கணிதம்

பகுதி – அ

குறிப்பு : **(i) அனைத்து வினாக்களுக்கும் கட்டாயமானது.** $40 \times 1 = 40$

(ii) கொடுக்கப்பட்ட நான்கு விடைகளில் மிகவும் ஏற்புடைய விடையினை தேர்ந்தெடுத்து குறியீட்டுடன் விடையினையும் சேர்த்து எழுதுக.

1. ஒரு திசையிலி அணியின் வரிசை 3, திசையிலி $k \neq 0$, எனில் A^{-1} என்பது

(1) $\frac{1}{k^2}I$ (2) $\frac{1}{k^3}I$ **(3) $\frac{1}{k}I$** (4) kI

2. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ என்பதன் நேர்மாறு

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

3. மதிப்பிட வேண்டிய மூன்று மாறிகளில் அமைந்த மூன்று நேரிய அசமபடித்தான சமன்பாட்டுத் தொகுப்பில் $\Delta = 0$ மற்றும் $\Delta_x = 0, \Delta_y \neq 0, \Delta_z = 0$, எனில், தொகுப்புக்கான தீர்வு

(1) ஒரே ஒரு தீர்வு (2) இரண்டு தீர்வுகள்

(3) எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் **(4) தீர்வு இல்லாமை**

4. பின்வருவனவற்றில், சமபடித்தான தொகுப்பை பொறுத்த வரையில் எது சரியானது?

(1) எப்பொழுதுமே ஒருங்கமைவு அற்றது

(2) வெளிப்படைத் தீர்வை மட்டுமே பெற்றிருக்கும்

(3) வெளிப்படையற்ற தீர்வுகளை மட்டுமே பெற்றிருக்கும்

(4) கெழுக்கள் அணியின் தரம், மாறிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமமாக இருக்கும் போது மட்டுமே வெளிப்படைத் தீர்வினை மட்டும் பெற்றிருக்கும்

5. $2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$, $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் செங்குத்து வெக்டர்களாயின்,

(1) a=2, b=3, c=−4 (2)a=4, b=4, c=5 **(3) a=4, b=4, c= − 5** (4)a=−2, b=3, c=4

6. $\vec{p}, \vec{q}$ மற்றும் $\vec{p}+\vec{q}$ ஆகியவை எண்ணளவு λ கொண்ட வெக்டர்களாயின் $|\vec{p}-\vec{q}|$ ஆனது

(1)2λ **(2) $\sqrt{3}\lambda$** (3) $\sqrt{2}\lambda$ (4) 1

7. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ என்பன ஒரு தளம் அமையா வெக்டர்கள் மேலும் $[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}]$ எனில் $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ இன் மதிப்பு

(1)2 (2)3 (3)1 (4)0

8. $\vec{i}+a\vec{j}-\vec{k}$ எனும் விசை $\vec{i}+\vec{j}$ எனும் புள்ளிவழியேச் செயல்படுகிறது. $\vec{j}+\vec{k}$ எனும் புள்ளியைப் பொறுத்து அதன் திருப்புத் திறனின் அளவு $\sqrt{8}$ எனில் a இன் மதிப்பு

(1)1 **(2)2** (3)3 (4)4

9. $(2,1,-1)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும், தளங்கள் $\vec{r}.(\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}) = 0$; $\vec{r}.(\vec{j}+2\vec{k}) = 0$ வெட்டிக் கொள்ளும் கோட்டை உள்ளடக்கியதுமான தளத்தின் சமன்பாடு

(1)$x+4y-z=0$ **(2) $x+9y+11z=0$** (3)$2x+y-z+5=0$ (4) $2x-y+z=0$

10. $2x-y+2z=5$ என்ற தளத்தின் செங்குத்து அலகு வெக்டர்

(1) $2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ (2)$\frac{1}{3}(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$ (3)$-\frac{1}{3}(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$ **(4)$\pm\frac{1}{3}(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})$**

11. $2+i\sqrt{3}$ என்ற கலப்பெண்ணின் மட்டு

(1) $\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{13}$ **(3) $\sqrt{7}$** (4)7

12. கலப்பெண் $(i^{25})^3$இன் போலார் வடிவம்

(1) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ (2)$\cos\pi+i\sin\pi$ (3) $\cos\pi-i\sin\pi$ **(4) $\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$**

WAY TO SUCCESS

13. $ax^2+bx+1=0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு $\frac{1-i}{1+i}$, a யும் b யும் மெய் எனில் (a,b) என்பது

(1) (1,1) (2) $(1,-1)$ (3) (0,1) **(4)(1,0)**

14. z_1, z_2 என்பன கலப்பெண்கள் எனில் பின்வருவனவற்றில் எது தவறு?

