqrt{3} \times 66\sqrt{3}$

$= 66 \times 3$

$x = 198$ மீ

(i) விளக்குக் கம்பத்தின் உயரம் $= x + 66$

$= 198 + 66 = \mathbf{264}$ **மீ**

(ii) விளக்குக் கம்ப உயரத்திற்கும் அடுக்குமாடியின் உயரத்திற்கும் இடையேயுள்ள வித்தியாசம்.

$= 264 - 66 = \mathbf{198}$ **மீ**

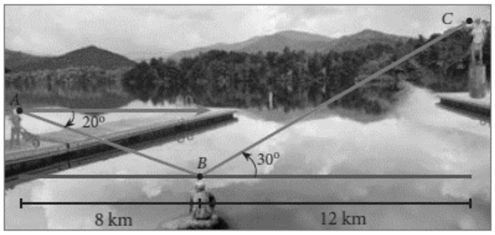
(iii) விளக்குக் கம்பத்திற்கும் அடுக்குமாடிக்கும் இடையே உள்ள தொலைவு$= BC$

$= 66\sqrt{3}$

$= 66 \times 1.732$

$= \mathbf{114.31}$ **மீ**

6. A, B மற்றும் C என்ற மூன்று கிராமவாசிகள் ஒரு பள்ளத்தாக்கில் ஒருவருக்கொருவர் தொலைநோக்கியில் பார்க்குமாறு உள்ளனர். A-க்கும், B-க்கும் இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு 8 கி.மீ மற்றும் B-க்கும், C-க்கும் இடைப்பட்ட கிடைமட்டத் தொலைவு 12 கி.மீ. A-லிருந்து B-க்கு உள்ள இறக்கக்கோணம் $20°$ மற்றும் B-லிருந்து C-க்கும் உள்ள ஏற்றக்கோணம் $30°$ எனில் பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடுக.



(i) A-க்கும் B-க்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்து உயரம்.

(ii) B-க்கும் C-க்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்து உயரம். $(\tan 20^0 = 0.3640, \sqrt{3} = 1.732)$ **5M**

செங்கோண $\Delta\, ADB$

$\theta = 20^0$

$\tan 20^0 = \dfrac{AD}{BD} = 0.3640$

$\dfrac{x}{8} = 0.3640$

$x = 0.3640 \times 8$

$x = 2.9120$

செங்கோண $\Delta\, BEC$

$\theta = 30^0$

$\tan 30^0 = \frac{EC}{BE} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = \frac{12}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{12\sqrt{3}}{3}$

$= 4\sqrt{3} = 4 \times 1.732$

$y = 6.928$

(i) A-க்கும் B-க்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்து உயரம்.

$x = 2.91$ கி.மீ

(ii) B-க்கும் C-க்கும் இடையேயுள்ள செங்குத்து உயரம்.

$y = 6.93$ கி.மீ

அலகுப் பயிற்சி - 6

அலகுப்பயிற்சிக்கான குறிப்பு

வினா எண்: 1(ii) – பயிற்சி 6.1ல் - 2 (i) ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 3,4 – பயிற்சி 6.1 ல் - 9 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 5,6 – பயிற்சி 6.2 ல் - 3 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 8 – பயிற்சி 6.3 ல் - 5 ஆம் வினா போன்றது.

1. **நிரூபிக்கவும்** **2M**

(i) $\cot^2 A\left[\frac{\sec A-1}{1+\sin A}\right] + \sec^2 A\left[\frac{\sin A-1}{1+\sec A}\right] = 0$

LHS: $\cot^2 A\left[\frac{\sec A-1}{1+\sin A}\right] + \sec^2 A\left[\frac{\sin A-1}{1+\sec A}\right]$

$= \frac{\cot^2 A[(\sec A-1)(\sec A+1)]+\sec^2 A[(\sin A-1)(\sin A+1)]}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$

$= \frac{\cot^2 A(\sec^2 A-1)+\sec^2 A(\sin^2-1)}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$

$= \frac{\cot^2 A.\tan^2 A+\sec^2 A(\sin^2 A-1)}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$

$= \frac{1+\sec^2 A(\sin^2 A-1)}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$

$= \frac{1-\sec^2 A(1-\sin^2 A)}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$

$= \frac{1-\sec^2 A.\cos^2 A}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$

$= \frac{1-1}{(1+\sin A)(1+\sec A)}$

$= \mathbf{0}$: RHS

$\cot^2 A\ \tan^2 A$

$= \frac{1}{\tan^2 A}\tan^2 A$

2. $\left[\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right]^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ **என்பதை நிரூபிக்கவும்.** **5M**

$LHS: \left[\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}\right]^2$

$= \frac{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta-2(1+\sin\theta)(\cos\theta)}{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta+2(1+\sin\theta)(\cos\theta)}$

$= \frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta-2\sin\theta.\cos\theta}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta+2\sin\theta.\cos\theta}$

$= \frac{1+2\sin\theta+1-2\cos\theta-2\sin\theta.\cos\theta}{1+2\sin\theta+1+2\cos\theta+2\sin\theta.\cos\theta}$

$= \frac{2+2\sin\theta-2\cos\theta-2\sin\theta.\cos\theta}{2+2\sin\theta+2\cos\theta+2\sin\theta.\cos\theta}$

$= \frac{2(1+\sin\theta-\cos\theta-\sin\theta.\cos\theta)}{2(1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta.\cos\theta)}$

$= \frac{1+\sin\theta-\cos\theta-\sin\theta.\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta.\cos\theta}$

$= \frac{(1+\sin\theta)-\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)} = \frac{\cancel{1+\sin\theta}[1-\cos\theta]}{\cancel{1+\sin\theta}[1+\cos\theta]}$

$= \frac{\mathbf{1-\cos\theta}}{\mathbf{1+\cos\theta}}$: RHS எனவே, நிரூபிக்கப்பட்டது.

7. ஒரு பறவை A என்ற இடத்திலிருந்து 30 கி.மீ தொலைவில் B என்ற இடத்திற்கு $35°$ கோணத்தில் பறக்கிறது. B-ல் 48° கோணத்திலிருந்து விலகி 32 கி.மீ தொலைவில் உள்ள C என்ற இடத்திற்குச் செல்கிறது, (i) A-ன் வடக்குப் புறமாக B-ன் தொலைவு எவ்வளவு? (ii) A-ன் மேற்குப் புறமாக B-ன் தெலைவு எவ்வளவு? (iii) B-ன் வடக்குப் புறமாக C-ன் தொலைவு எவ்வளவு? (iv) B-ன் கிழக்குப் புறமாக C-ன் தொலைவு எவ்வளவு?
$(\sin 55^{\circ} = 0.8192, \cos 55^{\circ} = 0.5736, \sin 42^{\circ} = 0.6691, \cos 42^{\circ} = 0.7431)$ 5M

(i) A-ன்வடக்குப் புறமாகB-ன் தொலைவு $= BF$

செங்கோண $\Delta\, BFA$ல், $\theta = 55^{\circ} \quad (90 - 35^{\circ})$

$sin\ 55^{\circ} \Rightarrow \frac{BF}{AB} = 0.8192$

$\frac{BF}{30} = 0.8192 \qquad [AB = 30\,]$

$BF = 30 \times 0.8192 \quad = 24.576$

$\boldsymbol{BF = 24.58}$ **கி.மீ (தோராயமாக)**

(ii) A-ன் மேற்குப்புறமாக B-ன் தெலைவு$=$ AF

செங்கோண $\Delta\ BFA$ ல்,

$\theta = 55^{\circ} \quad (90 - 35^{\circ})$

$cos\ 55^{\circ} \Rightarrow \frac{AF}{AB} = 0.5736$

$\frac{AF}{30} = 0.5736$

$AF = 0.5736 \times 30$

$\quad = 17.208$

$\boldsymbol{AF = 17.21}$ **கி.மீ (தோராயமாக)**

(iii) B-ன் வடக்குப்புறமாக C-ன் தொலைவு $=$ GC

செங்கோண ΔBGC ல்,

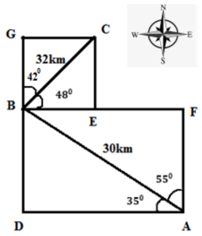
$\theta = 42^{\circ} \quad (90^{\circ} - 48^{\circ})$

$\sin 42^{\circ} \Rightarrow \frac{GC}{BC} = 0.6691$

$\frac{GC}{32} = 0.6691$

$GC = 0.6691 \times 32$

$\boldsymbol{GC = 21.41}$ **கி.மீ (தோராயமாக)**



(iv) B-ன் கிழக்குப் புறமாக C-ன் தொலைவு $=$ EC

செங்கோண $\Delta\ BEC$ ல்,

$\sin 48^{\circ} = \frac{EC}{BC}$

$\cos 42^{\circ} \Rightarrow \frac{EC}{32} = 0.7431 \quad [BC = 32\,]$

$EC = 32 \times 0.7431$

$\quad = 23.779$

$\boldsymbol{EC = 23.78}$**கி.மீ (தோராயமாக)**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

எ.கா.6.24: ஒரு விமானம் G-யிலிருந்து $24°$ கோணத்தைத் தாங்கி 250 கி.மீ தொலைவிலுள்ள H-ஐ நோக்கிச் செல்கிறது. மேலும் H-லிருந்து $55°$ விலகி 180 கி.மீ தொலைவிலுள்ள J-ஐ நோக்கிச் செல்கிறது எனில்,
(i) G-ன் வடக்கு திசையிலிருந்து H-ன் தொலைவு என்ன? (ii) G-ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து H-ன் தொலைவு என்ன?
(iii) H-ன் வடக்கு திசையிலிருந்து J-ன் தொலைவு என்ன?
(iv) H-ன் கிழக்கு திசையிலிருந்து J-ன் தொலைவு என்ன?
$\begin{bmatrix}\sin 24° = 0.4067 & \sin 11° = 0.1908\\ \cos 24° = 0.9135 & \cos 11° = 0.9816\end{bmatrix}$

9. ஒரு தெருவில் கட்டடமும், சிலையும் எதிரெதிர்த் திசையில் 35 மீ இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன. கட்டடத்தின் உச்சியிலிருந்து, சிலை உச்சியின் ஏற்றக்கோணம் 24° மற்றும் சிலை அடியின் இறக்கக்கோணம் 34° எனில், சிலையின் உயரம் என்ன? $(\tan 24^{\circ} = 0.4452, tan\ 34^{\circ} = 0.6745)$

$AB =$ கட்டிடம் $= y$

$CE =$ சிலை $= x + y$

$BC = AD = 35$ மீ

(கட்டடத்திற்கும் சிலைக்கும் உள்ள தூரம் $= BC$)

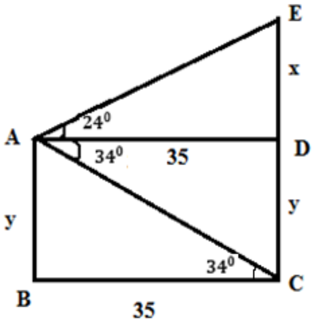
செங்கோண $\Delta\, ADE$ ல்,

$tan\ 24^{\circ} = \frac{ED}{AD} = 0.4452$

$\frac{x}{35} = 0.4452$

$x = 35 \times 0.4452$

$x = 15.582$



5M PTA-4

செங்கோண ΔABC-ல்,

$tan\ 34^{\circ} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = 0.6745$

$\frac{y}{35} = 0.6745$

$y = 0.6745 \times 35$

$\quad = 23.6075$

சிலையின் உயரம்

$CE = x + y$

$\quad = 15.582 + 23.608$

$\quad = 39.189$

$CE = 39.19$ மீ

சிலையின் உயரம் $= \mathbf{39.19}$ **மீ**

7. அளவியல்

பயிற்சி 7.1

1. ஓர் உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரங்களின் விகிதம் $5:7$ ஆகும். அதன் வளைபரப்பு 5500 ச.செ.மீ எனில், உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் காண்க.

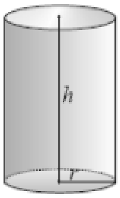
APR-23, JUL-22

2M

$\frac{\text{ஆரம்}}{\text{உயரம்}} = \frac{r}{h} = \frac{5}{7} \Rightarrow r = \frac{5h}{7}$ ....(1)

உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh = 5500$

$$2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5h}{7} \times h = 5500$$



r:h = 5:7

$$h^2 = \frac{5500 \times 7 \times 7}{2 \times 22 \times 5} \times 7 = 35 \Rightarrow h = 35 \text{ செ.மீ}$$

$h = 35$ என (1)-ல் பிரதியிட, $r = \frac{5(35)}{7} = 25$ செ.மீ **$r = 25$ செ.மீ, $h = 35$ செ.மீ**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

2. ஒரு திண்ம இரும்பு உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு 1848 ச.செ.மீ மேலும் அதன் வளைபரப்பு, மொத்தப் புறப்பரப்பில் ஆறில் ஐந்து பங்காகும் எனில், இரும்பு உருளையின் ஆரம் மற்றும் உயரம் காணவும். 5M

எ.கா. 7.1 ஓர் உருளை வடிவப் பீப்பாயின் உயரம் 20 செ.மீ மற்றும் அடிப்புற ஆரம் 14 செ.மீ எனில், அதன் வளைபரப்பு மற்றும் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. **(JUL-22)** 5M

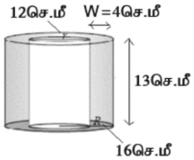
எ.கா. 7.2: 88 ச.செ.மீ வளைபரப்புடைய ஒரு நேர்வட்ட உருளையின் உயரம் 14 செ.மீ எனில், உருளையின் விட்டம் காண்க. **(JUN-23)** 2M

3. ஓர் உள்ளீடற்ற மர உருளையின் வெளிப்புற ஆரம் மற்றும் நீளம் முறையே 16 செ.மீ மற்றும் 13 செ.மீ ஆகும். அதன் தடிமன் 4 செ.மீ எனில் உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு எவ்வளவு?

கொடுக்கப்பட்டது: வெளிப்புற ஆரம் (R) =16 செ.மீ

உட்புற ஆரம் (r) = 16 − 4 =12 செ.மீ 2M

[∵அகலம்=4 செ.மீ]



நீளம் (உயரம்) = 13 செ.மீ

உள்ளீடற்ற உருளையின் மொத்தப் புறப்பரப்பு

$= 2\pi(R + r)(R - r + h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times (16 + 12)(16 - 12 + 13)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 28 \times 17$

$= 2992$ ச.செ.மீ

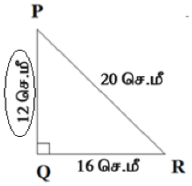
இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 7.4: 2M

தடிமன் 2 மீ, உட்புற ஆரம் 6 மீ & உயரம் 25 மீ உடைய ஓர் உருளை வடிவ சுரங்கப்பாதையின் உள் மற்றும் வெளிப்புறப் பரப்புகளுக்கு வர்ணம் பூசப்படுகிறது. ஒரு லிட்டர் வர்ணத்தைக் கொண்டு 10 ச.மீ பூச முடியுமானால், சுரங்கப்பாதைக்கு வர்ணம் பூச எத்தனை லிட்டர் வர்ணம் தேவை?

4. PQR என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் $QR = 16$செ.மீ, $PR = 20$செ.மீ மற்றும் $\angle Q = 90°$ ஆகும். QR மற்றும் PQ-ஐ மைய அச்சுகளாகக்கொண்டு சுழற்றும்போது உருவாகும் கூம்புகளின் வளைபரப்புகளை ஒப்பிடுக. 2M

பிதாகரஸ் தேற்றப்படி,



$PQ = \sqrt{20^2 - 16^2}$

$= \sqrt{400 - 256}$

$= \sqrt{144}$

$PQ = 12$ செ.மீ

கூம்பின் வளைபரப்பு $= \pi rl$

(1) வளைபரப்பு (QRஐ பொருத்து சுழற்றும் போது)

$= \pi \times 12 \times 20 = 240\pi$ செ.மீ^{2}...........(1)

(2) வளைபரப்பு (PQ-ஐ பொருத்து சுழற்றும் போது)

$= \pi \times 16 \times 20 = 320\pi$செ.மீ^{2}......(2)

$(2) > (1) \Rightarrow$

வளைபரப்பு (PQ-ஐ பொருத்து சுழற்றும் போது)

> வளைபரப்பு (QR-ஐ பொறுத்து சுழற்றும் போது)

PQ-ஐ பொருத்து சுழற்றும் போது, கூம்பின் வளைபரப்பு அதிகமாக இருக்கும்.

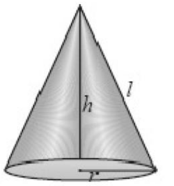
5. சாயுயரம் 19 மீ கொண்ட கூம்பு வடிவக் கூடாரத்தில் நால்வர் உள்ளனர். ஒருவருக்கு 22 ச.மீ பரப்பு தேவை எனில், கூடாரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடவும். (2M)

கூடாரத்தின் அடிப்பக்கம் $= \pi r^2 = 22 \times 4$

$\frac{22}{7} \times r^2 = 88$

$r^2 = 88 \times \frac{7}{22} = 28$

$r = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \mathbf{2\sqrt{7}}$ **மீ**



கூடாரத்தின் உயரம் $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

$= \sqrt{19^2 - (2\sqrt{7})^2}$

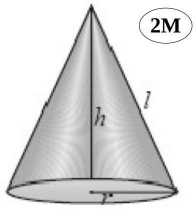
$= \sqrt{361 - 28} = \sqrt{333} \cong \mathbf{18.25}$ **மீ**

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (5M)
>
> **எ.கா. 7.5:** கித்தானைக் கொண்டு 7 மீ ஆரமும் 24 மீ உயரமும் உடைய ஒரு கூம்பு வடிவக் கூடாரம் உருவாக்கப்படுகிறது. செவ்வக வடிவக் கித்தானின் அகலம் 4மீ எனில், அதன் நீளம் காண்க. **(APR-23, PTA-3)**
>
> **எ.கா. 7.6:** 704 ச.செ.மீ மொத்தப் புறப்பரப்பு கொண்ட ஒரு கூம்பின் ஆரம் 7செ.மீ எனில், அதன் சாயுயரம் காண்க. **(JUL-22)** (2M)

6. ஒரு சிறுமி தனது பிறந்த நாளைக் கொண்டாடக் கூம்பு வடிவத் தொப்பிகளை 5720 ச.செ.மீ பரப்புள்ள காகிதத்தாளை பயன்படுத்தித் தயாரிக்கிறாள். 5 செ.மீ ஆரமும், 12 செ.மீ உயரமும் கொண்ட எத்தனை தொப்பிகள் தயாரிக்க முடியும்? (2M)

$r = 5$ செ.மீ, $h = 12$ செ.மீ

சாயுயரம் $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ செ.மீ



தொப்பிகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{\text{காகிதத்தாளின் பரப்பு}}{\text{ஒரு தொப்பியின் பரப்பு (கூம்பின் உயரம் } \pi rl)} = \frac{5720 \times 7}{22 \times 5 \times 13} = 28$

தயாரிக்கப்படும் தொப்பிகளின் எண்ணிக்கை **= 28**

7. சம உயரங்களையுடைய இரு நேர் வட்டக் கூம்புகளின் ஆரங்கள் 1 : 3 என்ற விகிதத்தில் உள்ளன. கூம்புகளின் உயரம் சிறிய கூம்பின் ஆரத்தின் மூன்று மடங்கு எனில், வளைபரப்புகளின் விகிதம் காண்க. PTA-2 (2M)

சிறிய கூம்பு:	பெரிய கூம்பு:
$r_1 \to r$	$r_2 \to 3r$
$h_1 \to 3r$	$h_2 \to 3r$
$l_1 = \sqrt{(3r)^2 + r^2} = \sqrt{10r^2} = r\sqrt{10}$	$l_2 = \sqrt{(3r)^2 + (3r)^2} = \sqrt{18r^2} = \sqrt{9 \times 2}(r) = 3r\sqrt{2}$

சிறிய கூம்பின் வளைபரப்பு : பெரிய கூம்பின் வளைபரப்பு

$\pi r_1 l_1 : \pi r_2 l_2$

$r \times r\sqrt{10} : 3r \times 3r\sqrt{2}$

$\sqrt{5}\,\sqrt{2} : 9\sqrt{2}$

$\sqrt{5} : 9$

வளைபரப்புகளின் விகிதம் $\mathbf{\sqrt{5} : 9}$

8. ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 25% அதிகரிக்கும்போது, அதிகமாகும் புறப்பரப்பின் சதவீதம் காண்க. (2M)

கோளத்தின் புறப்பரப்பு $= 4\pi r^2$

ஆரம்பத்தில் கோளத்தின் புறப்பரப்பு

(r = 100 அலகு எனில்) $= 4\pi(100)^2$

$= 10000 \times 4\pi$ சதுர அலகுகள்.

புதிய கோளத்தின் புறப்பரப்பு (r = 125 அலகு எனில்)

25% அதிகரித்தப்பின் $= 4\pi(125)^2$

$= 15625 \times 4\pi$ சதுர அலகுகள்.

மாறும் சதவீதம் $= \left[\frac{\text{புதிய புறப்பரப்பு}}{\text{ஆரம்பத்தில் புறப்பரப்பு}} - 1\right] \times 100$

$= \left[\frac{15625 \times 4\pi}{10000 \times 4\pi} - 1\right] \times 100 = \mathbf{56.25\%}$

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)
>
> **எ.கா. 7.8:** ஒரு கோளத்தின் புறப்பரப்பு 154 ச.மீ எனில், அதன் விட்டம் காண்க. **(SEP-20)**
>
> **எ.கா. 7.9:** ஒரு கோள வடிவ வளிக்கூண்டினுள் (balloon) காற்று உந்தப்படும்போது அதன் ஆரம் 12 செ.மீ லிருந்து 16 செ.மீ ஆக உயருகிறது. இரு புறப்பரப்புகளின் விகிதம் காண்க. **(MAY-22)** (5M)

9. உள்ளீடற்ற ஓர் அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்திற்கு ஒரு சதுர செ.மீ-க்கு வர்ணம் பூச ₹ 0.14 வீதம் செலவாகும். அதன் உட்புற மற்றும் வெளிப்புற விட்டங்கள் முறையே 20 செ.மீ மற்றும் 28 செ.மீ எனில், அதனை முழுமையாக வர்ணம் பூச எவ்வளவு செலவாகும்? (2M)

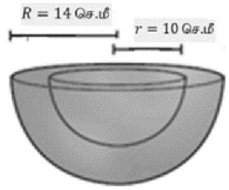
அரைக்கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பு

$= \pi(3R^2 + r^2)$ இங்கு R-வெளிப்புற ஆரம், r- உட்புற ஆரம்

$= \frac{22}{7}(3(14)^2 + 10^2)$

$= \frac{22}{7} \times (588 + 100)$

$= \frac{22}{7} \times 688$



மொத்த புறப்பரப்பு $=$ 2162.16 செ.மீ^{2}

செலவு $= 2162.16 \times 0.14$ $=$ **₹ 302.72**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா. 7.10: ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் அடிப்பரப்பு 1386 ச.மீ எனில், அதன் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

எ.கா. 7.11: ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோள ஓட்டின் உள் மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே 3 மீ மற்றும் 5 மீ ஆகும். ஓட்டின் மொத்தப் புறப்பரப்பு மற்றம் வளைபரப்பைக் காண்க.

10. ஒரு மேஜை விளக்கின் வெளிப்புறத்திற்கு (மேல்பகுதியுடன்) மட்டும் வர்ணம் பூசப்படுகிறது. 1ச.செ.மீ வர்ணம் பூச ₹ 2 செலவாகுமெனில் விளக்கிற்கு வர்ணம் பூசுவதற்கான மொத்தச் செலவைக் கணக்கிடுக. (5M)

$r = 6$ செ.மீ, $R = 12$ செ.மீ

தேவையான பரப்பு = இடைக்கண்டத்தின் வளைப்பரப்பு + மேல் பகுதி வட்டத்தின் பரப்பு

$= \pi(R + r)l + \pi r^2$

$= \pi(6 + 12)10 + \pi(6)^2$

$= 180\pi + 36\pi$

$= 216\pi = 216 \times \frac{22}{7} = \frac{4752}{7}$

$\cong 678.86$ செ.மீ^{2}

செலவு $= 678.86 \times 2$ $=$ **₹ 1357.72**

$l = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

$= \sqrt{8^2 + (12 - 6)^2}$

$= \sqrt{64 + 36}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$ செ.மீ

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

அலகுப்பயிற்சி: (5M)

7. ஓர் இடைக்கண்டத்தின் இரு முனைகளின் சுற்றளவுகள் 18 மீ, 16 மீ மற்றும் அதன் சாயுயரம் 4 மீ ஆகும். ஒரு சதுர மீட்டருக்கு ₹ 100 வீதம் இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பில் வர்ணம் பூச ஆகும் மொத்தச் செலவு என்ன?

எ.கா. 7.13: (2M)
ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டச் சாயுயரம் 5 செ.மீ ஆகும். அதன் இரு ஆரங்கள் 4 செ.மீ மற்றும் 1 செ.மீ எனில், இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பைக் காண்க.

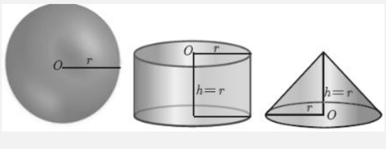
எ.கா. 7.14: (5M)
ஒரு தொழிற்சாலையின் உலோக வாளி, கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவில் உள்ளது. அதன் மேற்புற, அடிப்புற விட்டங்கள் முறையே 10 மீ மற்றும் 4 மீ ஆகும். அதன் உயரம் 4 மீ எனில், இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு மற்றம் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க.

பயிற்சிக்காக:

எ.கா.7.3: நீளம் 3மீ மற்றும் விட்டம் 2.8மீ உடைய ஒரு சமன்படுத்தும் உருளையைக் கொண்டு ஒரு தோட்டம் சமன்படுத்தப் படுகிறது. 8 சுற்றுகளில் எவ்வளவு பரப்பை உருளை சமன் செய்யும்? **(2M)**

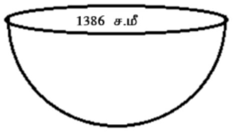
எ.கா.7.7: 2.4செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு திண்ம உருளையின் விட்டம் 1.4செ.மீ ஆகும். உருளையினுள் அதே ஆரமுள்ள கூம்பு வடிவக் குழிவு உருளையின் உயரத்திற்கு ஏற்படுத்தப்படுகிறது எனில், மீதமுள்ள திண்மத்தின் மொத்தப் புறப்பரப்பு காண்க. **(5M)**

எ.கா.7.12: ஒரு கோளம், உருளை மற்றும் கூம்பு ஆகியவற்றின் ஆரங்கள் சமம். படத்தில் உள்ளபடி கூம்பு மற்றும் உருளையின் உயரங்கள் ஆரத்திற்குச் சமம் எனில், அவற்றின் வளைபரப்புகளின் விகிதம் காண்க. **(2M)**



தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்

1. ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் அடிப்பரப்பு 1386 ச.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பு மற்றும் புறப்பரப்பினைக் காண்க. SEP-20 (2M)



அடிப்பக்கப்பரப்பு $= \pi r^2 = 1386$ ச.மீ

அரைக்கோளத்தின் வளைபரப்பு $= 2\pi r^2 = 2 \times 1386 = 2772$ ச.மீ

அரைக்கோளத்தின் புறப்பரப்பு $= 3\pi r^2 = 3 \times 1386 = 4158$ ச.மீ

2. ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டத்தின் சாயுயரம் 10 செ.மீ ஆகும். அதன் மேற்புற, கீழ்ப்புற வட்டப் பகுதிகளின் சுற்றளவு 28 செ.மீ, 18 செ.மீ எனில் அதன் வளைபரப்பைக் காண்க. (5M) PTA-6

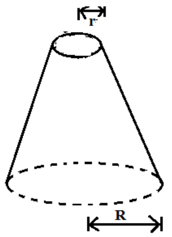
இடைக்கண்டத்தின் சாயுயரம் $l = 10$ செ.மீ

இடைக்கண்டத்தின் மேற்புற சுற்றளவு $= 2\pi R = 28$செ.மீ $\Rightarrow R = \frac{14}{\pi}$ செ.மீ

இடைக்கண்டத்தின் கீழ்ப்புற சுற்றளவு $= 2\pi r = 18$ செ.மீ $\Rightarrow r = \frac{9}{\pi}$ செ.மீ

இடைக்கண்டத்தின் வளைபரப்பு $= \pi(R+r)l$ ச.அ $= \pi\left(\frac{14}{\pi} + \frac{9}{\pi}\right) \times 10$

$= \pi \times \frac{23}{\pi} \times 10 = 230$ ச.செ.மீ



பயிற்சி 7.2

1. 10 மீ உட்புற விட்டம் மற்றும் 14 மீ ஆழம் கொண்ட ஓர் உருளை வடிவக் கிணற்றிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மண் கொண்டு 5 மீ அகலத்தில் கிணற்றைச் சுற்றி மேடை அமைக்கப்படுகிறது எனில், மேடையின் உயரத்தைக் காண்க. (2M)

மேடையின் கன அளவு = கிணற்றின் கன அளவு

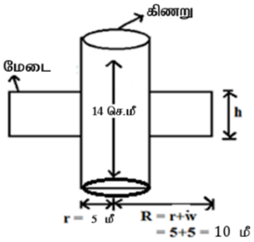
உள்ளிடற்ற உருளையின் கன அளவு = உருளையின் கன அளவு

$$\pi(R^2 - r^2)h = \pi r^2 h$$

$$\pi \times (10^2 - 5^2)h = \pi \times 5 \times 5 \times 14$$

$$h = \frac{5\times5\times14}{75} = \frac{14}{3} = 4.666.....$$

∴ மேடையின் உயரம் $= \mathbf{4.67}$ **மீ**



இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா. 7.15: உயரம் 2 மீ மற்றும் அடிப்பரப்பு 250ச.மீ கொண்ட ஓர் உருளையின் கனஅளவைக் காண்க. (SEP-21)

எ.கா. 7.17: ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையின் உயரம், உட்புற மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே 9 செ.மீ, 21 செ.மீ மற்றும் 28 செ.மீ ஆகும். உருளையை உருவாக்கத் தேவைப்படும் இரும்பின் கன அளவைக் காண்க.

2. விட்டம் 20 செ.மீ உள்ள ஓர் உருளை வடிவக் கண்ணாடிக் குவளையில் 9 செ.மீ உயரத்திற்கு நீர் உள்ளது. ஆரம் 5 செ.மீ மற்றும் உயரம் 4 செ.மீ உடைய ஓர் சிறிய உலோக உருளை, நீரில் முழுமையாக மூழ்கும்போது ஏற்படும் நீரின் உயர்வைக் கணக்கிடுக. (2M) SEP-20

கண்ணாடிக்குழாயில் உயரும் நீரின் கன அளவு

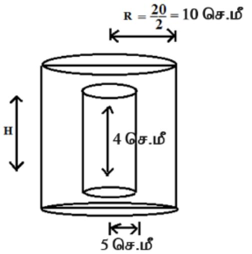
= நீரில் மூழ்கும் உலோக உருளையின் கன அளவு

$$\pi R^2 H = \pi r^2 h$$

$$\pi \times 10 \times 10 \times H = \pi \times 5 \times 5 \times 4$$

$$H = \frac{5\times5\times4}{10\times10} = 1$$

கண்ணாடிக்குழாயில் உயரும் நீரின் உயரம் $= \mathbf{1}$ **செ.மீ**



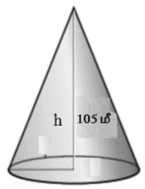
இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். (2M)

எ.கா. 7.16: ஓர் உருளை வடிவ தண்ணீர் தொட்டியின் கன அளவு 1.078×10^6 லிட்டர் ஆகும். தொட்டியின் விட்டம் 7 மீ எனில், அதன் உயரம் காண்க.

3. 484 செ.மீ சுற்றளவுள்ள ஒரு மரக்கூம்பின் உயரம் 105 செ.மீ எனில், கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.

2M JUL-22

கூம்பின் அடிப்பக்கத்தின் சுற்றளவு $(2\pi r) = 484$



$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 484$$

$$r = \frac{484 \times 7}{2 \times 22}$$

$r = 77$ செ.மீ

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 77 \times 77 \times 105$$

$$= 652190$$

கூம்பின் கன அளவு $= \mathbf{652190}$ **செ.மீ³**

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.
>
> 2M
>
> **எ.கா. 7.19:** ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பின் கன அளவு 11088 க.செ.மீ ஆகும். கூம்பின் உயரம் 24 செ.மீ எனில், அதன் ஆரம் காண்க. **(JUN-23, PTA-1)**
>
> **அலகுப்பயிற்சி: 9.** ஒரு கூம்பின் கன அளவு $1005\frac{5}{7}$ க.செ.மீ மற்றும் கீழ் வட்டப்பரப்பு $201\frac{1}{7}$ ச.செ.மீ எனில், அதன் சாயுயரம் காண்க.

4. ஆரம் 10 மீட்டரும், உயரம் 15 மீட்டரும் உடைய ஒரு கூம்பு வடிவக் கொள்கலன் முழுமையாகப் பெட்ரோலால் நிரம்பியுள்ளது. நிமிடத்திற்கு 25 கன மீட்டர் பெட்ரோல் கொள்கலனின் அடிப்புறம் வழியாக வெளியேற்றப்பட்டால் எத்தனை நிமிடங்களில் கொள்கலன் காலியாகும். விடையை நிமிடத் திருத்தமாகத் தருக.

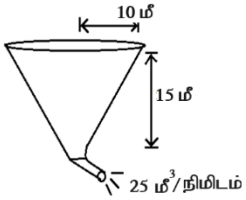
2M

நிமிடங்கள் $= \frac{\text{கூம்பு வடிவ கொள்கலனின் கன அளவு } \left(\frac{1}{3}\pi r^2 h\right)}{\text{ஒரு நிமிடத்தில் வெளியேறும் பெட்ரோலின் கனஅளவு}}$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times 15}{25}$$

$$= \frac{1 \times 22 \times 10 \times 10 \times 15}{3 \times 7 \times 25}$$

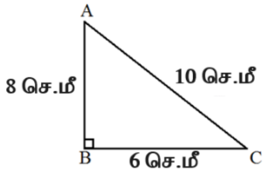
$$= \frac{440}{7} = 62.8 \cong \mathbf{63}$$ **நிமிடங்கள்**



கொள்கலன் **63 நிமிடங்களில்** காலியாகும்.

5. 6 செ.மீ, 8 செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ பக்க அளவுகள் கொண்ட ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அதன் செங்கோணத்தைத் தாங்கும் பக்கங்களை மைய அச்சுகளாகக் கொண்டு சுழற்றும்போது ஏற்படும் திண்மங்களின் கன அளவுகளின் வித்தியாசம் காண்க.

2M



கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

கூம்பின் கன அளவு (6செ.மீ கொண்டு சுழற்றும் போது) $= \frac{1}{3} \times \pi \times 8 \times 8 \times 6 \; (r = 8, h = 6)$

$= 128\pi$ செ.மீ³.......... (1)

கூம்பின் கன அளவு (8செ.மீ கொண்டு சுழற்றும் போது) $= \frac{1}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 8 \; (r = 6, h = 8)$

$= 96\pi$ .... (2)

கன அளவுகளுக்கிடையேயான வித்தியாசம் $(1) - (2) = 128\pi - 96\pi$

$$= 32\pi = 32 \times \frac{22}{7} = \frac{704}{7} \cong 100.571$$

திண்மங்களின் கன அளவுகளின் வித்தியாசம் $= \mathbf{100.58}$ **செ.மீ³**

6. சம ஆரங்கள் கொண்ட இரு கூம்புகளின் கன அளவுகள் 3600 க.செ.மீ மற்றும் 5040 க.செ.மீ எனில், உயரங்களின் விகிதம் காண்க. 2M

PTA-4, MAY-22

கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

முதல் கூம்பின் கன அளவு : 2 ம் கூம்பின் கன அளவு

$$= 3600 : 5040$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \times h_1 : \frac{1}{3}\pi r^2 \times h_2 = 180 : 252$$

$$h_1 : h_2 = 45 : 63$$

$$h_1 : h_2 = 5 : 7$$

உயரங்களின் விகிதம் **5 : 7**

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.
>
> 7. இரு கோளங்களின் ஆரங்களின் விகிதம் 4 : 7 எனில், அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் காண்க. **(APR-23)** 2M
>
> **எ.கா. 7.20:** இரு கூம்புகளுடைய கன அளவுகளின் விகிதம் 2:3 ஆகும். இரண்டாம் கூம்பின் உயரம் முதல் கூம்பின் உயரத்தைப் போல் இரு மடங்கு எனில், அவற்றின் ஆரங்களின் விகிதம் காண்க.