(1) $Re\,(z_1+z_2)=Re\,(z_1)+Re\,(z_2)$ (2) $Im\,(z_1+z_2)=Im\,(z_1)+Im\,(z_2)$

(3) $\arg\,(z_1+z_2)=\arg z_1+\arg z_2$ (4) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$

15. $y^2-2y+8x-23=0$என்ற பரவளையத்தின் அச்சு

(1) $y=-1$ (2) $x=-3$ (3) $x=3$ **(4) $y=1$**

16. $9x^2+5y^2=180$ என்ற நீள்வட்டத்தின் குவியங்களுக்கிடையே உள்ள தொலைவு

(1) 4 (2) 6 **(3) 8** (4) 2

17. $xy=16$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்தின் முனையின் ஆயத்தொலைவுகள்

(1) (4,4),(-4,-4) (2) (2,8),(-2,-8) (3)(4,0),(-4,0) (4) (8,0),(-8,0)

18. $lx+my+n=0$ என்ற கோடு என்ற $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளையத்திற்கு செங்கோடாக அமைய நிபந்தனை

(1) $al^3+2alm^2+m^2n=0$ (2) $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{n^2}$

(3) $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$ **(4) $\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{n^2}$**

19. $y=2x^2-6x-4$ எனும் வளைவரையில் $x-$அச்சுக்கு இணையாகவுள்ள தொடுகோட்டின் தொடுபுள்ளி

(1)$\left(\frac{5}{2},\frac{-17}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{-5}{2},\frac{-17}{2}\right)$ (3)$\left(\frac{-5}{2},\frac{17}{2}\right)$ **(4) $\left(\frac{3}{2},\frac{-17}{2}\right)$**

20. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ எனும் வளைவரையின் துணை அலகுச் சமன்பாடுகள்

(1)$x=a\sin^3\theta\,;y=a\cos^3\theta$ **(2) $x=a\cos^3\theta\,;y=a\sin^3\theta$**

(3)$x=a^3\sin\theta\,;y=a^3\cos\theta$ (4) $x=a^3\cos\theta\,;y=a^3\sin\theta$

21. சரியான கூற்றை தேர்ந்தெடு.

(a) ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பானது இடஞ்சார்ந்த பெருமம் பெற்றிருப்பின் மீப்பெரு பெருமமும் பெற்றிருக்கும்

(b) ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பானது இடஞ்சார்ந்த சிறுமம் பெற்றிருப்பின் மீச்சிறு சிறுமமும் பெற்றிருக்கும்

(c) ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பானது மீப்பெரு பெருமம் பெற்றிருப்பின் இடஞ்சார்ந்த பெருமமும் பெற்றிருக்கும்

(d) ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பானது மீச்சிறு சிறுமம் பெற்றிருப்பின் இடஞ்சார்ந்த சிறுமமும் பெற்றிருக்கும்

(1) (a) மற்றும் (b) (2)(a) மற்றும் (c) (3)(c) மற்றும் (d) (4) (a),(c) மற்றும் (d)

22. தொடர்ச்சியான வளைவரை $y=f(x)$ ஆனது (x_1,y_1) என்ற புள்ளியில் $x\to x_1$ எனும்போது$f'(x)\to\infty$ எனில் $y=f(x)$ க்கு

(1) $y=x_1$ என்ற நிலைக்குத்தான தொடுகோடு உண்டு (2) $x=x_1$ என்ற கிடைமட்ட தொடுகோடு உண்டு

(3) $x=x_1$ என்ற நிலைக்குத்தான தொடுகோடு உண்டு (4) $y=y_1$ என்ற கிடைமட்ட தொடுகோடு உண்டு

23. $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில், $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ இன் மதிப்பு

(1)0 (2)1 (3)$2u$ (4) u

24. $y^2=(x-1)(x-2)^2$ என்ற வளைவரை எந்த இடைவெளியில் வரையறுக்கப்படவில்லை?

(1) $x\geq 1$ (2)$x\geq 2$ (3)$x<2$ **(4)$x<1$**

25. $\int_0^{\pi}\sin^4x\,dx$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{3\pi}{16}$ (2) $\frac{3}{16}$ (3)0 **(4) $\frac{3\pi}{8}$**

26. பரவளையம் $y^2=x$ க்கும் அதன் செவ்வகலத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு

(1)$\frac{4}{3}$ **(2) $\frac{1}{6}$** (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{8}{3}$

27. புள்ளிகள் (0,0),(3,0) மற்றும் (3,3) ஆகியவற்றை முனைப்புள்ளிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு x- அச்சை பொறுத்துச் சுழற்றப்படும் திடப்பொருளின் கன அளவு