8. ஒரு திண்மக் கோளம் மற்றும் திண்ம அரைக்கோளத்தின் மொத்தப் பரப்பு சமமானதாக இருக்குமானால் அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் $3\sqrt{3} : 4$ என நிரூபி. (2M) PTA-6

கோளத்தின் மொத்த புறப்பரப்பு = அரைக்கோளத்தின் புறப்பரப்பு

$$4\pi r_1^2 = 3\pi r_2^2$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\text{கோளத்தின் கன அளவு}}{\text{அரை காளத்தின் கன அளவு}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{2}{3}\pi r_2^3}$$

$$= 2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{2\times 3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

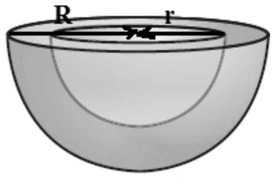
∴ கன அளவுகளின் விகிதம் $\mathbf{3\sqrt{3} : 4}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(5M)

எ.கா. 7.21: ஒரு திண்ம அரைக்கோளத்தின் கனஅளவு 29106 க.செ.மீ. மூன்றில் இரண்டு பங்கு கன அளவுள்ள மற்றோர் அரைக்கோளம் இதிலிருந்து செதுக்கப்படுமானால் புதிய அரைக்கோளத்தின் ஆரம் என்ன?
எ.கா. 7.22: ஓர் உள்ளீடற்ற பித்தளை கோளத்தின் உள்விட்டம் 14 செ.மீ, தடிமன் 1 மி.மீ மற்றும் பித்தளையின் அடர்த்தி 17.3 கிராம்/க.செ.மீ எனில், கோளத்தின் நிறையைக் கணக்கிடுக. **(MDL)**

9. ஓர் உள்ளீடற்ற தாமிரக் கோளத்தின் வெளிப்புற, உட்புறப் புறப்பரப்புகள் முறையே 576πச.செ.மீ மற்றும் 324πச.செ.மீ எனில், கோளத்தை உருவாக்கத் தேவையான தாமிரத்தின் கனஅளவைக் காண்க. (5M)



கோளத்தின் புறப்பரப்பு $= 4\pi r^2$

கோளத்தின் வெளிப்புற புறப்பரப்பு $= 4\pi R^2 = 576\pi$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{576\pi}{4\pi} \Rightarrow R = 12 \text{ செ.மீ}$$

கோளத்தின் உட்புறப் புறப்பரப்பு $= 4\pi r^2 = 324\pi$

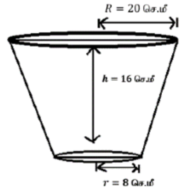
$$\Rightarrow r^2 = \frac{324\pi}{4\pi} \Rightarrow r = 9 \text{ செ.மீ}$$

உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கன அளவு $= \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(12^3 - 9^3) = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(1728 - 729) = \frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 999 = \frac{29304}{7} = 4186.285$$

தேவையான தாமிரத்தின் கன அளவு $\cong \mathbf{4186.29}$ **செ.மீ³**

10. உயரம் 16 செ.மீ உடைய ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்ட வடிவில் அமைந்த கொள்கலன் ஒன்றின் மேற்புறம் திறந்த நிலையில் உள்ளது. கீழ்ப்புற ஆரம் 8 செ.மீ மற்றும் மேற்புற ஆரம் 20 செ.மீ கொண்ட கொள்கலனில் முழுமையாகப் பால் நிரப்பப்படுகிறது. ஒரு லிட்டர் பாலின் விலை ₹40 எனில், நிரப்பப்படும் பாலின் மொத்த விலையைக் காண்க. MAY-22 (5M)



இடைக்கண்டத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 16\left(20^2 + 8^2 + (20\times 8)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 16\times 624 = \frac{73216}{7} = 10459.4 \text{ செ.மீ}^3$$

இடைக்கண்டத்தின் பரப்பு $= 10.4594$ **லிட்டர்**

நிரப்பப்படும் பாலின் மொத்த விலை$= 10.4594 \times 40 = ₹\,418.376$

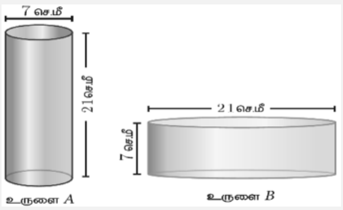
நிரப்பப்படும் பாலின் மொத்த விலை $\cong \mathbf{₹\,418.38}$

1000 செ.மீ³ = 1லிட்டர்

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 7.23: 45 செ.மீ உயரமுள்ள ஓர் இடைக்கண்டத்தின் இரு புற ஆரங்கள் முறையே 28 செ.மீ மற்றும் 7 செ.மீ எனில்,இடைக்கண்டத்தின் கன அளவைக் காண்க. **(PTA-5, SEP-21)** (2M)

எ.கா. 7.18: படத்தில் உள்ள உருளை A மற்றும் B-ல்
(i) எந்த உருளையின் கன அளவு அதிகமாக இருக்கும்?
(ii) அதிகக் கன அளவு கொண்ட உருளையின் மொத்தப்புறப்பரப்பு அதிகமாக இருக்குமா எனச் சோதிக்க.
(iii) உருளை A மற்றும் B-ன் கன அளவுகளின் விகிதம் காண்க. (5M)



தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்

1. இரு நேர்வட்டக் கூம்பின் உயரங்களின் விகிதம் $1:2$ மற்றும் அவற்றின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவின் விகிதம் $3:4$ எனில், அவற்றின் கன அளவுகளின் விகிதம் காண்க. 5M SEP-21

இரு நேர்வட்ட கூம்புகளின் உயரங்கள் முறையே h_1 மற்றும் h_2 என்க. ஆரங்கள் முறையே r_1 மற்றும் r_2 என்க.

நேர்வட்டக் கூம்புகளின் உயரங்களின் விகிதம் $= h_1 : h_2 = 1:2 \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$

நேர்வட்டக் கூம்புகளின் அடிப்பக்கச் சுற்றளவின் விகிதம் $\Rightarrow 2\pi r_1 : 2\pi r_2 = 3:4 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{4}$

முதல் கூம்பின் கன அளவு : இரண்டாம் கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 : \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$

$$= \frac{r_1^2 h_1}{r_2^2 h_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$$

2. ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையின் உயரம், உட்புற மற்றும் வெளிப்புற ஆரங்கள் முறையே 9 செ.மீ., 3 செ.மீ., மற்றும் 5 செ.மீ ஆகும். உருளையை உருவாக்கத் தேவைப்படும் இரும்பின் கன அளவினைக் காண்க.

r, R & h ஆகியன முறையே உட்புற ஆரம், வெளிப்புற ஆரம், உயரம் ஆகியற்றைக் குறிப்பிடுவதாகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $r = 3$ செ.மீ, $R = 5$ செ.மீ, $h = 9$ செ.மீ SEP-20

கன அளவு $= \pi(R^2 - r^2)h$ கன அலகுகள் 2M

$$= \frac{22}{7}(5^2 - 3^2) \times 9$$

$$= \frac{22}{7}(25 - 9) \times 9$$

$$= \frac{22}{7} \times 16 \times 9 = 452.57$$ கன.செ.மீ

3. 3 மீ விட்டமும் 14 மீ ஆழமுள்ள ஒரு கிணறு உருளை வடிவில் வெட்டப்படுகிறது. அவ்வாறு வெட்டும் போது தோண்டியெடுக்கப்பட்ட மண் 4 மீ அகலமுள்ள வட்ட வடிவமாக சீராக பரப்பப்பட்டு ஒரு மேடை அமைக்கப்பட்டால் அம்மேடையின் உயரத்தைக் காண்க. 5M PTA-5

மேடையின் கன அளவு = கிணற்றின் கன அளவு

கிணறு	மேடை
$D = 3$மீ	$r = \frac{3}{2} = 1.5$மீ
$r = \frac{3}{2} = 1.5$மீ	$R = \frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2} = 5.5$மீ
$h = 14$மீ	

உள்ளிடற்ற உருளையின் கன அளவு

= உருளையின் கன அளவு

$$\pi(R^2 - r^2)h = \pi r^2 h$$

$$\pi \times (5.5^2 - 1.5^2)h = \pi \times 1.5 \times 1.5 \times 14$$

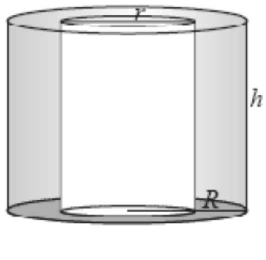
$$(5.5 + 1.5)(5.5 - 1.5)h = 1.5 \times 1.5 \times 14$$

$$7 \times 4 \times h = 31.50$$

$$28 \times h = 31.50$$

$$h = \frac{31.50}{28}$$

$$= 1.125$$



∴ மேடையின் உயரம் $= 1.125$ மீ

பயிற்சி 7.3

1. ஓர் அரைக்கோளத்தின் மேல் ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையைப் பொருத்திய வடிவத்தில் அமைந்த ஒரு கிண்ணத்தின் விட்டம் 14 செ.மீ மற்றும் உயரம் 13 செ.மீ எனில், அதன் கொள்ளளவைக் காண்க.

கிண்ணத்தின் கொள்ளளவு (V) = உருளையின் கன அளவு + அரைக்கோளத்தின் கன அளவு **5M**

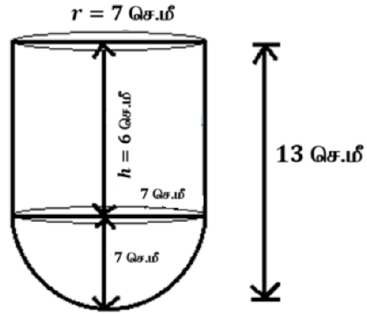
$= \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \pi r^2 \left[h + \frac{2r}{3}\right]$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \left[6 + \frac{2(7)}{3}\right]$

$= 22 \times 7 \times \frac{32}{3}$

$V = \frac{4928}{3} = 1642.66......$



கிண்ணத்தின் கொள்ளளவு $\cong$ **1642.67 செ.மீ³**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். **5M**

எ.கா. 7.24: ஓர் உருளையின் மீது ஓர் அரைக்கோளம் இணைந்தவாறு உள்ள ஒரு பொம்மையின் மொத்த உயரம் 25 செ.மீ ஆகும். அதன் விட்டம் 12 செ.மீ எனில், பொம்மையின் மொத்தப் புறப்பரப்பைக் காண்க. **(SEP-21)**

எ.கா. 7.26: அருள் தனது குடும்ப விழாவிற்கு 150 நபர்கள் தங்குவதற்கு ஒரு கூடாரம் அமைக்கிறார். கூடாரத்தின் அடிப்பகுதி உருளை வடிவிலும் மேற்பகுதி கூம்பு வடிவிலும் உள்ளது. ஒருவர் தங்குவதற்கு 4 ச.மீ அடிப்பகுதி பரப்பும் 40 க.மீ காற்றும் தேவைப்படுகிறது. கூடாரத்தில் உருளையின் உயரம் 8 மீ எனில், கூம்பின் உயரம் காண்க. **(APR-23)**

2. நாதன் என்ற பொறியியல் மாணவர் ஓர் உருளையின் இருபுறமும் கூம்புகள் உள்ளவாறு மாதிரி ஒன்றை உருவாக்கினார். மாதிரியின் நீளம் 12 செ.மீ மற்றும் விட்டம் 3 செ.மீ ஆகும். ஒவ்வொரு கூம்பின் உயரமும் 2 செ.மீ இருக்குமானால் நாதன் உருவாக்கிய மாதிரியின் கனஅளவைக் காண்க. **5M** MAY-22

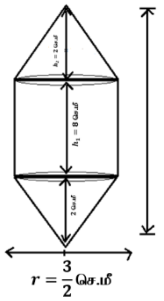
மாதிரியின் கன அளவு = உருளையின் கன அளவு + கூம்பின் கன அளவு × 2

$= \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 \times 2$

$= \pi r^2 \left[h_1 + \frac{2}{3}h_2\right]$

$= \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \left[8 + \frac{2}{3}(2)\right]$

$= \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{28}{3} = 66$



மாதிரியின் கன அளவு **= 66 செ.மீ³**

3. உயரம் 2.4 செ.மீ மற்றும் விட்டம் 1.4 செ.மீ கொண்ட ஒரு திண்ம உருளையில் இருந்து அதே விட்டமும் உயரமும் உள்ள ஒரு கூம்பு வெட்டி எடுக்கப்பட்டால் மீதமுள்ள திண்மத்தின் கனஅளவு எவ்வளவு கன செ.மீ ஆகும்? **5M**

மீதமுள்ள திண்மத்தின் கன அளவு

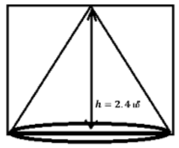
= உருளையின் கன அளவு − கூம்பின் கன அளவு

$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{24}{10} = \frac{2464}{1000}$

$= 2.464$ செ.மீ³



விட்டம் = 1.4செ.மீ
ஆரம் r = 0.7 = $\frac{7}{10}$ செ.மீ
உயரம் h = $\frac{24}{10}$ செ.மீ

மீதமுள்ள திண்மத்தின் கன அளவு **= 2.46 செ.மீ³**

4. ஒரு திண்மத்தின் அடிப்புறம் 6 செ.மீ ஆரம் உடைய அரைக்கோள வடிவிலும் மேற்புறம் 12 செ.மீ உயரமும் 6 செ.மீ ஆரமும் கொண்ட கூம்பு வடிவிலும் உள்ளது. முழுவதும் நீரால் நிரப்பப்பட்ட ஓர் உருளையின் அடிப்புறத்தைத் தொடுமாறு அத்திண்மம் வைக்கப்படும்போது வெளியேறும் நீரின் கனஅளவைக் காண்க. உருளையின் ஆரம் 6 செ.மீ மற்றும் உயரம் 18 செ.மீ எனக் கொள்க. 5M

வெளியேறும் நீரின் கன அளவு = வைக்கப்படும் திண்மத்தின் கன அளவு

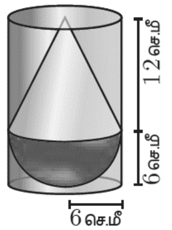
(கூம்பின் கன அளவு + அரைக்கோளத்தின் கன அளவு)

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 (h + 2r)$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times (12 + 2(6))$

$= \frac{44\times6}{7} \times 24 = \frac{6336}{7}$



வெளியேறும் நீரின் கன அளவு $= \mathbf{905.14}$ செ.மீ^{3}

5. ஒரு மருந்து குப்பி, ஓர் உருளையின் இருபுறமும் அரைக் கோளம் இணைந்த வடிவில் உள்ளது. குப்பியின் மொத்த நீளம் 12 மி.மீ மற்றும் விட்டம் 3 மி.மீ எனில், அதில் அடைக்கப்படும் மருந்தின் கனஅளவைக் காண்க? 5M

மருந்து குப்பியின் கன அளவு

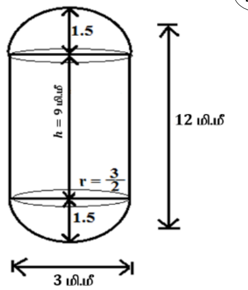
= உருளையின் கன அளவு + (2 × அரைக்கோளத்தின் கன அளவு)

$= \pi r^2 h + \left(2 \times \frac{2}{3}\pi r^3\right)$

$= \pi r^2 \left(h + \frac{4r}{3}\right) = \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \left[9 + \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

$= \frac{22}{7} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times 11 = \frac{2178}{28} = \mathbf{\frac{1089}{14}}$

$h = 12 - 3$
$= 9$
$r = \frac{3}{2}$

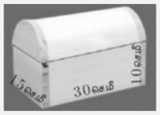


மருந்து குப்பியின் கன அளவு $= \frac{1089}{14} \cong 77.78$

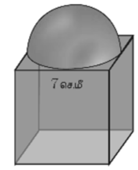
அடைக்கப்படும் மருந்தின் கன அளவு $\mathbf{77.78}$ மி.மீ^{3}

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா. 7.25: ஒரு கனச்செவ்வகத்தின் மீது அரை உருளை உள்ளவாறு ஒரு நகைப்பெட்டி உள்ளது. கனச் செவ்வகத்தின் பரிமாணங்கள் 30 செ.மீ × 15 செ.மீ × 10 செ.மீ எனில், நகைப்பெட்டியின் கன அளவுக் காண்க. 5M



6. 7 செ.மீ பக்க அளவுள்ள கனச்சதுரத்தின் மீது ஓர் அரைக்கோளம் படத்தில் உள்ளவாறு பொருந்தியுள்ளது. திண்மத்தின் புறப்பரப்பு காண்க. 5M



திண்மத்தின் புறப்பரப்பு = கன சதுரத்தின் மொத்த புறப்பரப்பு

− அரைக்கோளத்தின் அடிப்பக்கத்தின் பரப்பு + அரைகோளத்தின் வளைப்பரப்பு

$= 6a^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2$

$= 6a^2 + \pi r^2$

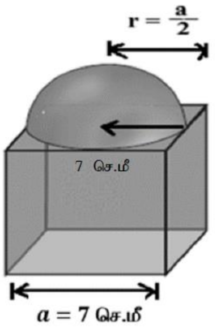
$= 6a^2 + \pi\left(\frac{a^2}{4}\right)$

$= a^2\left(6 + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{a^2}{4}(24 + \pi)$

$= \frac{a^2}{4}\left(24 + \frac{22}{7}\right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{190}{7}\right) = \frac{95a^2}{14}$

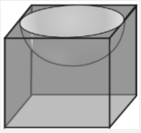
$= \frac{95(7)^2}{14} = \frac{95\times49}{14} = 332.5$ செ.மீ^{2}



திண்மத்தின் புறப்பரப்பு $= \mathbf{332.5}$ செ.மீ^{2}

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

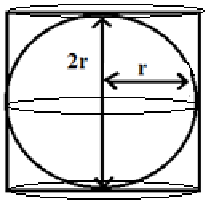
எ.கா. 7.28: கனச்சதுரத்தின் ஒரு பகுதியில் l அலகுகள் விட்டமுள்ள (கனசதுரத்தின் பக்கஅளவிற்குச் சமமான) ஓர் அரைக்கோளம் (படத்தில் உள்ளதுபோல) வெட்டப்பட்டால், மீதமுள்ள திண்மத்தின் புறப்பரப்பைக் காண்க. 5M



7. **ஆரம் r அலகுகள் கொண்ட ஒரு கோளம் ஒரு நேர் வட்ட உருளையினுள் மிகச் சரியாகப் பொருத்தப்பட்டுள்ளது எனில், கீழ்க்கண்டவற்றைக் கணக்கிடுக.** 5M

(i) கோளத்தின் புறப்பரப்பு (ii) உருளையின் வளைபரப்பு

(iii) (i) மற்றும் (ii)-ல் பெறப்பட்ட பரப்புகளின் விகிதம்



(i) கோளத்தின் புறப்பரப்பு $= \mathbf{4\pi r^2}$ **ச.அ**............ (1)

(ii) உருளையின் வளைபரப்பு $= 2\pi rh = 2\pi r(2r)$

$= \mathbf{4\pi r^2}$ **ச.அ** .... (2)

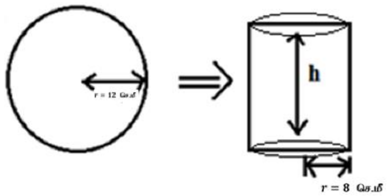
(iii) (i) மற்றும் (ii)-ல் பெறப்பட்ட பரப்புகளின் விகிதம்

$$= \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} = \frac{1}{1} = \mathbf{1:1}$$

பயிற்சி 7.4

1. **12 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் அலுமினியக் கோளம் உருக்கப்பட்டு 8 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. உருளையின் உயரம் காண்க.** 5M

கொடுக்கப்பட்டது:



கோளத்தின் ஆரம் $r = 12$ செ.மீ

உருளையின் ஆரம் $= 8$ செ.மீ

உருளையின் கன அளவு $(\pi r^2 h) =$ கோளத்தின் கன அளவு $\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

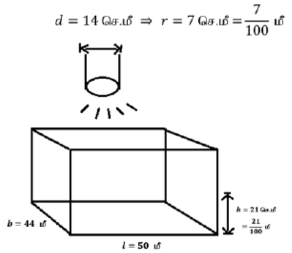
$$\pi \times 8 \times 8 \times h = \frac{4}{3} \times \pi \times 12 \times 12 \times 12$$

$$h = \frac{4 \times \pi \times 12 \times 12 \times 12}{3 \times \pi \times 8 \times 8}$$

$h = 36$ செ.மீ

உருளையின் உயரம் $= \mathbf{36}$ **செ.மீ**

2. **14 செ.மீ விட்டமுள்ள குழாயிலிருந்து 15 கி.மீ/மணி என்ற வேகத்தில் 50 மீ நீளம் மற்றும் 44 மீ அகலம் கொண்ட ஒரு செவ்வக வடிவத் தொட்டியினுள் தண்ணீர் பாய்கிறது. எவ்வளவு நேரத்தில் தண்ணீரின் மட்டம் 21 செ.மீ-க்கு உயரும்.** 5M



செவ்வக வடிவத் தொட்டி:

$l = 50$ மீ

$b = 44$ மீ

$h = 21$ செ.மீ $= \frac{21}{100}$ மீ

உருளை வடிவக் குழாய்:

விட்டம் $= 14$ செ.மீ

$\therefore$ ஆரம் $= 7$ செ.மீ $= \frac{7}{100}$ மீ

வேகம் $= 15$கி.மீ /மணி

$= 15 \times 1000$ மீ/மணி

தேவையான நேரம் $= \frac{\text{செவ்வகவடிவத் தொட்டியின் கன அளவு (lbh)}}{\text{ஒரு மணி நேரத்தில் வெளியேறும் நீரின் அளவு } (\pi r^2 \times \text{வேகம்})}$

$$= \frac{50 \times 44 \times 21 \times 7 \times 100 \times 100}{100 \times 22 \times 7 \times 7 \times 15 \times 1000}$$

$= \mathbf{2}$ **மணி**

2 மணி நேரத்தில் தண்ணீரின் மட்டம் 21 செ.மீ-க்கு உயரும்.