(1) 18π (2) 2π (3) 36π **(4) 9π**

28. $I_n = \int \sin^n x \, dx$ எனில் $I_n =$

(1) $-\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (2) $\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

(3) $-\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x - \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (4) $-\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_n$

29. $\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = e^{4x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தொகைக் காரணி

(1) $\log x$ **(2) x^2** (3) e^x (4) x

30. $y = e^x(A\cos x + B\sin x)$ என்ற தொடர்பில் A யையும் B யையும் நீக்கிப் பெறப்படும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

(1) $y_2 + y_1 = 0$ (2) $y_2 - y_1 = 0$

(3) $y_2 - 2y_1 + 2y = 0$ (4) $y_2 - 2y_1 - 2y = 0$

31. $(3D^2 + D - 14)y = 13e^{2x}$ ன் சிறப்பு தீர்வு

(1) $26xe^{2x}$ (2) $13xe^{2x}$ **(3) xe^{2x}** (4) $x^2/2e^{2x}$

32. $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசை மற்றும் படி

(1) 2, 3 (2) 3,3 (3) 3, 2 (4) 2, 2

33. ஒரு கூட்டுக் கூற்று மூன்று தனிக்கூற்றுகளைக் கொண்டதாக இருப்பின், மெய்யட்டவணையிலுள்ள நிரைகளின் எண்ணிக்கை

(1) 8 (2) 6 (3) 4 (4) 2

34. பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்மையாகும்?

(1) $p \vee q$ (2) $p \wedge q$ **(3) $p \vee \sim p$** (4) $p \wedge \sim p$

35. முழுக்களில் * என்ற ஈருறுப்புச் செயலி $a * b = a + b - 1$ என வரையறுக்கப்படுகிறது எனில் சமனி உறுப்பு

(1) 0 **(2) 1** (3) a (4) b

36. $(S,*)$ வில் $x * y = x,\ x, y \in s$ எனில் '*' என்பது

(1) சேர்ப்பு விதிக்கு உட்படும் (2) பரிமாற்று விதிக்கு உட்படும்

(3) சேர்ப்பு மற்றும் பரிமாற்று விதிக்கு உட்படும்

(4) சேர்ப்பு மற்றும் பரிமாற்று விதிக்கு உட்படாது

37. X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவற்படி 4 மேலும் சராசரி 2 எனில் $E(X^2)$ இன் மதிப்பு

(1) 2 (2) 4 (3) 6 **(4) 8**

38. ஒரு பாய்ஸான் பரவலில் $P(X = 0) = k$ எனில் பரவற்படியின் மதிப்பு

(1) $\log\frac{1}{k}$ (2) $\log k$ (3) e^{λ} (4) $\frac{1}{k}$

39. ஒரு இயல்நிலைப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ இன் சராசரி μ எனில் $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ இன் மதிப்பு

(1) 1 (2) 0.5 (3) 0 (4) 0.25

40. $f(x) = \begin{cases} k\,x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$ என்பது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் k இன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$ **(3) $\frac{1}{9}$** (4) $\frac{1}{12}$

WAY TO SUCCESS

பகுதி – ஆ

குறிப்பு : (i) எவையேனும் பத்து வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். $\mathbf{10 \times 6 = 60}$

(ii) வினா எண் 55-க்கு கண்டிப்பாக விடையளிக்கவும். பிற வினாக்களிலிருந்து ஏதேனும் ஒன்பது வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்

41. $\boldsymbol{B^TA^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}$ **எனில்** $\boldsymbol{B^{-1}A^{-1}}$ **காண்க.**

$$(B^TA^T)^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$((AB)^T)^T = AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\text{adj }(AB)$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3(2-0) - 2(-1+2) + 1(0-2) = 6 - 2 - 2 = 2$$

$$\text{adj }(AB) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & -5 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

42. $\boldsymbol{x - 4y + 7z = 14,\ 3x + 8y - 2z = 13,\ 7x - 8y + 26z = 5}$ **என்ற சமன்பாடுகளின் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையதா என்பதை தரமுறையில் ஆராய்க.**

தரப்பட்ட சமன்பாடுத்தொகுப்பினை பின்வருமாறு அணிச் சமன்பாடாக மாற்றி எழுதலாம்

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 3 & 8 & -2 \\ 7 & -8 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A\,X = B$$

விரிவுப்படுத்தப்பட்ட அணியானது

$$[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 7 & -8 & 26 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 20 & -23 & -93 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 7R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & -64 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - R_2$$