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

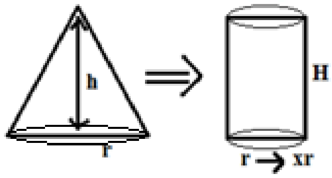
அலகுப்பயிற்சி:

2. ஆரம் 1.75மீ உள்ள ஓர் அரைக்கோள வடிவத் தொட்டி முற்றிலும் நீரால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. ஒரு குழாயின் மூலம் விநாடிக்கு 7 லிட்டர் வீதம் தொட்டியிலிருந்து நீர் வெளியேற்றப்படுமானால், தொட்டியை எவ்வளவு நேரத்தில் முழுவதுமாகக் காலி செய்யலாம்?

3. முழுமையாக நீரால் நிரம்பியுள்ள ஒரு கூம்பு வடிவக் குடுவையின் ஆரம் r அலகுகள் மற்றும் உயரம் h அலகுகள் ஆகும். நீரானது xr அலகுகள் ஆரமுள்ள மற்றொரு உருளை வடிவக் குடுவைக்கு மாற்றப்பட்டால் நீரின் உயரம் காண்க. (5M)

கொடுக்கப்பட்டது

கூம்பு வடிவக் குடுவை	**உருளை வடிவக் குடுவை**
ஆரம் $\rightarrow r$	ஆரம் $\rightarrow xr$
உயரம் $\rightarrow h$	உயரம் $\rightarrow H$



உருளை வடிவக் குடுவையின் கன அளவு $(\pi r^2 h)$

$= $ கூம்பு வடிவக் குடுவையின் கன அளவு $\left(\frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h\right)$

$$\pi \times xr \times xr \times H = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$$

$$H = \frac{1 \times \pi \times r^2 \times h}{3 \times x^2 \times r^2 \times \pi}$$

$$H = \frac{h}{3x^2}$$

உருளை வடிவக் குழாயில் நீரின் உயரம் $= \frac{h}{3x^2}$ **அலகுகள்**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

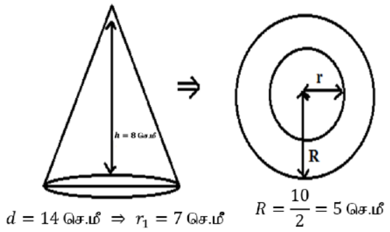
எ.கா. 7.30: களிமண் கொண்டு செய்யப்பட்ட 24 செ.மீ உயரமுள்ள ஒரு கூம்பை ஒரு குழந்தை அதே ஆரமுள்ள ஓர் உருளையாக மாற்றுகிறது எனில் உருளையின் உயரம் காண்க. **(PTA-3)** (2M)

எ.கா. 7.31: 6 செ.மீ ஆரம் மற்றும் 15 செ.மீ உயரம் கொண்ட ஓர் உருளை வடிவப் பாத்திரம் முழுவதுமாக பனிக்கூழ் (ice-cream) உள்ளது. அந்தப் பனிக்கூழானது, கூம்பு மற்றும் அரைக்கோளம் இணைந்த வடிவத்தில் நிரப்பப்படுகிறது. கூம்பின் உயரம் 9 செ.மீ மற்றும் ஆரம் 3 செ.மீ எனில், பாத்திரத்தில் உள்ள பனிக்கூழை நிரப்ப எத்தனைக் கூம்புகள் தேவை? **(PTA-5,6)** (5M)

4. விட்டம் 14 செ.மீ, உயரம் 8 செ.மீ உடைய ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பு, ஓர் உள்ளீடற்ற கோளமாக உருமாற்றப்படுகிறது. கோளத்தின் வெளிவிட்டம் 10 செ.மீ எனில், உள்விட்டத்தைக் காண்க. (5M)

கொடுக்கப்பட்டது

கூம்பு:	**உள்ளீடற்ற கோளம்:**
விட்டம் $= 14$ செ.மீ	வெளிவிட்டம் $= 10$ செ.மீ
∴ ஆரம் $(r_1) = 7$ செ.மீ	∴ ஆரம் $R = 5$ செ.மீ
உயரம் $(h) = 8$ செ.மீ	உள் ஆரம் $= r$



உள்ளீடற்ற கோளத்தின் கன அளவு $=$ கூம்பின் கன அளவு

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h$$

$$\frac{4}{3} \times \pi \times (5^3 - r^3) = \frac{1}{3} \times \pi \times 7 \times 7 \times 8$$

$$125 - r^3 = 98$$

$$-r^3 = 98 - 125$$

$$-r^3 = -27$$

$$\therefore\ r^3 = 27$$

$$r^3 = 3^3$$

$r = 3$ செ.மீ $=$ உள் ஆரம்

கோளத்தின் உள்விட்டம் **$= 6$ செ.மீ**

5. சீனு வீட்டின் மேல்நிலை நீர்த்தொட்டி உருளை வடிவில் உள்ளது. அதன் ஆரம் 60 செ.மீ மற்றும் உயரம் 105 செ.மீ. 2 மீ $\times 1.5$ மீ $\times 1$ மீ பரிமாணங்களை உடைய ஒரு கனச்செவ்வகக் கீழ்நிலை நீர் தொட்டியிலிருந்து நீர் உந்தப்பட்டு மேலேயுள்ள உருளை வடிவத் தொட்டி முழுமையாக நிரப்பப்படுகிறது. தொடக்கத்தில் கீழ்த் தொட்டியில் நீர் முழுமையாக இருப்பதாகக் கருதுக. மேல் தொட்டிக்கு நீர் ஏற்றிய பிறகு மீதமுள்ள நீரின் கனஅளவைக் காண்க.

5M

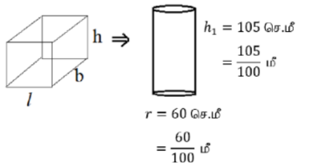
கனச்செவ்வகக் கீழ்நிலை நீர் தொட்டி:

$l \times b \times h = 2$ மீ $\times 1.5$ மீ $\times 1$ மீ

உருளை வடிவ நீர்த்தொட்டி:

ஆரம் $= 60$ செ.மீ $= \frac{60}{100}$ மீ

உயரம் $= 105$ செ.மீ $= \frac{105}{100}$ மீ



மேல் தொட்டிக்கு நீர் ஏற்றிய பிறகு மீதமுள்ள நீர்

$=$ கனச்செவ்வக கீழ்நிலை நீர்தொட்டியின் கன அளவு $-$ உருளை வடிவ நீர்த்தொட்டியின் கன அளவு

$= [2 \times 1.5 \times 1] - \left[\frac{22}{7} \times \frac{60}{100} \times \frac{60}{100} \times \frac{105}{100}\right] = 3 - \frac{11 \times 6 \times 6 \times 3}{1000} = 3 - 1.188 = 1.812$

மேல் தொட்டிக்கு நீர் ஏற்றிய பிறகு மீதமுள்ள நீர் $= 1.812$ மீ³

$= \mathbf{1812000}$ **செ.மீ³ அல்லது** 1812 **லிட்டர்**

6. ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோள ஓட்டின் உட்புற மற்றும் வெளிப்புற விட்டங்கள் முறையே 6 செ.மீ மற்றும் 10 செ.மீ ஆகும். அது உருக்கப்பட்டு 14 செ.மீ விட்டமுள்ள ஒரு திண்ம உருளையாக்கப்பட்டால், அவ்வுருளையின் உயரம் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது

5M

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளம்

உட்புற விட்டம் $= 6$ செ.மீ

$\therefore$ ஆரம் $(r) = 3$ செ.மீ

வெளிப்புற விட்டம் $= 10$ செ.மீ

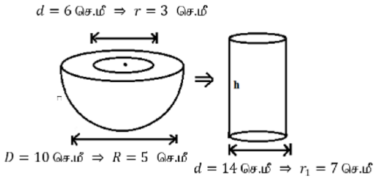
$\therefore$ ஆரம் $(R) = 5$ செ.மீ

உருளை

விட்டம் $= 14$

$\therefore$ ஆரம் $(r) = 7$செ.மீ

உயரம் $\rightarrow h.$



உருளையின் கன அளவு $(\pi r^2 h) =$ உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் கன அளவு $\left[\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3)\right]$

$$\pi \times 7 \times 7 \times h = \frac{2}{3} \times \pi \times [5^3 - 3^3]$$

$$h = \frac{2 \times \pi \times 98}{3 \times \pi \times 7 \times 7} = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ செ.மீ}$$

உருளையின் உயரம் $= \mathbf{1.33}$ **செ.மீ**

7. 6 செ.மீ ஆரமுள்ள ஒரு திண்மக் கோளம் உருக்கப்பட்டுச் சீரான தடிமனுள்ள ஓர் உள்ளீடற்ற உருளையாக மாற்றப்படுகிறது. உருளையின் வெளி ஆரம் 5 செ.மீ மற்றும் உயரம் 32 செ.மீ எனில், உருளையின் தடிமனைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது:

5M

கோளம்

ஆரம் $= 6$ செ.மீ

உள்ளீடற்ற உருளை

வெளி ஆரம் $(R) = 5$செ.மீ

உட்புற ஆரம் $(r) \rightarrow r$

உயரம் $(h) = 32$ செ.மீ

உருளையின் கன அளவு $=$ கோளத்தின் கன அளவு

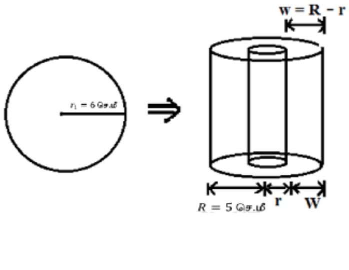
$$\pi h(R^2 - r^2) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\pi \times 32 \times (5^2 - r^2) = \frac{4}{3} \times \pi \times 6 \times 6 \times 6$$

$$25 - r^2 = \frac{4 \times \pi \times 6 \times 6 \times 6}{3 \times \pi \times 32} = 9$$

$$-r^2 = 9 - 25 = -16$$

$$r = 4 \text{ செ.மீ}$$



தடிமன் $= R - r = 5 - 4 = 1$ செ.மீ

உருளையின் தடிமன் $= \mathbf{1}$ **செ.மீ**

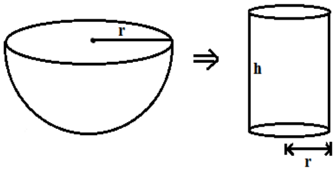
8. **ஓர் அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் விளிம்பு வரையில் பழச்சாறு நிரம்பியுள்ளது. உயரத்தைவிட 50% அதிக ஆரம் கொண்ட உருளை வடிவப் பாத்திரத்திற்குப் பழச்சாறு மாற்றப்படுகிறது. அரைக்கோளம் மற்றும் உருளை ஆகியவற்றின் விட்டங்கள் சமமானால் கிண்ணத்திலிருந்து எவ்வளவு சதவீதப் பழச்சாறு உருளை வடிவ பாத்திரத்திற்கு மாற்றப்படும்?**

5M

கொடுக்கப்பட்டது

அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் ஆரம் $= r$

உருளை வடிவப் பாத்திரத்தின் ஆரம் $= r$



ஆரம் $(r) =$ உயரத்தைவிட(h) 50% அதிகம்

$$r = h + \frac{50}{100}h \Rightarrow r = h + \frac{1}{2}h \Rightarrow r = \frac{3h}{2}$$

$$\therefore\ h = \frac{2r}{3}$$

அரைக்கோள வடிவக் கிண்ணத்தின் கன அளவு $= \frac{2}{3}\pi r^3$ ………….. (1)

உருளை வடிவப் பாத்திரத்தின் கன அளவு $= \pi r^2 h$

$$= \pi \times r^2 \times \frac{2r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3 \text{ ………… (2)}$$

$(1) = (2) \Rightarrow$கிண்ணத்திலிருந்து **100% சதவீதப் பழச்சாறு** உருளை வடிவ பாத்திரத்திற்கு மாற்றப்படும்.

தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்

1. **24 செ.மீ $\times$ 22 செ.மீ $\times$ 12 செ.மீ அளவுள்ள கனச் செவ்வக வடிவ ஈய திண்மத்திலிருந்து 6 செ.மீ விட்ட அளவுகள் ஈயக் குண்டுகள் எத்தனை உருவாக்கலாம்?**

2M PTA-2

$$\frac{\text{கனச்செவ்வகத்தின் கனஅளவு}}{\text{கோளத்தின் கனஅளவு}} = \frac{l \times b \times h}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

$$= \frac{24 \times 22 \times 12}{\frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 8 \times 7$$

$$= 56$$

56 குண்டுகளை உருவாக்கலாம்.

2. **32 செ.மீ உயரமும் 18 செ.மீ ஆரமும் உடைய ஓர் உருளை வடிவ வாளியில் முழுமையாக மணல் உள்ளது. இந்த மணல் தரையில் கொட்டப்பட்டு கூம்பு வடிவில் அமைக்கப்படுகிறது. அந்தக் கூம்பின் உயரம் 24 செ.மீ எனில், அதன் ஆரம், சாயுயரத்தைக் காண்க.**

5M MDL, PTA-4

உருளை வடிவ வாளி	**கூம்பு**
ஆரம் $r = 18$ செ.மீ.,	உயரம் $h_1 = 24$ செ.மீ.
உயரம் $h = 32$ செ.மீ.	

கூம்பின் கன அளவு $=$ உருளை வடிவ வாளியின் கன அளவு

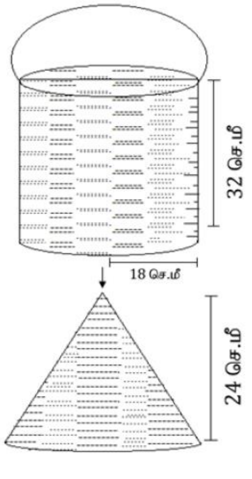
$$\frac{1}{3}\pi {r_1}^2 h_1 = \pi r^2 h$$

$$\frac{1}{3} \times \not{\pi} \times {r_1}^2 \times 24 = \not{\pi} \times 18 \times 18 \times 32$$

$${r_1}^2 = \frac{18 \times 18 \times 32 \times 3}{24}$$

$$r_1 = \sqrt{18 \times 18 \times 4} = 18 \times 2 = 36$$

ஆரம் $r_1 = 36$ செ.மீ.



சாயுயரம் $l_1 = \sqrt{{r_1}^2 + {h_1}^2}$

$$= \sqrt{36^2 + 24^2}$$

$$= 12\sqrt{3^2 + 2^2}$$

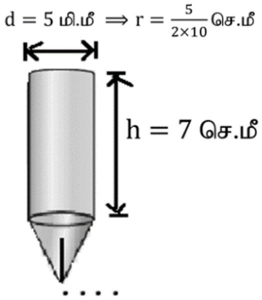
$$= 12\sqrt{9 + 4}$$

$$= 12\sqrt{13} \text{ செ.மீ.}$$

அலகுப் பயிற்சி - 7

அலகுப்பயிற்சிக்கான குறிப்பு
வினா எண்: 2 – பயிற்சி 7.4 ல் - 2 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 7 – பயிற்சி 7.1 ல் - 10 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 9 – பயிற்சி 7.2 ல் - 3 ஆம் வினா போன்றது.

1. 7 செ.மீ நீளமுள்ள ஓர் உருளை வடிவ மை குடுவையின் விட்டம் 5 மி.மீ ஆகும். மை முழுமையாகவுள்ள உருளையைக் கொண்டு சராசரியாக 330 வார்த்தைகள் எழுதலாம். ஒரு லிட்டரில் ஐந்தில் ஒரு பங்கு மை ஒரு பாட்டிலில் உள்ளது எனில், அதனைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வார்த்தைகள் எழுதலாம்? (5M)



உருளை வடிவ மை குடுவையின் கன அளவு $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{5}{2\times10} \times \frac{5}{2\times10} \times 7$$

$$= \frac{11}{8} \text{ செ.மீ}^3 \text{ [330 வார்த்தைகள் எழுத]}$$

ஒரு லிட்டரில் ஐந்தில் ஒரு பங்கு மை ஒரு பாட்டிலில் உள்ளது எனில்,

அதனைப் பயன்படுத்தி எழுதப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை

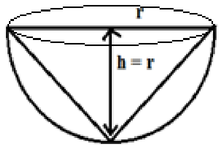
$$= \frac{330}{\frac{11}{8}} \times 200$$

$$= \frac{330\times200\times8}{11} = 48000$$

(200 மி.லி= 200 செ.மீ^{3})

ஒரு லிட்டரில் ஐந்தில் ஒரு பங்கு மையை பயன்படுத்தி எழுதப்படும் வார்த்தைகளின் எண்ணிக்கை **= 48000 வார்த்தைகள்**

3. r அலகுகள் ஆரம் கொண்ட ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்திலிருந்து வெட்டி எடுக்கப்படும் கூம்பின் மீப்பெரு கனஅளவு என்ன? (2M)



கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times r$

வெட்டி எடுக்கப்படும் கூம்பின் மீப்பெரு கனஅளவு $= \frac{1}{3}\pi r^3$ **க.அ.**

4. ஒரு கூம்பின் இடைக்கண்டம், 10 செ.மீ நீளமுள்ள ஓர் உருளையுடன் இணைக்கப்பட்ட எண்ணெய்ப் புனலின் மொத்த உயரம் 22 செ.மீ ஆகும். உருளையின் விட்டம் 8 செ.மீ மற்றும் புனலின் மேற்புற விட்டம் 18 செ.மீ எனில், புனலை உருவாக்கத் தேவையான தகர அட்டையின் பரப்பைக் காண்க. (5M)

$l = \sqrt{12^2 + (9-4)^2}$ $\left[\because\ l = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}\right]$

$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169}$

$l = 13$ செ.மீ

தகர அட்டையின் பரப்பு

= இடைக்கண்டத்தின் வளைப்பரப்பு + உருளையின் வளைப்பரப்பு

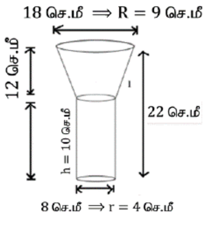
$= \pi (R+r)l + 2\pi rh$

$= \pi [(R+r)l + 2rh]$

$= \frac{22}{7}[(9+4)13 + 2(4)(10)]$

$= \frac{22}{7}[169+80] \quad = \frac{22}{7} \times 249 = \frac{5478}{7}$

$\cong 782.57$ செ.மீ^{2}



புனலை உருவாக்கத் தேவையான தகர அட்டையின் பரப்பு $\cong$ **782.57 செ.மீ^{2}**

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.7.27: ஓர் உருளையின் மீது ஓர் இடைக்கண்டம் இணைந்தவாறு அமைந்த ஒரு புனலின் (funnel) மொத்த உயரம் 20 செ.மீ. உருளையின் உயரம் 12 செ.மீ மற்றும் விட்டம் 12 செ.மீ ஆகும். இடைக்கண்டத்தின் மேற்புற விட்டம் 24 செ.மீ எனில், புனலின் வெளிப்புறப் பரப்பைக் கணக்கிடுக. **(PTA-1)** (5M)

5. **உயரம் 10 செ.மீ மற்றும் விட்டம் 4.5 செ.மீ உடைய ஒரு நேர்வட்ட உருளையை உருவாக்க 1.5 செ.மீ விட்டமும், 2 மி.மீ தடிமன் கொண்ட எத்தனை வட்ட வில்லைகள் தேவை?** 5M PTA-1

தேவையான வட்ட வில்லைகளின் எண்ணிக்கை

$= \frac{\text{உருளையின் கன அளவு } (\pi r^2 h)}{\text{வட்ட வில்லையின் கன அளவு } (\pi r^2 h)}$

$= \frac{\pi \times 45 \times 45 \times 10 \times 10 \times 2 \times 10 \times 2 \times 10}{2 \times 10 \times 2 \times 10 \times 10 \times \pi \times 15 \times 15 \times 2}$

தேவையான வட்ட வில்லைகளின் எண்ணிக்கை $= \mathbf{450}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 5M

எ.கா. 7.29: 16 செ.மீ ஆரமுள்ள ஓர் உலோகப் பந்து, உருக்கப்பட்டு 2 செ.மீ ஆரமுள்ள சிறு பந்துகளாக்கப்பட்டால், எத்தனை பந்துகள் கிடைக்கும்? **(JUN-23)**

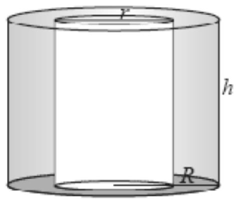
6. **ஓர் உள்ளீடற்ற உலோக உருளையின் வெளிப்புற ஆரம் 4.3 செ.மீ, உட்புற ஆரம் 1.1 செ.மீ மற்றும் நீளம் 4 செ.மீ. உலோக உருளையை உருக்கி 12 செ.மீ நீளமுள்ள வேறொரு திண்ம உருளை உருவாக்கப்பட்டால் புதிய உருளையின் விட்டத்தைக் கணக்கிடுக.** 2M

திண்ம உருளையின் கன அளவு = உள்ளீடற்ற உருளையின் கன அளவு

$$\pi r^2 h = \pi(R^2 - r^2)h$$

$$\pi \times r^2 \times 12 = \pi[(4.3)^2 - (1.1)^2] \times 4$$

$$r^2 = \frac{\cancel{\pi} \times 17.28 \times 4}{\cancel{\pi} \times 12} = 5.76$$



உருளையின் ஆரம் $r = 2.4$ செ.மீ

திண்ம உருளையின் விட்டம் $= \mathbf{4.8}$ **செ.மீ**

8. **ஓர் உள்ளீடற்ற அரைக்கோளக் கிண்ணத்தை உருவாக்கப் பயன்பட்ட பொருளின் கனஅளவு $\frac{436\pi}{3}$ க.செ.மீ ஆகும். கிண்ணத்தின் வெளிவிட்டம் 14 செ.மீ எனில் அதன் தடிமனைக் கணக்கிடுக.** 2M

உள்ளீடற்ற அரைக்கோளத்தின் கன அளவு $\frac{2}{3}\pi(R^3 - r^3) = \frac{436\pi}{3}$

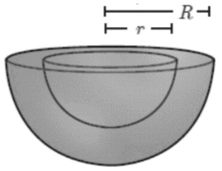
$$\frac{2}{3} \times \pi \times (7^3 - r^3) = \frac{436\pi}{3}$$

$$343 - r^3 = \frac{436\pi \times 3}{3 \times 2 \times \pi}$$

$$-r^3 = 218 - 343$$

$$-r^3 = -125 = 5^3$$

$$r = 5 \text{ செ.மீ}$$



தடிமன் $= R - r = 7 - 5 = 2$ செ.மீ

கிண்ணத்தின் தடிமன் $= \mathbf{2}$ **செ.மீ**

10. **ஒரு வட்டக்கோண வடிவில் உள்ள உலோகத் தகட்டின் ஆரம் 21 செ.மீ மற்றும் மையக் கோணம் 216° ஆகும். வட்டக்கோணப் பகுதியின் ஆரங்களை இணைத்து உருவாக்கப்படும் கூம்பின் கன அளவைக் காண்க.** PTA-2 5M

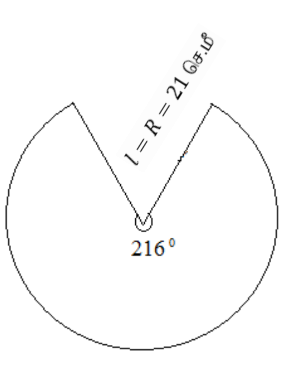
வில்லின் நீளம் $L = \frac{2\pi R}{360} \times 216 = \frac{2\pi \times 21 \times 3}{5}$

கூம்பின் அடிச்சுற்றளவு = வில்லின் நீளம்

அதாவது, $2\pi r = \frac{2\pi \times 21 \times 3}{5} = \frac{63}{5} \Rightarrow r = 12.6$ செ.மீ

$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{21^2 - 12.6^2} = \sqrt{441 - 158.76} = \sqrt{282.24}$

$h = 16.8$ செ.மீ



கூம்பின் கன அளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 12.6 \times 12.6 \times 16.8$$

$$= 2794.176 \text{ செ.மீ}^3$$

உருவாக்கப்படும் கூம்பின் கன அளவு $= \mathbf{2794.176}$ **செ.மீ³**

8. புள்ளியியலும் நிகழ்தகவும்

பயிற்சி 8.1

1. கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழுவைக் காண்க. (2M) APR-23, SEP-20

(i) $63, 89, 98, 125, 79, 108, 117, 68$

ஏறுவரிசையில் எழுத:

63,68,79,89,98,108,117,125

வீச்சு $= L - S = 125 - 63 = \mathbf{62}$

வீச்சுக் கெழு $= \frac{L-S}{L+S}$

$= \frac{125-63}{125+63} = \frac{62}{188}$

$= 0.3297 = \mathbf{0.33}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. கீழ்க்காணும் தரவுகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழுவைக் காண்க.(ii) $43.5, 13.6, 18.9, 38.4, 61.4, 29.8$ (2M)

எ.கா.8.1: கொடுக்கப்பட்ட தரவுப் புள்ளிகளுக்கு வீச்சு மற்றும் வீச்சுக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க: $25, 67, 48, 53, 18, 39, 44$.

அலகுப்பயிற்சி: 7. ஒரு புள்ளி விவரத்தின் வீச்சு மற்றும் வீச்சுக்கெழு முறையே 20 மற்றும் 0.2 எனில், விவரங்களின் மிகப்பெரிய மதிப்பு மற்றும் மிகச்சிறிய மதிப்புகளைக் காண்க.

2. ஒரு தரவின் வீச்சு மற்றும் மிகச் சிறிய மதிப்பு ஆகியன முறையே 36.8 மற்றும் 13.4 எனில், மிகப்பெரிய மதிப்பைக் காண்க? (2M)

$R = 36.8, \quad S = 13.4, \quad L = ?$

$R = L - S$

$R + S = L$

$L = 36.8 + 13.4 = \mathbf{50.2}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.3: ஒரு தரவின் வீச்சு 13.67 மற்றும் மிகப் பெரிய மதிப்பு 70.08 எனில் மிகச் சிறிய மதிப்பைக் காண்க. **(PTA-4)** (2M)

3. கொடுக்கப்பட்ட தரவின் வீச்சைக் காண்க. (2M)

வருமானம்	**400-450**	**450-500**	**500-550**	**550-600**	**600-650**
ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	**8**	**12**	**30**	**21**	**6**

கொடுக்கப்பட்டது:

வருமானம்	400-450	450-500	500-550	550-600	600-650
ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	8	12	30	21	6

$L = 650, S = 400, R = ?$

$R = L - S = 650 - 400 = \mathbf{250}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.2: கொடுக்கப்பட்ட பரவலின் வீச்சு காண்க. (2M)

வயது (வருடங்களில்)	16-18	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	0	4	6	8	2	2

5. 9 ஊழியர்களின் ஊதியம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஊதியங்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காண்க. ₹ 310, ₹ 290, ₹ 320, ₹ 280, ₹ 300, ₹ 290, ₹ 320, ₹ 310, ₹ 280. (5M)

$\bar{X} = \frac{310+290+320+280+300+290+320+310+280}{9} = \frac{2700}{9} = 300$

x_i	$d = (x_i - \bar{X})$ $(X_i - 300)$	d^2
280	-20	400
280	-20	400
290	-10	100
290	-10	100
300	0	0
310	10	100
310	10	100
320	20	400
320	20	400
	$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 2000$

$\sigma = \sqrt{\frac{2000}{9}}$

$= \sqrt{222.2}$

$= 14.91$

$\sigma^2 = 222.22$

∴ ஊதியங்களின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$= \mathbf{222.22}$

ஊதியங்களின் திட்ட விலக்கம்

$= \mathbf{14.91}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

4. ஓர் ஆசிரியர் மாணவர்களை, அவர்களின் செய்முறைப் பதிவேட்டின் 60 பக்கங்களை நிறைவு செய்து வருமாறு கூறினார். எட்டு மாணவர்கள் முறையே $32, 35, 37, 30, 33, 36, 35, 37$ பக்கங்கள் மட்டுமே நிறைவு செய்திருந்தனர். மாணவர்கள் நிறைவு செய்த பக்கங்களின் திட்டவிலக்கத்தைக் காண்க. (5M)

எ.கா.8.4: ஒரு வாரத்தின் ஒவ்வொரு நாளிலும் விற்கப்பட்ட தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு 13,8,4,9,7,12,10. இந்தத் தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க.

எ.கா.8.5: ஒரு குறிப்பிட்ட பருவத்தில் 6 நாட்களில் பெய்யும் மழையின் அளவானது 17.8 செ.மீ, 19.2 செ.மீ, 16.3 செ.மீ, 12.5 செ.மீ, 12.8 செ.மீ, 11.4 செ.மீ எனில், இந்த தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க.

எ.கா.8.6: ஒரு வகுப்புத் தேர்வில், 10 மாணவர்களின் மதிப்பெண்கள் $25, 29, 30, 33, 35, 37, 38, 40, 44, 48$ ஆகும். மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

எ.கா.8.7: ஒரு பள்ளி சுற்றுலாவில் குழந்தைகள் தின்பண்டங்கள் வாங்குவதற்காக செலவு செய்த தொகையானது முறையே $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$ ஆகும். படி விலக்க முறையை பயன்படுத்தி அவர்கள் செய்த செலவிற்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.

6. ஒரு சுவர் கடிகாரம் 1 மணிக்கு 1 முறையும், 2 மணிக்கு 2 முறையும், 3 மணிக்கு 3 முறையும் ஒலி எழுப்புகிறது எனில், ஒரு நாளில் அக்கடிகாரம் எவ்வளவு முறை ஒலி எழுப்பும்? மேலும் கடிகாரம் எழுப்பும் ஒலி எண்ணிக்கைகளின் திட்ட விலக்கம் காண்க. (5M)

ஒரு சுவர் கடிகாரம் 1 மணிக்கு 1 முறையும், 2 மணிக்கு 2 முறையும், 3 மணிக்கு 3 முறையும் ஒலி எழுப்புகிறது

இத்தொடரானது $(1 + 2 + 3 + 4 \ldots\ldots + 12)(1 + 2 + \cdots + 12)$

$$= \frac{12 \times 13}{2} = 78 \Rightarrow 78 \times 2 = 156$$

கடிகாரம் ஒரு நாளுக்கு **156** முறை ஒலி எழுப்புகிறது.

முதல் n இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம், $\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}, n = 12$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{12^2-1}{12}} = \sqrt{\frac{144-1}{12}} = \sqrt{\frac{143}{12}} = \sqrt{11.9} = 3.44$$

1 முதல் 12 மணி வரை கடிகாரம் எழுப்பும் ஒலி எண்ணிக்கையின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 3.44$

மீண்டும், 1 முதல் 12 மணி வரை கடிகாரம் எழுப்பும் ஒலி எண்ணிக்கையின் திட்ட விலக்கம் $\sigma = 3.44$

$\sigma = 3.44 \times 2 = 6.88$

∴ கடிகாரம் எழுப்பும் ஒலி எண்ணிக்கைகளின் திட்ட விலக்கம் $\boldsymbol{\sigma = 6.9}$

7. முதல் 21 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க. JUN-23, PTA-6

முதல் 21 இயல் எண்களின் திட்ட விலக்கம் (2M)

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}};\ n = 21$$

$$= \sqrt{\frac{(21)^2-1}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{441-1}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{440}{12}}$$

$$= \sqrt{36.67}$$

$$\sigma = 6.049$$

$$= \mathbf{6.05}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.10: முதல் n இயல் எண்களின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளைக் காண்க. (5M)

8. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் 4.5 ஆகும். அதில் இருக்கும் தரவுப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் 5-ஐ கழிக்க கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க. (2M)

தரவின் திட்ட விலக்கம் 4.5

தரவுப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் 5-ஐ கழிக்க கிடைக்கும் புதிய $\sigma = ?$

திட்ட விலக்கமானது, அதில் இருக்கும் தரவுப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் நிலையான மாறிலியை கூட்டும் போதோ அல்லது கழிக்கும் போதோ மாறாது.

புதிய $\boldsymbol{\sigma = 4.5}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.8: (2M)
கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க. $7, 4, 8, 10, 11.$ இதன் எல்லா மதிப்புகளுடனும் 3-யை கூட்டும்போது கிடைக்கும் புதிய தரவிற்கு திட்டவிலக்கம் காண்க.

9. **ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் 3.6 ஆகும். அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியையும் 3-ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் புதிய தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் காண்க.** (2M)

$\sigma = 3.6$

புதிய திட்ட விலக்கம் $\sigma = \frac{3.6}{3} = \mathbf{1.2}$,

புதிய விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$\sigma^2 = (1.2)^2 = \mathbf{1.44}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.9: கொடுக்கப்பட்ட தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க $2, 3, 5, 7, 8$. ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளியையும் 4-ஆல் பெருக்கினால் கிடைக்கும் புதிய தரவின் மதிப்பிற்கு திட்ட விலக்கம் காண்க. (2M)

13. **50 மாணவர்கள் 100 மீட்டர் தூரத்தை கடக்க எடுத்துக்கொண்ட கால அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் திட்ட விலக்கம் காண்க.** (PTA-5) (5M)

எடுத்துக்கொண்ட நேரம் (வினாடியில்)	8.5 -9.5	9.5 -10.5	10.5 -11.5	11.5 -12.5	12.5 -13.5
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	6	8	17	10	9

$A = 11, c = 1$

எடுத்துக்கொண்ட நேரம் (வினாடியில்)	மைய மதிப்பு x_i	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை f_i	$d = X_i - A$	d^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
8.5 - 9.5	9	6	-2	4	-12	24
9.5 - 10.5	10	8	-1	1	-8	8
10.5 - 11.5	11	17	0	0	0	0
11.5 - 12.5	12	10	1	1	10	10
12.5 - 13.5	13	9	2	4	18	36
		$N = 50$	$\Sigma d_i = 0$		$\Sigma f_i d_i = -8$	$\Sigma f_i d_i^2 = 78$

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$

$$= 1 \times \sqrt{\frac{78}{50} - \left(\frac{-8}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.56 - (-0.16)^2}$$

$$= \sqrt{1.56 - 0.0256}$$

$$= \sqrt{1.5344}$$

$$= 1.238$$

$$\boldsymbol{\sigma \cong 1.24}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

11. வைரஸ் காய்ச்சலைப் பற்றிய கருத்துக் கணிப்பில், பாதிக்கப்பட்ட மக்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தரவின் திட்ட விலக்கம் காண்க. (5M)

வயது (வருடங்களில்)	0 - 10	10 - 20	20 -30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
பாதிக்கப்பட்ட மக்களின் எண்ணிக்கை	3	5	16	18	12	7	4

12. ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்பட்ட தட்டுகளின் விட்ட அளவுகள் (செ.மீ-ல்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதன் திட்ட விலக்கம் காண்க.

விட்டங்கள் (செ.மீ)	21 - 24	25 - 28	29 - 32	33 - 36	37 - 40	41- 44
தட்டுகளின் எண்ணிக்கை	15	18	20	16	8	7

அலகுப்பயிற்சி: 2. ஒரு வடிவமைப்பில் வரையப்பட்ட வட்டங்களின் விட்ட அளவுகள் (மி.மீ-ல்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

விட்டங்கள்	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
வட்டங்களின் எண்ணிக்கை	15	17	21	22	25

திட்டவிலக்கத்தைக் கணக்கிடுக.

எ.கா.8.13: ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள், குறிப்பிட்ட பாடத்தில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க்கண்டவாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மதிப்பெண்கள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	8	12	17	14	9	7	4

இத்தரவிற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க.