கடைசி சமான அணியானது ஏறுபடி வடிவில் உள்ளது. $\rho(A, B) = 3$ மற்றும் $\rho(A) = 2$

$$\therefore \rho(A, B) \neq \rho(A)$$

∴ எனவே தரப்பட்ட சமன்பாட்டுத் தொகுப்பு ஒருங்கமைவு அற்றது. எனவே தீர்வு காண முடியாது

WAY TO SUCCESS

43. $\boldsymbol{AC}$ **மற்றும்** $\boldsymbol{BD}$ **ஐ மூலைவிட்டங்களாகக் கொண்ட நாற்கரம்** $\boldsymbol{ABCD}$ **இன் பரப்பு** $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right|$ **எனக் காட்டுக**

நாற்கரம் $ABCD$ இன் வெக்டர் பரப்பு $=$ ΔABC இன் வெக்டர் பரப்பு $+$ ΔACD இன் வெக்டர் பரப்பு

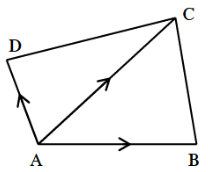
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\times\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right)$$



நாற்கரம் $ABCD$ இன் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}\right|$

44. (i) இரண்டு அலகு வெக்டர்களின் கூடுதல் ஓர் அலகு வெக்டர் எனில் அவற்றின் வித்தியாசத்தின் எண் அளவு $\sqrt{3}$ **எனக் காட்டுக.**

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ என்பவை ஓர் அலகு வெக்டர்கள்

$$\hat{a} + \hat{b} = \hat{c}$$

$$\left(\hat{a} + \hat{b}\right)^2 = \hat{c}^2$$

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta = c^2$$

$$1 + 1 + 2(1)(1)\cos\theta = 1$$

$$2 + 2\cos\theta = 1$$

$$2\cos\theta = -1$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

$$= (1) + (1) - 2(1)(1)\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\therefore \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{3}$$

44(ii) $\vec{r}^2 - \vec{r}.\left(4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}\right) - 11 = 0$ **என்ற கோளத்தின் மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க**

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ என்க

$$\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)^2 - \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right).\left(4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}\right) - 11 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (4x + 2y - 6z) - 11 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 11 = 0$$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ உடன் ஒப்பிட

$2u = -4\,, 2v = -2\,, 2w = -4$

$u = -2, v = -1, w = 3, d = -11$

மையம் $(-u, -v, -w) = (2,1,-3)$

ஆரம் $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d} = \sqrt{4 + 1 + 9 + 11} = 5$

45. $\boldsymbol{n}$ **என்பது மிகை முழு எனில்,** $(\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$ **என நிரூபி.**

$$\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

WAY TO SUCCESS

மெய் மற்றும் கற்பனைப் பகுதிகளை ஒப்பிட,

$r\cos\theta = \sqrt{3},\ r\sin\theta = 1$

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

மேலும், $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^n = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^n$$

$$= 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

(1)இல் i க்குப் பதில் $-i$ ஐ பிரதியிட,

$$\left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} - i\sin\frac{n\pi}{6}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

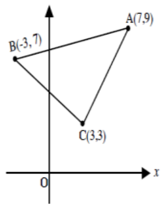
(1) ஐயும் (2) ஐயும் கூட்ட

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^n + \left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$= 2^{n+1}\left(\cos\frac{n\pi}{6}\right)$$

46. கலப்பெண்கள் $7 + 9i, -3 + 7i, 3 + 3i$ எனும் கலப்பெண்கள் ஆர்கன் தளத்தில் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

A, B, C எனும் புள்ளிகள் முறையே $7 + 9i,\ -3 + 7i, 3 + 3i$ எனும் கலப்பெண்களை ஆர்கன் தளத்தில் குறிக்கட்டும்



$AB = |(7 + 9i) - (-3 + 7i)| = |10 + 2i| = \sqrt{(10)^2 + (2)^2} = \sqrt{104}$

$BC = |(-3 + 7i) - (3 + 3i)| = |-6 + 4i| = \sqrt{(-6)^2 + (4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$

$CA = |(3 + 3i) - (7 + 9i)| = |-4 - 6i| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$

$\Rightarrow AB^2 = BC^2 + CA^2$

$\Rightarrow \angle BCA = 90°$

எனவே ΔABC ஒரு இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணமாகும்.

47. (i) $f(x) = |x - 1|, 0 \le x \le 2$ என்ற சார்பிற்கு ரோலின் தேற்றத்தை சரிபார்க்க.

இந்த சார்பு மூடிய இடைவெளி $[0,2]$ல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது. $x = 1 \in (0, 2)$வில் வகையிடத்தக்கதல்ல. $f(0) = 1 = f(2)$என இருப்பினும் ரோலின் எல்லா நிபந்தனைகளும் பூர்த்தி ஆகவில்லை. எனவே இந்த சார்பிற்கு ரோலின் தேற்றம் ஏற்புடையதல்ல.