10. **ஒரு வாரத்தில் ஐந்து மாவட்டங்களில் வெவ்வேறு இடங்களில் பெய்த மழையின் அளவானது பதிவு செய்யப்பட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள மழையளவின் தரவிற்கு திட்ட விலக்கம் காண்க.** 5M

மழையளவு (மி.மீ)	45	50	55	60	65	70
இடங்களின் எண்ணிக்கை	5	13	4	9	5	4

x	f_i	$d = x_i - A = x_i - 60$	d_i^2	$f_i d_i$	$f_i d_i^2$
45	5	-15	225	-75	1125
50	13	-10	100	-130	1300
55	4	-5	25	-20	100
60	9	0	0	0	0
65	5	5	25	25	125
70	4	10	100	40	400
	$N = 40$			$\Sigma f_i d_i = -160$	$\Sigma f_i d_i^2 = 3050$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{3050}{40} - \left(\frac{-160}{40}\right)^2}$$
$$= \sqrt{76.25 - (-4)^2}$$
$$= \sqrt{76.25 - 16}$$
$$= \sqrt{60.25}$$
$$= 7.76$$
$$\boldsymbol{\sigma \cong 7.76}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

எ.கா.8.11: ஒரு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் 48 மாணவர்கள் தொலைக்காட்சி பார்ப்பதற்காகச் செலவிட்ட நேரம் கேட்டறியப்பட்டது. அந்தத் தகவலின் அடிப்படையில், கீழ்க்காணும் தரவின் திட்டவிலக்கம் காண்க.

x	6	7	8	9	10	11	12
f	3	6	9	13	8	5	4

எ.கா.8.12: வகுப்புத் தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவர்களின் மதிப்பெண்ணிற்குத் திட்ட விலக்கம் காண்க. **(PTA-1)**

x	4	6	8	10	12
f	7	3	5	9	5

14. **100 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவில், அவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கமானது முறையே 60 மற்றும் 15 ஆகும். பின்னர் 45 மற்றும் 72 என்ற இரு மதிப்பெண்களுக்குப் பதிலாக முறையே 40 மற்றும் 27 என்று தவறாகப் பதிவு செய்யப்பட்டது தெரிய வந்தது. அவற்றைச் சரி செய்தால் கிடைக்கப்பெறும் புதிய தரவின் சராசரியும் திட்ட விலக்கமும் காண்க.** 5M

$n = 100,\ \bar{X} = 60,\ \sigma = 15$

$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} \Rightarrow 60 = \frac{\Sigma x}{100} \Rightarrow \Sigma x = 60 \times 100 = 6000$

தவறான தரவின் மதிப்பு $= 40 + 27 = 67$

சரியான தரவின் மதிப்பு $= 45 + 72 = 117$

மொத்த மதிப்பு $= 6000 - 67 + 117 = 6050$

புதிய தரவின் சராசரி $\bar{X} = \frac{6005}{100} = \mathbf{60.5}$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$

தவறான திட்டவிலக்கம்

$\sigma = 15 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{100} - (60)^2}$

$15^2 = \frac{\Sigma x^2}{100} - 3600$

$225 + 3600 = \frac{\Sigma x^2}{100}$

$3825 = \frac{\Sigma x^2}{100}$

தவறான $\Sigma x^2 = 382500$

சரியான $\Sigma x^2 = 382500 - 40^2 - 27^2 + 45^2 + 72^2$

$= 382500 - 1600 - 729 + 2025 + 5184$

சரியான $\Sigma x^2 = 387380$

சரியான $\sigma = \sqrt{\frac{387380}{100} - (60.5)^2}$

$= \sqrt{3873.8 - 3660.25} = \sqrt{213.55}$

$\boldsymbol{\sigma \cong 14.61}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.14: 15 தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் முறையே 10, 5 என கண்டறியப்பட்டுள்ளது. அதை சரிபார்க்கும்பொழுது, கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு தரவுப் புள்ளி 8 என தவறுதலாக குறிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் சரியான தரவுப்புள்ளி 23 என இருந்தால் சரியான தரவின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் காண்க. 5M

15. ஏழு தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி முறையே 8,16 ஆகும். அதில் ஐந்து தரவுப் புள்ளிகள் 2, 4, 10, 12 மற்றும் 14 எனில் மீதம் உள்ள இரு தரவுப் புள்ளிகளைக் கண்டறிக.

5M

ஏழு தரவுப் புள்ளிகளின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி முறையே $\overline{X} = 8$, $\sigma^2 = 16$

ஐந்து தரவுப் புள்ளிகள் 2,4,10,12, &14

X மற்றும் Y ஆகியன மீதமுள்ள இரு தரவுப் புள்ளிகள் என்க. சராசரி $= 8$

$$\frac{2+4+10+12+14+X+Y}{7} = 8$$

$$42 + x + y = 56$$

$$x + y = 56 - 42$$

$$x + y = 14 \text{.........}(1)$$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $= 16$,

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{X})^2 = 16$$

$$\frac{1}{7}(2^2 + 4^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 + x^2 + y^2) - (\text{சராசரி})^2 = 16$$

$$\frac{4+16+100+144+196+x^2+y^2}{7} - (8)^2 = 16$$

$$\frac{460+x^2+y^2}{7} - 64 = 16$$

$$\frac{460+x^2+y^2}{7} = 16 + 64$$

$$\frac{460+x^2+y^2}{7} = 80$$

$$460 + x^2 + y^2 = 80 \times 7$$

$$x^2 + y^2 = 560 - 460$$

$$x^2 + y^2 = 100 \text{ ....}(2)$$

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$$196 + (x - y)^2 = 2(100)$$

$$(x - y)^2 = 200 - 196$$

$$(x - y)^2 = 4$$

$$(x - y) = \pm 2$$

$x - y = 2$ எனில் $x + y = 14$ &

$x - y = 2 \Rightarrow x = 2 + y$

$$2 + y + y = 14$$

$$2 + 2y = 14$$

$$2y = 14 - 2$$

$$y = \frac{12}{2} = 6$$

$y = 6$ என $x - y = 2$ ல் பிரதியிட

$$x = 2 + 6$$

$$x = 8$$

$\therefore x = 8, y = 6$

$x - y = -2$ எனில், $x + y = 14$

$x = -2 + y \Rightarrow -2 + y + y = 14$

$$-2 + 2y = 14$$

$$2y = 14 + 2$$

$$y = \frac{16}{2} = 8$$

$y = 8$ என $x - y = -2$ ல் பிரதியிட

$$x = -2 + 8 = 6$$

$\therefore$ மீதம் உள்ள இரு தரவுப் புள்ளிகள் **6, 8**

தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்

1. 7 போட்டிகளில் ஒரு கிரிக்கெட் வீரர் எடுத்த ஓட்டங்கள் முறையே 70, 80, 60, 50, 40, 90, 95 திட்டவிலக்கம் காண்க.

SEP-20 5M

x_i	$d = x - A$ $d = x - 70$	$d = \frac{x-A}{C}$ $C = 5$	d^2
40	-30	-6	36
50	-20	-4	16
60	-10	-2	4
70	0	0	0
80	10	2	4
90	20	4	16
95	25	5	25
		$\sum d = -1$	$\sum d^2 = 101$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{101}{7} - \left(\frac{-1}{7}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{101}{7} - \frac{1}{49}} \times 5$$

$$= \sqrt{14.41} \times 5$$

$$= 3.8 \times 5 = 19$$

$\therefore \boldsymbol{\sigma \cong 19}$

2. 20 தரவுப் புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின் திட்டவிலக்கம் $\sqrt{6}$ ஆகும். ஒவ்வொரு தரவுப் புள்ளியும் 3-ஆல் பெருக்கப்பட்டால் கிடைக்கும். தரவுப் புள்ளிகளின் திட்டவிலக்கம் மற்றும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி காண்க.

2M PTA-1

திட்டவிலக்கம் $= \sqrt{6}$

புதிய திட்டவிலக்கம் $= 3 \times \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

விலக்க வா்க்கசராசரி $= (3\sqrt{6})^2 = 9 \times 6 = 54$

பயிற்சி 8.2

1. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் சராசரி ஆகியன முறையே 6.5 மற்றும் 12.5 எனில் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க. (2M)

$\sigma = 6.5,\ \bar{X} = 12.5,\ C.V = ?$

மாறுபாட்டுக் கெழு$= \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100\%$

$= \frac{6.5}{12.5} \times 100\%$

$= 0.52 \times 100\%$

$\boldsymbol{C.V = 52\%}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(2M) **எ.கா.8.15:** தரவின் சராசரியானது 25.6 மற்றும் அதன் மாறுபாட்டுக் கெழுவானது 18.75 எனில், அதன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க. **(PTA-3)**

2. ஒரு தரவின் திட்ட விலக்கம் மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு ஆகியன முறையே 1.2 மற்றும் 25.6 எனில் அதன் சராசரியைக் காண்க.

3. ஒரு தரவின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டுக் கெழு முறையே 15 & 48 எனில் அதன் திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.

5. $24, 26, 33, 37, 29, 31$ ஆகியவற்றின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க. (5M) JUN-23

$24, 26, 33, 37, 29, 31,\ C.V = ?$

$\bar{x} = \frac{24+26+33+37+29+31}{6} = \frac{180}{6} = 30$

x	$d = x - \bar{x}$ $d = x - 30$	d^2
24	-6	36
26	-4	16
33	3	9
37	7	49
29	-1	1
31	-1	1
		$\Sigma d^2 = 112$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{112}{6}} = \sqrt{18.66} = 4.3197$

$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100\% = \frac{4.3197}{30} \times 100\%$

$= \frac{431.9}{30} = 14.399$

$\boldsymbol{C.V = 14.4\%}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

4. $n = 5,\ \bar{x} = 6,\ \Sigma x^2 = 765$, எனில், மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க. (2M)

6. 8 மாணவர்கள் ஒரு நாளில் வீட்டுப் பாடத்தை முடிப்பதற்கு எடுத்துக் கொள்ளும் கால அளவுகள் (நிமிடங்களில்) பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 38,40,47,44,46,43,49,53 இத்தரவின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க. (5M)

8. ஒரு வகுப்பில் உள்ள 40 மாணவர்கள், கணிதம், அறிவியல் மற்றும் சமூக அறிவியல் ஆகிய மூன்று பாடங்களில் பெற்ற மதிப்பெண்களின் சராசரி மற்றும் திட்ட விலக்கம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

பாடங்கள்	சராசரி	திட்ட விலக்கம்
கணிதம்	56	12
அறிவியல்	65	14
சமூக அறிவியல்	60	10

இந்த மூன்று பாடங்களில் எது அதிக நிலைத் தன்மை கொண்டது மற்றும் எது குறைந்த நிலைத்தன்மை கொண்டது? (5M)

கணிதம்:

$n = 40,\ \bar{X} = 56,\ \sigma = 12$

$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100\% = \frac{12}{56} \times 100\%$

$= \frac{1200}{56}\% = \boldsymbol{21.42}\%$

அறிவியல்:

$\bar{X} = 65, \sigma = 14,\ C.V = \frac{14}{65} \times 100\%$

$= \frac{1400}{65}\% = \boldsymbol{21.53}\%$

சமூக அறிவியல்: $\bar{X} = 60, \sigma = 10$

$C.V = \frac{10}{60} \times 100\%$

$= \frac{1000}{60}\% = \boldsymbol{16.66}\%$

சமூக அறிவியல் பாடம் அதிக நிலைத் தன்மை கொண்டது மற்றும் **அறிவியல் பாடம்** குறைந்த நிலைத் தன்மை கொண்டது.

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

(5M)

7. சத்யா மற்றும் வித்யா இருவரும் 5 பாடங்களில் பெற்ற மொத்த மதிப்பெண்கள் முறையே 460 மற்றும் 480 ஆகும். மேலும் அதன் திட்ட விலக்கங்கள் முறையே 4.6 மற்றும் 2.4 எனில், யாருடைய செயல்திறன் மிகுந்த நிலைத் தன்மை கொண்டது?

எ.கா.8.16: பின்வரும் அட்டவணையில் ஒரு பள்ளியின் பத்தாம் வகுப்பு மாணவர்களின் உயரம் மற்றும் எடைகளின் சராசரி மற்றும் விலக்க வர்க்க சராசரி ஆகிய மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. **(PTA-5)**

	உயரம்	எடை
சராசரி	155செ.மீ	46.50கி.கி
விரக்க வர்க்கச் சராசரி	72.25செ.மீ^{2}	28.09கி.கி^{2}

இவற்றில் எது அதிக நிலைப்புத் தன்மை உடையது?

தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்

1. இரண்டு நகரங்கள் A மற்றும் B-யின் குளிர் காலத்தில் நிலவும் வெப்பநிலை அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நகரம் A-ன் வெப்பநிலை (டிகிரி செல்சியஸ்)	**18**	**20**	**22**	**24**	**26**
நகரம் B-ன் வெப்பநிலை (டிகிரி செல்சியஸ்)	**11**	**14**	**15**	**17**	**18**

PTA-2 5M

எந்த நகரமானது வெப்பநிலை மாறுபாடுகளில் அதிகமான நிலைத்தன்மை கொண்டது?

நகரம் A

$\bar{X} = \frac{18+20+22+24+26}{5} = \frac{110}{5} = 22$

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	-4	16
20	-2	4
22	0	0
24	2	4
26	4	16
		$\Sigma d^2 = 40$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} \simeq 2.8$

$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100\%$

$= \frac{2.8}{22} \times 100\%$

$= \frac{280}{22} = 12.7\%$

$\boldsymbol{C.V = 12.7\%}$

நகரம் B

$\bar{X} = \frac{11+14+15+17+18}{5} = 15$

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
11	-4	16
14	-1	1
15	0	0
17	2	4
18	3	9
		$\Sigma d^2 = 30$

$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} = \sqrt{\frac{30}{5}} = \sqrt{6}$

$\simeq 2.4$

$= \frac{2.4}{15} \times 100\%$

$= \frac{240.0}{15} = 16\%$

$\boldsymbol{C.V = 16\%}$

நகரம் A ஆனது வெப்பநிலை மாறுபாடுகளில் அதிகமான நிலைத்தன்மை கொண்டது.

2. $\boldsymbol{18, 20, 15, 12, 25}$ ஆகியவற்றின் மாறுபாட்டுக் கெழுவைக் காண்க.

5M PTA-3

$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

$\bar{x} = \frac{18+20+15+12+25}{5} = \frac{90}{5} = 18$

x	$d = x - \bar{x}$	d^2
18	0	0
20	2	4
15	-3	9
12	-6	36
25	7	49
		$\sum d^2 = 98$

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{98}{5}} = \sqrt{19.6}$

$= 4.427$

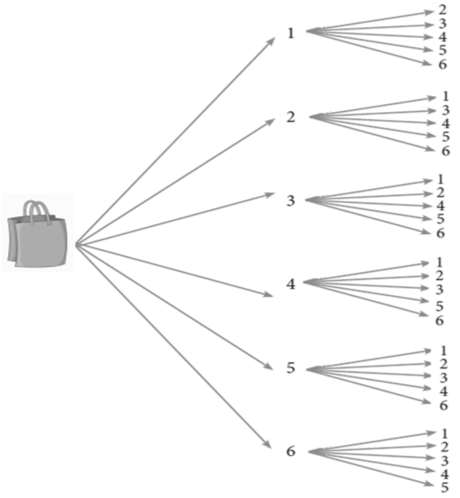
$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$= \frac{4.427}{18} \times 100\% = \frac{442.7}{18}\% = \mathbf{24.59}\,\%$

பயிற்சி 8.3

2. ஒரு பையிலுள்ள 1 முதல் 6 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட 6 பந்துகளிலிருந்து, ஒரே நேரத்தில் இரண்டு பந்துகள் எடுப்பதற்கான கூறுவெளியை மர வரைபடம் மூலமாகக் குறிப்பிடுக. 2M PTA-4

ஒரு பையிலுள்ள 1 முதல் 6 வரை எண்கள் குறிக்கப்பட்ட பந்துகளிலிருந்து, இரண்டு பந்துகள் எடுப்பதற்கான கூறுவெளியை குறிக்கும் மர வரைபடம்



கூறுவெளி ,

$$S = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$
$$(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$$
$$(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

1. மூன்று நாணயங்கள் சுண்டப்படும்பொழுது கிடைக்கும் கூறுவெளியை மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி எழுதுக. 2M
எ.கா.8.17: மர வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது கிடைக்கும் கூறுவெளியை எழுதுக.

3. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் ஒரு நிகழ்ச்சி A என்க. இங்கு $P(A):P(\bar{A}) = 17:15$ மற்றும் $n(S) = 640$ எனில், (i) $P(\bar{A})$ (ii) $n(A)$-ஐக் காண்க. 5M PTA-3

$P(A):P(\bar{A}) = 17:15, n(S) = 640$

(i) $P(\bar{A}) = ?$

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{17}{15}$$

$$\frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{17}{15}$$

$$15P(A) = 17(1-P(A))$$

$$15P(A) = 17 - 17P(A)$$

$$15P(A) + 17P(A) = 17$$

$$32P(A) = 17$$

$$P(A) = \frac{17}{32};$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{17}{32} = \frac{32-17}{32} = \mathbf{\frac{15}{32}}$$

(ii) $n(A)$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \times n(S) = n(A)$$

$$n(A) = \frac{17}{32} \times 640$$

$$n(A) = \mathbf{340}$$

5. ஒரு பொது விழாவில் 1 முதல் 1000 வரை எண்களிட்ட அட்டைகள் ஒரு பெட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. விளையாடும் ஒவ்வொருவரும் ஒரு அட்டையைச் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கிறார்கள். எடுத்த அட்டை திரும்ப வைக்கப்படவில்லை. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அட்டையில் எண் 500-ஐ விட அதிகமாக உள்ள வர்க்க எண் இருந்தால், அவர் வெற்றிக்கான பரிசைப் பெறுவார். (i) முதலில் விளையாடுபவர் பரிசு பெற (ii) முதலாமவர் வெற்றி பெற்ற பிறகு, இரண்டாவதாக விளையாடுபவர் வெற்றி பெற ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (5M)

1 முதல் 1000 வரை எண்களிட்ட அட்டைகள் ஒரு பெட்டியில் வைக்கப்பட்டுள்ளன. $n(S) = 1000$

(i) A என்பது 500-ஐ விட அதிகமாக உள்ள வர்க்க எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$A = \{529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961\}$$

$$n(A) = 9$$

∴ முதலில் விளையாடுபவர் பரிசு பெற நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \mathbf{\frac{9}{1000}}$$

(ii) B என்பது இரண்டாவதாக விளையாடுபவர் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

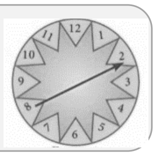
$$n(B) = 8, n(S) = 999$$

∴ இரண்டாவதாக விளையாடுபவர் வெற்றி பெற நிகழ்தகவு

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \mathbf{\frac{8}{999}}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.24: படத்தில் காட்டியுள்ள அம்புக்குறி சுழற்றும் விளையாட்டில் 1, 2, 3, …. 12 என்ற எண்கள் சமவாய்ப்பு முறையில் கிடைக்க வாய்ப்புள்ளது. அம்புக்குறியானது (i) 7 (ii) பகா எண் (iii) பகு எண் ஆகியவற்றில் நிற்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டறிக. (5M)



7. இரண்டு சீரான பகடைகள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படுகின்றன. APR-23, SEP-20, JUL-22
(i) இரண்டு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்பு கிடைக்க
(ii) முக மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலன் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க (5M)
(iii) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் பகா எண்ணாகக் கிடைக்க
(iv) முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 1-ஆக இருக்க ஆகிய நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

இரண்டு சீரான பகடைகள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படும்போது, கிடைக்கும் கூறுவெளி

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$n(S) = 36$$

(i) A என்பது இரண்டு பகடைகளிலும் ஒரே முக மதிப்பு கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$n(A) = 6,$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(ii) B என்பது முக மதிப்புகளின் பெருக்கற்பலன் பகா எண்ணாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (3,1), (5,1)\}$$

$$n(B) = 6$$

$$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(iii) C என்பது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் பகா எண்ணாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$C = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5)\}$$

$$n(C) = 15$$

$$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \mathbf{\frac{5}{12}}$$

(iv) D என்பது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 1-ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க

$$D = \{\ \}$$

$$n(D) = 0$$

$$\therefore P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{0}{36} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \boldsymbol{P(D) = 0}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.19: இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. கிடைக்கப்பெறும் முக மதிப்புகளின் கூடுதல் (i) 4-க்குச் சமமாக (ii) 10-ஐ விடப் பெரிதாக (iii) 13-ஐ விடக் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க. **(SEP-21)** 5M

எ.கா.8.22: ஒரு பகடை உருட்டப்படும் அதே நேரத்தில் ஒரு நாணயமும் சுண்டப்படுகிறது. பகடையில் ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கும், நாணயத்தில் தலைக் கிடைப்பதற்குமான நிகழ்தகவைக் காண்க. **(JUN-23, SEP-21)** 2M

8. மூன்று சீரான நாணயங்கள் முறையாக ஒரே நேரத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. 5M
(i) அனைத்தும் தலையாகக் கிடைக்க PTA-5 **(ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ கிடைக்க** PTA-5
(iii) அதிகபட்சம் ஒரு தலை கிடைக்க (iv) அதிகபட்சம் இரண்டு பூக்கள் கிடைக்க
ஆகியவற்றிற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

மூன்று சீரான நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன.