47 (ii). மதிப்பு காண்க $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}$

$\frac{1}{x} = y$ என்க $x \to \infty$ எனில் $y \to 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{y}\left(\frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}\right)$

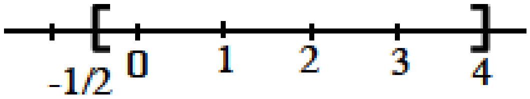
லோபிதாலின் விதிப்படி

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\cos 2y(2)}{1}$$

$$= \frac{2}{1} = 2$$

48. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $\frac{-1}{2} \le x \le 4$ என்ற சார்பின் மீப்பெரு பெருமம் மற்றும் மீச்சிறு சிறும மதிப்புகளைக் காண்க

f ஆனது $\left[\frac{-1}{2}, 4\right]$ இல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.



$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$f^{'}(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

x இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கு $f'(x)$ ஐ காண முடிவதால் f இன் மாறுநிலை எண்கள் $x = 0$ மற்றும் $x = 2$ மட்டுமே ஆகும்.

இவ்விரு மாறுநிலை எண்களுக்கும் இடைவெளி $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$ இல் இருப்பதால், இவ்வெண்களில் f இன் மதிப்பு $f(0) = 1$ மற்றும் $f(2) = -3$.

இடைவெளியின் முடிவுப்புள்ளிகளில் f இன் மதிப்பு

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{8}$ மற்றும்

$f(4) = 4^3 - 3(4^2) + 1 = 17$

இந்நான்கு எண்களையும் ஒப்பிட்டு பார்க்கும் போது மீப்பெரு பெருமத்தின் மதிப்பு $f(4) = 17$ மற்றும் மீச்சிறு சிறுமத்தின் மதிப்பு $f(2) = -3$

49. ஒரு தனி ஊசலின் நீளம் l மற்றும் முழு அலைவு நேரம் T எனில் $T = k\sqrt{l}$ (k என்பது மாறிலி). தனி ஊசலின் நீளம் 32.1 செ.மீ இலிருந்து 32.0 செ.மீக்கு மாறும்போது, நேரத்தில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழையை கணக்கிடுக.

$T = k\sqrt{l} = kl^{\frac{1}{2}}$ எனில்

$\frac{dT}{dl} = k\left(\frac{1}{2} \times l^{\frac{-1}{2}}\right) = \left(\frac{k}{2\sqrt{l}}\right)$ மற்றும்

$dl = 32.0 - 32.1 = -0.1$ செ.மீ.

T இல் உள்ளபிழை $=$ T இல் ஏற்படும் தோராயமான மாற்றம்

$$\Delta T \approx dT = \left(\frac{dT}{dl}\right) dl = \left(\frac{k}{2\sqrt{l}}\right)(-0.1)$$

சதவீதப் பிழை $= \left(\frac{\Delta T}{T}\right) \times 100\%$

$$= \frac{\left(\frac{k}{2\sqrt{l}}\right)(-0.1)}{k\sqrt{l}} \times 100\%$$

$$= \frac{-0.1}{2l} \times 100\% = \frac{-0.1}{2(32.1)} \times 100\%$$

$$= \frac{-0.1}{64.2} \times 100\%$$

$$= -0.156\%$$

அலைவு நேரத்தில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழை 0.156% குறைவு ஆகும்.

50. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{9+\cos^2 x} dx$ ன் மதிப்பினைக் காண்க.

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{9+\cos^2 x}$

$t = \cos x$ என்க

$dt = -\sin x \; dx$

$\sin x \; dx = -dt$

$t = \cos x$

x	0	$\pi/2$
t	1	0

WAY TO SUCCESS

$I = \int_1^0 \frac{-dt}{3^2+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{3^2+t^2}$

$$= \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - \tan^{-1}0\right] = \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - 0\right] = \frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

51. $(p \vee q) \vee (\sim(p \vee q))$ மெய்மையா முரண்பாடா எனக் காண்க *(JUN-08,10, MAR-11)*

$(p \vee q) \vee (\sim(p \vee q))$ க்குரிய மெய் அட்டவணை

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \vee q) \vee (\sim(p \vee q))$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	T	T

$\therefore (p \vee q) \vee (\sim(p \vee q))$ ஒரு மெய்மையாகும்.

52. (i) G என்ற குலத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு a க்கு $(a^{-1})^{-1} = a$ என நிரூபிக்க.