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH\}$

$n(S) = 8.$

i) A என்பது அனைத்தும் தலையாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $A = \{HHH\}; n(A) = 1$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

ii) B என்பது குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$B = \{HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH\}$

$n(B) = 7 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \mathbf{\frac{7}{8}}$

iii) C என்பது அதிகபட்சம் ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$C = \{HTT, TTH, THT, TTT\}$

$n(C) = 4$

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

iv) D என்பது அதிகபட்சம் இரண்டு பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$D = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTH, THT, THH\}$

$n(D) = 7 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \mathbf{\frac{7}{8}}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

4. ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. இரண்டு அடுத்தடுத்த பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? 2M

13. ஒரு விளையாட்டிற்கான, நுழைவுக் கட்டணம் ₹150. அந்த விளையாட்டில் ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. தனா, ஒரு நுழைவுச் சீட்டு வாங்கினாள். அவ்விளையாட்டில் ஒன்று அல்லது இரண்டு தலைகள் விழுந்தால் அவள் செலுத்திய நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பக் கிடைத்துவிடும். மூன்று தலைகள் கிடைத்தால் அவளது நுழைவுக் கட்டணம் இரண்டு மடங்காகக் கிடைக்கும். இல்லையென்றால் அவளுக்கு எந்தக் கட்டணமும் திரும்பக் கிடைக்காது. இவ்வாறெனில், (i) இரண்டு மடங்காக (ii) நுழைவுக் கட்டணம் திரும்பப்பெற (iii) நுழைவுக் கட்டணத்தை இழப்பதற்கு, ஆகிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. 5M

எ.கா.8.20: இரண்டு நாணயங்கள் ஒன்றாகச் சுண்டப்படுகின்றன. இரண்டு நாணயங்களிலும் வெவ்வேறு முகங்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? **(MAY-22)** 2M

9. ஒரு பையில் 5 சிவப்பு நிறப் பந்துகளும், 6 வெள்ளை நிறப் பந்துகளும், 7 பச்சை நிறப்பந்துகளும் 8 கருப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அந்தப் பந்து (i) வெள்ளை (ii) கருப்பு அல்லது சிவப்பு (iii) வெள்ளையாக இல்லாமல் (iv) வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. JUL-22 5M

$n(R) = 5, \quad n(W) = 6, \quad n(G) = 7, \quad n(B) = 8 \Rightarrow n(S) = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$

i) A என்பது வெள்ளை பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{26} = \mathbf{\frac{3}{13}}$

ii) B & R என்பன முறையே கருப்பு மற்றும் சிவப்பு பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$P(B) = \frac{8}{26}, \quad P(R) = \frac{5}{26} \Rightarrow P(B \cup R) = P(B) + P(R) = \frac{8}{26} + \frac{5}{26} = \frac{13}{26} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

iii) $\bar{A}$ என்பது வெள்ளை அல்லாத பந்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $P(A) = \frac{3}{13} \Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{13} = \frac{13-3}{13} = \mathbf{\frac{10}{13}}$

iv) C என்பது பந்தானது, வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$n(C) = 26 - (6 + 8) = 26 - 14 = \mathbf{12}$

$P(\text{வெள்ளையாகவும், கருப்பாகவும் இல்லாமல் இருப்பதற்கான}) = P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{12}{26} = \mathbf{\frac{6}{13}}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

6. ஒரு பையில் 12 நீல நிறப்பந்துகளும், x சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. (i) அது சிவப்பு நிறப்பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க (ii) 8 புதிய சிவப்பு நிறப்பந்துகள் அப்பையில் வைத்த பின்னர், ஒரு சிவப்பு நிறப்பந்தை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவானது (i)-யில் பெறப்பட்ட நிகழ்தகவைப் போல இருமடங்கு எனில், x-ன் மதிப்பினைக் காண்க. (5M) (5M)

எ.கா.8.18: ஒரு பையில் 5 நீல நிறப்பந்துகளும், 4 பச்சை நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்படும் பந்தானது (i) நீலமாக (ii) நீலமாக இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

எ.கா.8.23: ஒரு பையில் 6 பச்சை நிறப்பந்துகளும், சில கருப்பு மற்றும் சிவப்பு நிறப்பந்துகளும் உள்ளன. கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை, சிவப்பு பந்துகளைப் போல் இருமடங்காகும். பச்சை பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு சிவப்பு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைப் போல் மூன்று மடங்காகும். இவ்வாறெனில், (i) கருப்பு பந்துகளின் எண்ணிக்கை (ii) மொத்தப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை ஆகியவற்றைக் காண்க. (5M)

அலகுப்பயிற்சி: 10. ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் சில கருப்பு பந்துகள் உள்ளன. பையிலிருந்து கருப்பு பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது வெள்ளைப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைப்போல் இரு மடங்கு எனில், கருப்புப் பந்துகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (2M)

10. ஒரு பெட்டியில் 20 குறைபாடில்லாத விளக்குகளும் ஒரு சில குறைபாடுடைய விளக்குகளும் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு விளக்கானது குறைபாடுடையதாக இருப்பதற்கான வாய்ப்பு $\frac{3}{8}$ எனில், குறைபாடுடைய விளக்குகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க. (2M)

ஒரு பெட்டியில் n(குறைபாடில்லாத விளக்குகள்)$= 20$

n(குறைபாடுடைய விளக்குகள்) $= x$

$$P(D) = \frac{3}{8}; n(D) = ? \Rightarrow P(\bar{D}) = 1 - \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{8-3}{8} = \frac{5}{8}$$

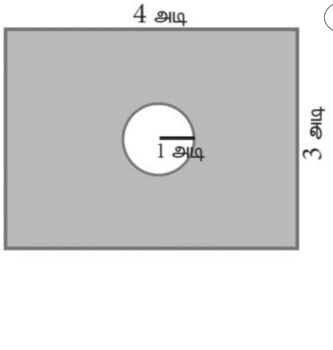
P(குறைபாடில்லாத விளக்குகள்) $= \frac{20}{x+20} \Rightarrow \frac{20}{x+20} = \frac{5}{8}$

$$\Rightarrow 5x + 100 = 160$$

$$5x = 160 - 100 \Rightarrow 5x = 60 \Rightarrow x = 12$$

∴ குறைபாடுடைய விளக்குகளின் எண்ணிக்கை $= \mathbf{12}$

11. மாணவர்கள் விளையாடும் ஒரு விளையாட்டில் அவர்களால் எறியப்படும் கல்லானது வட்டப்பரிதிக்குள் விழுந்தால் அதைத் வெற்றியாகவும், வட்டப்பரிதிக்கு வெளியே செவ்வகத்திற்குள் விழுந்தால் அதை தோல்வியாகவும் கருதப்படுகிறது. விளையாட்டில் வெற்றி கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? ($\pi = 3.14$) (5M)



செவ்வகத்தின் பரப்பு $(l \times b) = 4 \times 3 = 12$ அடி

$n(S) = 12$ அடி

A என்பது விளையாட்டில் வெற்றி கொள்வதற்கான நிகழ்ச்சி என்க

$n(A) =$ வட்டப்பரிதி

$ie\ n(A) = \pi r^2 \Rightarrow r = 1$ அடி

$\Rightarrow \pi \times 1^2 = \pi$

∴விளையாட்டில் வெற்றி கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{3.14}{12} = \frac{3.14 \times 100}{12 \times 100} = \frac{314}{1200} = \mathbf{\frac{157}{600}}$$

12. இரண்டு நுகர்வோர்கள், பிரியா மற்றும் அமுதன் ஒரு குறிப்பிட்ட அங்காடிக்கு, குறிப்பிட்ட வாரத்தில் (திங்கள் முதல் சனி வரை) செல்கிறார்கள். அவர்கள் அங்காடிக்குச் சமவாய்ப்பு முறையில் ஒவ்வொரு நாளும் செல்கிறார்கள். இருவரும் அங்காடிக்கு, (1) ஒரே நாளில் (2) வெவ்வேறு நாட்களில் (3) அடுத்தடுத்த நாட்களில் செல்வதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. (5M)

$S = \{$ (திங்கள், திங்கள்), (திங்கள், செவ்வாய்), (திங்கள், புதன்), (திங்கள், வியாழன்), (திங்கள், வெள்ளி), (திங்கள், சனி), (செவ்வாய்,செவ்வாய்), (செவ்வாய், திங்கள்), (செவ்வாய், புதன்), (செவ்வாய், வியாழன்), (செவ்வாய், வெள்ளி), (செவ்வாய், சனி), (புதன், புதன்), (புதன், திங்கள்), (புதன், செவ்வாய்),(புதன், வியாழன்), (புதன், வெள்ளி), (புதன், சனி), (வியாழன், வியாழன்), (வியாழன், திங்கள்), (வியாழன், செவ்வாய்), (வியாழன்,புதன்), (வியாழன், வெள்ளி), (வியாழன், சனி), (வெள்ளி, வெள்ளி), (வெள்ளி, திங்கள்), (வெள்ளி, செவ்வாய்), (வெள்ளி, புதன்), (வெள்ளி, வியாழன்), (வெள்ளி, சனி), (சனி, சனி), (சனி, திங்கள்), (சனி, செவ்வாய்), (சனி, புதன்), (சனி, வியாழன்), (சனி, வெள்ளி)$\}$

$n(S) = 36$

(1) A என்பது இருவரும் ஒரே நாளில் அங்காடிக்கு செல்லும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{$(திங்கள், திங்கள்), (செவ்வாய்,செவ்வாய்), (புதன், புதன்), (வியாழன், வியாழன்), (வெள்ளி, வெள்ளி), (சனி, சனி)$\}$ $n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \mathbf{\frac{1}{6}}$

(2) B என்பது இருவரும் வெவ்வேறு நாட்களில் அங்காடிக்கு செல்லும் நிகழ்ச்சி என்க.

$B = \{$ (திங்கள், செவ்வாய்), (திங்கள், புதன்), (திங்கள், வியாழன்), (திங்கள், வெள்ளி), (திங்கள், சனி), (செவ்வாய், திங்கள்), (செவ்வாய், புதன்), (செவ்வாய், வியாழன்), (செவ்வாய், வெள்ளி), (செவ்வாய், சனி), (புதன், திங்கள்), (புதன், செவ்வாய்), (புதன், வியாழன்), (புதன், வெள்ளி), (புதன், சனி), (வியாழன், திங்கள்), (வியாழன், செவ்வாய்), (வியாழன்,புதன்), (வியாழன், வெள்ளி), (வியாழன், சனி), (வெள்ளி, திங்கள்), (வெள்ளி, செவ்வாய்), (வெள்ளி, புதன்), (வெள்ளி, வியாழன்), (வெள்ளி, சனி), (சனி, திங்கள்), (சனி, செவ்வாய்), (சனி, புதன்), (சனி, வியாழன்), (சனி, வெள்ளி)$\}$ $n(B) = 30 \Rightarrow P(B) = \frac{30}{36} = \mathbf{\frac{5}{6}}$

(3) C என்பது அடுத்தடுத்த நாட்களில் இருவரும் அங்காடிக்கு செல்லும் நிகழ்ச்சி என்க.

$C = \{$ (திங்கள், செவ்வாய்), (செவ்வாய், புதன்), (புதன், வியாழன்), (வியாழன், வெள்ளி), (வெள்ளி, சனி)$\}$ $n(C) = 5 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \mathbf{\frac{5}{36}}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.21: ஒரு நெட்டாண்டில் (leap year) 53 சனிக்கிழமைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? (குறிப்பு: $366 = 52 \times 7 + 2$) (2M)

தயாரிக்கப்பட்ட வினாக்கள்

1. நீல நிறம் மற்றும் சாம்பல் நிறம் கொண்ட இரு பகடைகள் ஒரே நேரத்தில் உருட்டப்படுகிறன்றன. இதன் அனைத்து விளைவுகளையும் எழுதுக. பகடைகளின் மீது விழும் எண்களின் கூடுதல் கீழ்வருமாறு கிடைக்க நிகழ்தகவு என்ன? (i) 8 (ii) 13 (iii) 12-க்குச் சமமாகவும் அதை விட குறைவாகவும் (5M) MDL

கூறுவெளி $= 6 \times 6 = 36$

$n(S) = 36$

(i) 2 பகடைகளின் கூடுதல் 8

A என்பது 2 பகடைகளின் கூடுதல் 8 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

$n(A) = 5$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}$

(ii) 2 பகடைகளின் கூடுதல் 13

B என்பது 2 பகடைகளின் கூடுதல் 13 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $B = \{\}$, $n(B) = 0$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{0}{36} = 0$

(iii) 12-க்குச் சமமாகவும் அதை விட குறைவாகவும்

C என்பது 2 பகடைகளின் கூடுதல் 12 க்குச் சமமாகவும் அதை விட குறைவாகவும் இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $C = \{(1,1) \dots (6,6)\}$, $n(C) = 36$

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{36}{36} = 1$

பயிற்சி 8.4

1. $\boldsymbol{P(A)=\frac{2}{3}, P(B)=\frac{2}{5}, P(A\cup B)=\frac{1}{3}}$ **எனில், $\boldsymbol{P(A\cap B)}$ காண்க.** PTA-1 5M

$P(A)=\frac{2}{3}, P(B)=\frac{2}{5}, P(A\cup B)=\frac{1}{3}, P(A\cap B)=?$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5+6}{15}=\mathbf{\frac{11}{15}}$

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.
>
> **எ.கா.8.25:** $P(A)=0.37,\ P(B)=0.42,\ P(A\cap B)=0.09$ எனில் $P(A\cup B)$ ஐக் காண்க. 2M

3. ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் $\boldsymbol{A, B}$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். மேலும் $\boldsymbol{P(A}$ இல்லை$\boldsymbol{)=0.45}$, $\boldsymbol{P(A\cup B)=0.65}$, எனில் $\boldsymbol{P(B)}$-ஐக் காண்க. 5M PTA-2

$P(A$ இல்லை$)=0.45=P(\bar{A})$,

$P(A\cup B)=0.65, P(B)=?$

$P(A)=1-P(A$ இல்லை$)$

$=1-0.45$

$=0.55$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$0.65=0.55+P(B)$

$0.65-0.55=P(B)$

$0.10=P(B)$

$\therefore \mathbf{P(B)=0.1}$

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 5M
>
> 2. A மற்றும் B ஆகியவை இரு நிகழ்ச்சிகள், மேலும், $P(A)=0.42, P(B)=0.48$, மற்றும் $P(A\cap B)=0.16$ எனில் (i) $P(A$ இல்லை$)$ (ii) $P(B$ இல்லை$)$ (iii) $P(A$அல்லது $B)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.
> 4. A மற்றும் B-யில், குறைந்தது ஏதாவது ஒன்று நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.6. A மற்றும் B ஒரே நேரத்தில் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 எனில், $P(\bar{A})+P(\bar{B})$-ஐக் காண்க.
> 5. நிகழ்ச்சி A-க்கான நிகழ்தகவு 0.5 மற்றும் B-க்கான நிகழ்தகவு 0.3. A மற்றும் B ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில், A-ம், B-ம் நிகழாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
>
> **எ.கா. 8.28:** A & B ஆகியவை $P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{2}$ மற்றும் $P(A$ மற்றும் $B)=\frac{1}{8}$ என இருக்குமாறு அமையும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் எனில், பின்வருவனவற்றைக் காண்க. (i) $P(A$ அல்லது $B)$ (ii) $P($ A-ம் இல்லை மற்றும் B-ம் இல்லை$)$.

6. இரண்டு பகடைகள் ஒரு முறை உருட்டப்படுகின்றன. முதல் பகடையில் முக மதிப்பு இரட்டைப் படை எண் அல்லது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 8 ஆகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. 5M

இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்பட்டால் கூறுவெளி, JUN-23

$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$
$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$n(S)=36$

i) A என்பது முதல் பகடையில் இரட்டை எண் வருவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$
$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$n(A)=18 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{18}{36}$

ii) B என்பது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 8 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$B=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,

$n(B)=5$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{5}{36}$

$A\cap B=\{(2,6),(4,4),(6,2)\}, n(A\cap B)=3$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{3}{36}$

$[\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$

$P(A\cup B)=\frac{18}{36}+\frac{5}{36}-\frac{3}{36}$

$=\frac{23-3}{36}$

$=\frac{20}{36}=\mathbf{\frac{5}{9}}$

> **இது போன்ற கணக்குகள்**
> சுயமாக பயிற்சி செய்யவும். 5M
>
> **எ.கா.8.27:** இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படுகின்றன. இரண்டு முக மதிப்புகளும் சமமாக இருக்க அல்லது முக மதிப்புகளின் கூடுதல் 4 ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.
>
> **அலகுப்பயிற்சி: 8.** இரண்டு முறையான பகடைகள் உருட்டப்படும் பொழுது, முக மதிப்புகளின் பெருக்கல் 6 ஆகவோ அல்லது முக மதிப்புகளின் வித்தியாசம் 5 ஆகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

7. ஒரு பெட்டியில் $3, 5, 7, 9, \ldots 35, 37$ என்ற எண்கள் குறிக்கப்பட்ட சீட்டுகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் ஒரு சீட்டு ஆனது 7-ன் மடங்காக அல்லது பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

5M

ஒரு பெட்டியில் உள்ள சீட்டுகளில் குறிக்கப்பட்ட எண்கள்

$$S = \{3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37\}, \ \therefore n(S) = 18$$

i) A என்பது 7-ன் மடங்காக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{7,21,35\}, \ n(A) = 3$

$\therefore P(A) = \mathbf{\frac{3}{18}}$

ii) B என்பது பகா எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$B = \{3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37\}$

$n(B) = 11$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} \quad = \frac{11}{18}$

$A \cap B = \{7\}, \ n(A \cap B) = 1, \ P(A \cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{1}{18}$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{3}{18} + \frac{11}{18} - \frac{1}{18} \ = \mathbf{\frac{13}{18}}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

5M

எ.கா.8.26: ஒரு கூடையிலுள்ள 80 மஞ்சள், 70 சிவப்பு மற்றும் 50 வெள்ளை பூக்களிலிருந்து சம வாய்ப்பு முறையில் ஒரு பூ தேர்ந்தெடுக்கப்படும் போது அது மஞ்சள் அல்லது சிவப்பு நிறப் பூவாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன?