$a^{-1} \in G$ என்பதால் $(a^{-1})^{-1} \in G$ என்க

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

$$a^{-1} * (a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1} = e$$

$$a * a^{-1} = (a^{-1})^{-1} * a^{-1}$$

$$a = (a^{-1})^{-1}$$ (வலது நீக்கல் விதிப்படி)

52. (ii) ஒரு குலத்தின் சமனி உறுப்பு ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்தது - நிரூபிக்க

G ஒரு குலம் என்க. G இன் சமனி உறுப்புகளை e_1, e_2 என இருப்பதாக கொள்வோம்.

e_1 ஐ சமனி உறுப்பாகக் கொள்வோமாயின்

$e_1 * e_2 = e_2$ ....(1)

e_2 ஐ சமனி உறுப்பாகக் கொள்வோமாயின்

$e_1 * e_2 = e_1$ ....(2)

(1) மற்றும் (2) இலிருந்து,

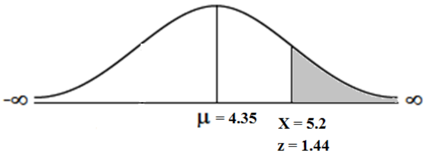
$$e_1 = e_2$$

$\therefore$ எனவே, ஒரு குலத்தின் சமனி உறுப்பு ஒருமைத் தன்மை வாய்ந்ததாகும்.

53. விமானத்தில் பயணம் செய்யும் ஒரு நபர் காஸ்மிக் கதிரியக்கத்தினால் பாதிக்கப்படுவது ஒரு இயல்நிலை பரவலாகும். இதன் சராசரி 4.35 m rem ஆகவும், திட்ட விலக்கம் 0.39 m rem ஆகவும் அமைந்துள்ளது. ஒரு நபர் 5.20 m rem க்கு மேல் காஸ்மிக் கதிரியக்கத்தினால் பாதிக்கப்படுவார் என்பதற்கு நிகழ்தகவு காண்க. இங்கு $[P(0 < z < 1.44) = 0.4251]$

இயல்நிலை பரவல் சமவாய்ப்பு மாறி X

$\mu = 4.35,\ \sigma = 0.59$



$X = 5.2$ எனில்

$\Rightarrow Z = \frac{5.2-4.35}{0.59}$

$= 1.44$

$P(X > 5.2) = P(Z > 1.44)$

$= P(1.44 < Z < \infty)$

$= 0.5 - P(0 < Z < 1.44)$

$= 0.5 - 0.4251 = 0.0749$

WAY TO SUCCESS

54. ஒரு தொடர்சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$ எனில் $P(X \le a) = P(X > a)$ மற்றும் $P(X > b) = 0.05$ என்பதற்கான a, b ன் மதிப்புகளை காண்க

நிகழ்தகவின் கூடுதல் 1 ஆகும்

$P(X \le a) = P(X > a)$

$P(X \le a) + P(X > a) = 1$

$2P(X \le a) = 1$

$P(X \le a) = \frac{1}{2}$

$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{2}$

$\int_0^a 3x^2 dx = \frac{1}{2}$

$\left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{2}$

$a^3 = \frac{1}{2}$

$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$P(X > b) = 0.05$

$\int_b^1 f(x)dx = 0.05$

$\int_b^1 3x^2 dx = 0.05$

$\left[\frac{3x^3}{3}\right]_b^1 = 0.05$

$1 - b^3 = 0.05$

$b^3 = 1 - 0.05 = 0.95$

$b^3 = \frac{95}{100}$

$b = \left(\frac{95}{100}\right)^{\frac{1}{3}}$

55. (a) $2xy - 2x - 8y - 1 = 0$ என்ற செவ்வக அதிபரவளையத்திற்கு $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு மற்றும் செங்கோட்டின் சமன்பாடுகளைக் காண்க

x ஐ பொறுத்து வகையிட்டால்

$2(xy' + y.1) - 2 - 8y' = 0$

$2xy' + 2y - 2 - 8y' = 0$

$y'(2x - 8) = 2 - 2y$

$y' = \frac{2-2y}{2x-8}$

$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ என்ற புள்ளியில் $y' = -\frac{1}{8} = m$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow x + 8y = 0$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

$$y-\frac{1}{4}=8\,(x+2)$$

$$32x-4y+65=0$$

55. (b) $(x^2+5x+7)dy+\sqrt{9+8y-y^2}dx=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

$$(x^2+5x+7)dy+\sqrt{9+8y-y^2}dx=0$$

$$(x^2+5x+7)dy=-\sqrt{9+8y-y^2}dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{9+8y-y^2}}=-\frac{dx}{(x^2+5x+7)}$$