எ.கா.8.29: ஒரு குடியிருப்பில் 1 முதல் 100 வரை உள்ள கதவு எண் கொண்ட வீடுகளிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது அந்த வீட்டின் கதவு எண், ஓர் இரட்டை எண் அல்லது முழு வர்க்க எண் அல்லது முழு கண எண்ணாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

9. ஒருவருக்கு மின்சார ஒப்பந்தம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$ மற்றும் குழாய்கள் பொருத்துவதற்கான ஒப்பந்தம் கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{8}$ ஆகும். மேலும் குறைந்தபட்சம் ஏதாவது ஒரு ஒப்பந்தம் கிடைக்கப்பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{7}$ எனில், இரண்டு ஒப்பந்தங்களும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

5M

ஒருவருக்கு மின்சார ஒப்பந்தம் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{3}{5}$, $\quad P(A) = \frac{3}{5}$

குழாய்கள் பொருத்துவதற்கான ஒப்பந்தம் கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{8}$, $P(\bar{B}) = \frac{5}{8}$

குறைந்தபட்சம் ஏதாவது ஒரு ஒப்பந்தம் கிடைக்கப்பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{5}{7}$.

$P(A \cup B) = \frac{5}{7}; P(A \cap B) = ?$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{8-5}{8} = \frac{3}{8}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{5}{7} = \frac{3}{5} + \frac{3}{8} - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{3}{8} - \frac{5}{7} \ = \frac{(56\times3)+(35\times3)-(40\times5)}{280} = \frac{168+105-200}{280} \ = \frac{273-200}{280}$

$P(A \cap B) = \mathbf{\frac{73}{280}}$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

எ.கா.8.30: 50 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், 28 பேர் NCC-யிலும், 30 பேர் NSS-லும் மற்றும் 18 பேர் NCC மற்றும் NSS-லும் சேர்கிறார்கள். ஒரு மாணவர் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவர் **5M**

(i) NCC-யில் இருந்து, ஆனால் NSS-ல் இல்லாமல் (ii) NSS-ல் இருந்து, ஆனால் NCC-யில் இல்லாமல்

(iii) ஒன்றே ஒன்றில் மட்டும் சேர்ந்து இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. **(PTA-1,4, MAY-22)**

எ.கா.8.31: A மற்றும் B ஆகிய இரு விண்ணப்பதாரர்கள் IIT-யில் சேர்வதற்காகக் காத்திருப்பவர்கள். இவர்களில் A தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5, A மற்றும் B இருவரும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.3 எனில், B தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான அதிகபட்ச நிகழ்தகவு 0.8 என நிரூபிக்க. **(APR-23, PTA-6)**

அலகுப்பயிற்சி: 11. ஒரு மாணவன் இறுதித் தேர்வில் ஆங்கிலம் மற்றும் தமிழில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.5 ஒன்றிலும் தேர்ச்சி அடையாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.1ஆங்கிலத் தேர்வில் தேர்ச்சி அடைவதற்கான நிகழ்தகவு 0.75 எனில், தமிழ் தேர்வில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

10. 8000 மக்கள்தொகை கொண்ட ஒரு நகரத்தில், 1300 பேர் 50 வயதிற்கு மேற்பட்டவர்கள் மற்றும் 3000 பேர் பெண்கள். மேலும் 50 வயதிற்கு மேற்பட்ட பெண்கள் 30% உள்ளனர் எனவும் தெரியவருகிறது. தேர்ந்தெடுக்கப்படும் ஒரு நபர், பெண்ணாக அல்லது 50 வயதிற்கு மேற்பட்டவராக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. **5M**

$n(S) = 8000$

A என்பது பெண்களை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3000}{8000} = \frac{30}{80}$

B என்பது 50 வயதிற்கும் மேற்பட்டவரை தோ்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$n(B) = 1300$

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1300}{8000} = \frac{13}{80}$

$P(A \cap B) = P($பெண்ணாக அல்லது 50 வயதிற்கு மேற்பட்டவராக இருப்பதற்கான $)$

$= \frac{30\% \; of \; 3000}{8000}$

$= \frac{\frac{30}{100} \times 3000}{8000}$

$= \frac{900}{8000}$

$= \frac{9}{80}$

$\therefore$ தேவையான நிகழ்தகவு

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{30}{80} + \frac{13}{80} - \frac{9}{80}$$

$$= \frac{30+13-9}{80}$$

$$= \frac{43-9}{80}$$

$$= \frac{34}{80}$$

$$P(A \cup B) = \mathbf{\frac{17}{40}}$$

11. ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. சரியாக இரண்டு தலைகள் அல்லது குறைந்தபட்சம் ஒரு பூ அல்லது அடுத்தடுத்து இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. 5M PTA-2,6

ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது.

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

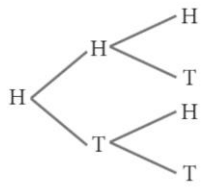
$n(S) = 8$

(i) A என்பது சரியாக இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{HHT, HTH, THH\}$

$n(A) = 3$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

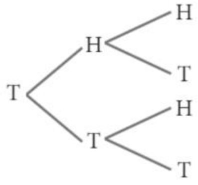


(ii) B என்பது குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$B = \{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$n(B) = 7$

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}$



(iii) C என்பது அடுத்தடுத்து இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$C = \{HHH, HHT, THH\}$

$n(C) = 3$

$\therefore P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

$A \cap B = \{HHT, HTH, THH\}$

$n(A \cap B) = 3,\ \ P(A \cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

$B \cap C = \{HHT, THH\},\ n(B \cap C) = 2$

$\therefore P(B \cap C) = \frac{n(B\cap C)}{n(S)} = \frac{2}{8}$

$A \cap C = \{HHT, THH\},\ n(A \cap C) = 2$

$P(A \cap C) = \frac{n(A\cap C)}{n(S)} = \frac{2}{8}$

$A \cap B \cap C = \{HHT, THH\}$

$n(A \cap B \cap C) = 2,$

$P(A \cap B \cap C) = \frac{n(A\cap B\cap C)}{n(S)} = \frac{2}{8}$

இது போன்ற கணக்குகள் சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

8. சீரான மூன்று நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. அதிகபட்சம் 2 பூக்கள் அல்லது குறைந்தபட்சம் 2 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. 5M

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} - \frac{2}{8} - \frac{2}{8} + \frac{2}{8}$

$= \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{2}{8}$

$= \frac{3}{8} + \frac{7}{8} - \frac{2}{8}$

$= \frac{10-2}{8}$

$= \frac{8}{8} = \mathbf{1}$

13. 35 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில் ஒவ்வொருவருக்கும் 1 முதல் 35 வரை எண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மாணவர்களுக்கும் மாணவிகளுக்கும் உள்ள விகிதமானது 4 : 3 ஆகும். வரிசை எண்கள் மாணவர்களில் தொடங்கி மாணவிகளில் முடிவடைகிறது. ஒருவர் வகுப்பிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார். அவர் பகா எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவராகவோ அல்லது பகு எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவியாகவோ அல்லது இரட்டை எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்டவராகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க. (5M)

கொடுக்கப்பட்டது: ஒரு வகுப்பில் 35 மாணவர்கள் உள்ளனர், $n(S) = 35$

மாணவர்களுக்கும் மாணவிகளுக்கும் உள்ள விகிதம் $4:3$

$$4x + 3x = 35$$

$$7x = 35 \Rightarrow x = \frac{35}{7} = 5$$

∴ மாணவர்கள் $4x \Rightarrow 4(5) = 20$; மாணவிகள் $3x = 3(5) = 15$

மாணவர்களின் எண்ணிக்கை $= 20$, மாணவிகளின் எண்ணிக்கை $= 15$

i) A என்பது பகா எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவரைத் தேர்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

$$n(A) = 8 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{8}{35}$$

ii) B என்பது பகு எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்ட மாணவியை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$B = \{21,22,24,25,26,27,28,30,32,33,34,35\}$

$$n(B) = 12 \Rightarrow P(B) = \frac{12}{35}$$

iii) C என்பது இரட்டை எண்ணை வரிசை எண்ணாகக் கொண்டவரை தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$C = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,34\}$

$$n(C) = 17 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{17}{35}$$

$A \cap B = \{\ \}$, $n(A \cap B) = 0$, $P(A \cap B) = 0$

$B \cap C = \{22,24,26,28,30,32,34\}$,

$$n(B \cap C) = 7 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(S)} = \frac{7}{35}$$

$A \cap C = \{2\}$, $n(A \cap C) = 1 \Rightarrow P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(S)} = \frac{1}{35}$

$A \cap B \cap C = \{\ \}, n(A \cap B \cap C) = 0 \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{n(A \cap B \cap C)}{n(S)} = \frac{0}{35} = 0$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{8}{35} + \frac{12}{35} + \frac{17}{35} - 0 - \frac{7}{35} - \frac{1}{35} + 0$$

$$= \frac{8+12+17-7-1}{35} = \frac{8-8+29}{35} = \mathbf{\frac{29}{35}}$$

இது போன்ற கணக்குகள்
சுயமாக பயிற்சி செய்யவும்.

12. A, B, C என்பன ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள். மேலும் B கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு A-ன் நிகழ்தகவைப் போல இருமடங்காகவும், C கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு A-ஐ விட மூன்று மடங்காகவும் உள்ளன. மேலும் $P(A \cap B) = \frac{1}{6}, P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{8}, P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{10}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{15}$ எனில், $P(A), P(B)$ மற்றும் $P(C)$-ஐக் காண்க? (5M)

அலகுப் பயிற்சி - 8

1. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரியானது **62.8** மற்றும் அனைத்து நிகழ்வெண்களின் கூடுதல் **50**. விடுபட்ட நிகழ்வெண்கள் f_1 மற்றும் f_2-ஐக் கணக்கிடுக. (5M)

பிரிவு இடைவெளி	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
நிகழ்வெண்	5	f_1	10	f_2	7	8

$\bar{X} = 62.8,\ \Sigma f = 50, h = 20, A = 50$

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண் f_i	மையமதிப்பு (x_i)	$u_i = \frac{x-A}{h}$	$f_i u_i$
0 - 20	5	10	-2	-10
20 - 40	f_1	30	-1	$-f_1$
40 - 60	10	50	0	0
60 - 80	f_2	70	1	f_2
80 - 100	7	90	2	14
100 - 120	8	110	3	24
	$N = \Sigma f_i = 30 + f_1 + f_2$			$\Sigma f_i u_i = 28 - f_i + f_2$

$N = \Sigma f_i = 50$

$30 + f_1 + f_2 = 50$

$f_1 + f_2 = 50 - 30$

$f_1 + f_2 = 20$ ------(1)

சராசரி $= 62.8$

$A + c\left\{\frac{1}{N}\Sigma f_i u_i\right\} = 62.8$ இங்கு, $c = 20$

$50 + 20\left\{\frac{28 - f_1 + f_2}{50}\right\} = 62.8$

$\frac{2}{5}[28 - f_1 + f_2] = 62.8 - 50$

$28 - f_1 + f_2 = 32.0$

$-f_1 + f_2 = 32 - 28$

$f_2 - f_1 = 4$ ------ (2)

(1) & (2)-ஐத் தீர்க்க

$f_2 + f_1 = 20$

$f_2 - f_1 = 4$

$2f_2 = 24$

$f_2 = \frac{24}{2} = 12$

$\boldsymbol{f_2 = 12}$

$f_2 = 12$ என (1)-ல் பிரதியிட

$f_1 + f_2 = 20$

$f_1 + 12 = 20$

$f_1 = 20 - 12;$

$\boldsymbol{f_1 = 8}$

3. ஒரு நிகழ்வெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அட்டவணையில், k ஒரு மிகை முழு. விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது **160** எனில், k-ன் மதிப்பைக் காண்க. (5M)

x	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$	$6k$
f	2	1	1	1	1	1

நிகழ்வெண் பரவல்:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
k	2	$2k$	$2k^2$
$2k$	1	2k	$4k^2$
$3k$	1	$3k$	$9k^2$
$4k$	1	$4k$	$16k^2$
$5k$	1	$5k$	$25k^2$
$6k$	1	$6k$	$36k^2$
	$\Sigma f_i = 7$	$\Sigma f_i x_i = 22k$	$\Sigma f_i x_i^2 = 92k^2$

$N = 7, \quad \Sigma f_i x_i = 22k, \quad \Sigma f_i x_i^2 = 92k^2$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $= 160,\ \sigma^2 = 160$

$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{N}\right)^2$

$160 = \frac{92k^2}{7} - \left(\frac{22k}{7}\right)^2$

$160 = \frac{92k^2}{7} - \frac{484k^2}{49}$

$160 = \frac{644k^2 - 484k^2}{49}$

$160 = \frac{160k^2}{49}$

$k^2 = 49 \Rightarrow k = \sqrt{49} = 7$

4. **செல்சியஸில் குறிக்கப்பட்ட வெப்பநிலை தரவின் திட்டவிலக்கமானது 5. இந்த வெப்பநிலை தரவை ∴பாரன்ஹீட் ஆக மாற்றும்பொழுது கிடைக்கும் தரவின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் காண்க.** (2M)

$\sigma = 5°c$, விலக்க வர்க்க சராசரி $= 25, \ F = \frac{9}{5}c + 32$

F ன் விலக்க வர்க்க சராசரி $= \frac{9}{5}c + 32$

$(aX + b)$ன் விலக்க வர்க்க சராசரி $= a^2$ (X ன் விலக்க வர்க்க சராசரி)

$$= \left(\frac{9}{5}\right)^2 \times 25 = \frac{81}{25} \times 25 = 81$$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $= \mathbf{81}$

5. **ஒரு பரவலில் $\Sigma(x-5) = 3, \Sigma(x-5)^2 = 43$, மற்றும் மொத்த தரவுப் புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை 18 எனில் சராசரி, திட்ட விலக்கத்தைக் காண்க.** (5M)

$\Sigma(x-5) = 3, \ \Sigma(x-5)^2 = 43, N = 18$

$$\Sigma(x-5) = 3$$
$$\Sigma x - \Sigma 5 = 3$$
$$\Sigma x - (18 \times 5) = 3$$
$$\Sigma x - 90 = 3$$
$$\Sigma x = 3 + 90 = 93$$
$$\bar{X} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{93}{18} = 5.166666$$
$$\bar{X} = 5.17$$
$$\Sigma(x-5)^2 = 43$$
$$\Sigma(x^2 - 10x + 25) = 43$$
$$\Sigma x^2 - \Sigma 10x + \Sigma 25 = 43$$
$$\Sigma x^2 - (10 \times 93) + (25 \times 18) = 43$$
$$\Sigma x^2 - 930 + 450 = 43$$
$$\Sigma x^2 - 480 = 43$$
$$\Sigma x^2 = 43 + 480$$
$$\Sigma x^2 = 523$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{523}{18} - \left(\frac{93}{18}\right)^2} = \sqrt{\frac{523}{18} - \frac{93 \times 93}{18 \times 18}}$$
$$= \sqrt{\frac{523 \times 18 - (93 \times 93)}{18 \times 18}} = \frac{1}{18}\sqrt{9414 - 8649}$$
$$= \frac{1}{18}\sqrt{765} \ = \frac{27.66}{18}$$
$$\sigma \simeq 1.53$$

6. **இரண்டு நகரங்களின் பல்வேறு இடங்களில் விற்பனை செய்யும் நிலக்கடலை பொட்டலங்களின் விலைகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எந்த நகரத்தில் விலைகளானது மிகவும் நிலையானதாக உள்ளது?** (5M)

நகரம் A-ன் விலைகள்	20	**22**	**19**	**23**	**16**
நகரம் B-ன் விலைகள்	**10**	**20**	**18**	**12**	**15**

நகரம் A-ன் விலைகள்:

$\bar{X} = \frac{20+22+19+23+16}{5} = \frac{100}{5} = 20$

x	$d = x - \bar{x} = x - 20$	d^2
20	0	0
22	2	4
19	−1	1
23	3	9
16	−4	16
		$\Sigma d^2 = 30$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{30}{5}}$$
$$= \sqrt{6} = 2.44$$
$$\sigma \simeq 2.44$$

நகரம் B-ன் விலைகள்:

$\bar{X} = \frac{10+20+18+12+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$

x	$d = x - \bar{x} = x - 15$	d^2
10	−5	25
20	5	25
18	3	9
12	−3	9
15	0	0
		$\Sigma d^2 = 68$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$
$$= \sqrt{\frac{68}{5}}$$
$$= \sqrt{13.6} = 3.68$$
$$\sigma \simeq 3.68$$

நகரம் A $\Rightarrow \sigma \simeq 2.44$ நகரம் B $\Rightarrow \sigma \simeq 3.68$

∴ நகரம் A ஆனது மிகவும் நிலையாக உள்ளது.

9. இரண்டு குழந்தைகள் உள்ள ஒரு குடும்பத்தில், குறைந்தது ஒரு பெண் குழந்தை இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க? (2M)

$S = \{BB, BG, GG, GB\}$,

$n(S) = 4$

$B \to$ ஆண் குழந்தை, $G \to$ பெண் குழந்தை,

A என்பது குறைந்தது ஒரு பெண்ணாவது இருப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{BG, GG, GB\}$,

$n(A) = 3$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

$\therefore P(A) = \mathbf{\frac{3}{4}}$

அலகுப்பயிற்சிக்கான குறிப்பு

வினா எண்: 2 – பயிற்சி 8.1 ல் - 13 ஆம் வினா போன்றது. வினா எண்: 7 – பயிற்சி 8.1 ல் - 1 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 8 – பயிற்சி 8.4 ல் - 6 ஆம் வினா போன்றது. வினா எண்: 10 – பயிற்சி 8.3 ல் - 9 ஆம் வினா போன்றது.
வினா எண்: 11 – பயிற்சி 8.4 ல் - 10 ஆம் வினா போன்றது.

நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி. (5M)

கூற்று:

(i) A மற்றும் B ஆகியவை ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

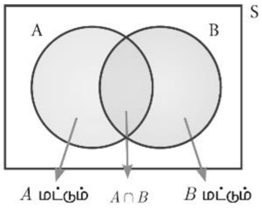
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(ii) A, B மற்றும் C ஆகியவை ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

நிரூபணம்:

(i) S- ஐ கூறுவெளியாக உடைய ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையில் A மற்றும் B ஆகியன ஏதேனும் இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் என்க.



வென் படத்திலிருந்து A மட்டும், $A \cap B$ மற்றும் B மட்டும் ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள். மேலும் அவைகளின் சேர்ப்பு ஆனது $A \cup B$ ஆகும்.

ஆகையால், $P(A \cup B) = P[(A \text{ மட்டும்}) \cup (A \cap B) \cup P(B \text{ மட்டும்})]$

$= P(\text{மட்டும் } A) + P(A \cap B) + P(\text{மட்டும் } B)$

$= [P(A) - P(A \cap B)] + P(A \cap B) + [P(B) - P(A \cap B)]$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(ii) A, B, C ஆகியன சமவாய்ப்பு சோதனையில் S என்ற கூறுவெளியின் ஏதேனும் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் என்க.

$D = B \cup C$ என்க.

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D)$

$= P(A) + P(D) - P(A \cap D)$

$= P(A) + P(B \cup C) - P[A \cap (B \cup C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P[A \cap B \cap C]$