தொகையிட $\int\frac{dy}{\sqrt{9+8y-y^2}}=-\int\frac{dx}{(x^2+5x+7)}$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{-[(y-4)^2-16-9]}}=-\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+7\right)}$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{5^2-(y-4)^2}}=-\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{y-4}{5}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=c$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{y-4}{5}\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right)=c$$

பகுதி – இ

குறிப்பு : (i) எவையேனும் பத்து வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். **$10\times10=100$**

(ii) வினா எண் 70-க்கு கண்டிப்பாக விடையளிக்கவும். பிற வினாக்களிலிருந்து ஏதேனும் ஒன்பது வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்

56. $x+2y+z=6, 3x+3y-z=3, 2x+y-2z=-3$ என்ற நேரிய தொகுப்பினை அணிக்கோவை முறையில் தீர்க்க.

$x+2y+z=6$
$3x+3y-z=3$
$2x+y-2z=-3$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&3&-1\\2&1&-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&3&-1\\-3&1&-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&6&1\\3&3&-1\\2&-3&-2\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&2&6\\3&3&3\\2&1&-3\end{vmatrix}=0$$

$\Delta=0$ மற்றும் $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ மேலும் Δ வின் 2×2 சிற்றணிக்கோவைகளின் ஏதேனும் ஒன்று பூச்சியமற்றது. $\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$ ஆதலால், தொகுப்பு ஒருங்கமைவு உடையது மேலும் எண்ணிக்கையற்ற தீர்வுகள் பெற்றிருக்கும். $z=k,\ k\in R$ என்க

(1) மற்றும் (2)லிருந்து

$x+2y=6-k$

$3x+3y=3+k$

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=3-6=-3$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 6-k & 2 \\ 3+k & 3 \end{vmatrix}=12-5k$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 6-k \\ 3 & 3+k \end{vmatrix}=4k-15$

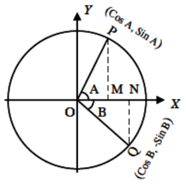
கிராமரின் விதிப்படி

$\therefore x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{12-5k}{-3}=\frac{5k-12}{3}$

$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{4k-15}{-3}=\frac{15-4k}{3}$

$\therefore$ தீர்வு கணம் $(x,y,z)=\left(\frac{5k-12}{3},\frac{15-4k}{3},k\right),k\in R$

57. $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ என நிறுவுக



O ஐ மையமாகக் கொண்ட அலகு வட்டத்தின் பரிதியில் P,Q என்ற இரு புள்ளிகளை எடுத்து கொள்க

OP மற்றும் OQ ஆனவை x-அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் முறையே A , B

$\therefore \angle POQ=\angle POx+\angle QOx=A+B$

P , Q ன் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(\cos A,\sin A)$ மற்றும் $(\cos B,-\sin B)$.

$\vec{i}$, $\vec{j}$ என்ற அலகு வெக்டர்களை x,y அச்சுத் திசைகளில் எடுத்துக் கொள்க.

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=\cos A\vec{i}+\sin A\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NQ}=\cos B\vec{i}-\sin B\vec{j}$$

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}=(\cos A\vec{i}+\sin A\vec{j}).(\cos B\vec{i}-\sin B\vec{j})$

$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$……………..(1)

வரையறையின்படி, $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}|.|\overrightarrow{OQ}|\cos(A+B)$

$=\cos(A+B)$………..(2)

(1) மற்றும் (2) லிருந்து

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

58. $x+2y+3z=6$ மற்றும் $x+y+z=3$ ஆகிய தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியாகவும், $(0,-1,1)$ என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் தளத்தின் கார்டீசியன் மற்றும் வெக்டர் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

கார்டீசியன் சமன்பாடு:

கொடுக்கப்பட்ட இரண்டு தளங்களின் வெட்டுக்கோடு வழியே செல்லும் தளத்தின் சமன்பாடு

$$(x+2y+3z-6)+\lambda(x+y+z-3)=0$$

$(0,-1,1)$வழி செல்வதால் $(0+2(-1)+3(1)-6)+\lambda(0-1+1-3)=0$

$-2+3-6+\lambda(-3)=0$

$$-3\lambda = 5$$
$$\lambda = -\frac{5}{3}$$

$(x+2y+3z-6)-\frac{5}{3}(x+y+z-3)=0$

$3x+6y+9z-18-5x-5y-5z+15=0$

$-2x+y+4z-3=0$

$2x-y-4z+3=0$

வெக்டர் சமன்பாடு:

$(\vec{r}.\overrightarrow{n_1}-\overrightarrow{q_1})+\lambda(\vec{r}.\overrightarrow{n_2}-\overrightarrow{q_2})=0$

$\vec{r}.\overrightarrow{n_1}-\overrightarrow{q_1}=\vec{r}.(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})-6$,

$\vec{r}.\overrightarrow{n_2}-\overrightarrow{q_2}=\vec{r}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})-3$

$\left(\vec{r}.(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})-6\right)+\lambda\left(\vec{r}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})-3\right)=0$

$\left(\vec{r}.(\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})-6\right)-\frac{5}{3}\left(\vec{r}.(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})-3\right)=0$

59. $(-\sqrt{3}-i)^{\frac{2}{3}}$ இன் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க

$-\sqrt{3}-i=r(\cos\theta+i\ \sin\theta)$

$r\cos\theta=-\sqrt{3}, r\sin\theta=-1$

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=-\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{-5\pi}{6}$

$-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)+i\ \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)$

$(-\sqrt{3}-i)^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)+i\ \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{5\pi}{6}\right)+i\ \sin\left(2k\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{2}{3}}\left(\cos(12k-5)\frac{\pi}{9}+i\ \sin(12k-5)\frac{\pi}{9}\right)$

$k=0,1,2$

எனவே

$2^{\frac{2}{3}}\text{cis}\left(\frac{-5\pi}{9}\right), 2^{\frac{2}{3}}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{9}\right), 2^{\frac{2}{3}}\text{cis}\left(\frac{19\pi}{9}\right)$ (அல்லது)$2^{\frac{2}{3}}\text{cis}\left(\frac{\pi}{9}\right)$ ஆகிய மதிப்புகளைப் பெறும்

60. $x^2-4y^2+6x+16y-11=0$ என்ற அதிபரவளையத்தின் மையத் தொலைத்தகவு, மையம், குவியங்கள், உச்சிகள் ஆகியவற்றைக் காண்க மேலும் அதன் வளைவரையை வரைக.

$x^2-4y^2+6x+16y-11=0$

$x^2+6x-4y^2+16y=11$

$(x^2+6x+3^2-3^2)-4(y^2-4y+2^2-2^2)=11$

$\{(x+3)^2-9\}-4\{(y-2)^2-4\}=11$

$(x+3)^2-4(y-2)^2=4$

WAY TO SUCCESS

$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{1} = 4$

$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{1} = 1$ இங்கு $X = x+3, Y = y-2$

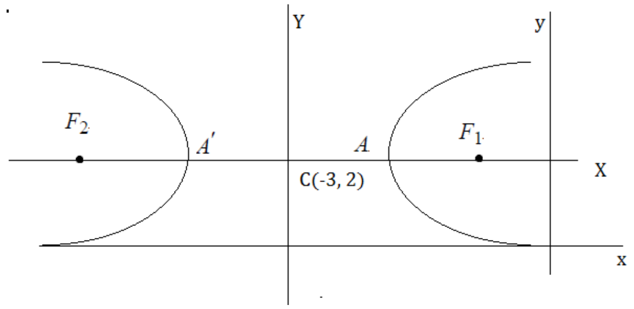
குறுக்கச்சு X-அச்சிற்கு இணையாக உள்ளது.

$a^2 = 4, b^2 = 1, a = 2, b = 1$

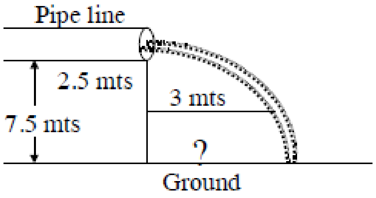
$e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

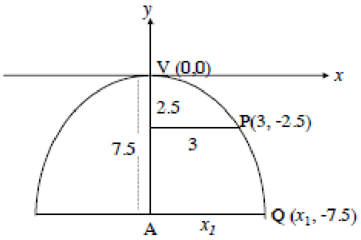
$ae = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

	X, Y ஐ பொறுத்து	x, y ஐ பொறுத்து $X = x+3, Y = y-2$
மையம்	$(0,0)$	$X = 0, Y = 0$ $x+3 = 0, y-2 = 0$ $C(-3,2)$
குவியங்கள்	$(\pm ae, 0)$ $(\pm\sqrt{5}, 0)$	$(\sqrt{5}, 0)$ $X = \sqrt{5}, Y = 0$ $x+3 = \sqrt{5}, y-2 = 0$ $x = -3+\sqrt{5}, y = 2$ $F_1(-3+\sqrt{5}, 2)$
		$(-\sqrt{5}, 0)$ $X = -\sqrt{5}, Y = 0$ $x+3 = -\sqrt{5}, y-2 = 0$ $x = -3-\sqrt{5}, y = 2$ $F_2(-3-\sqrt{5}, -2)$
முனைகள்	$(\pm a, 0)$ $(\pm 2, 0)$	$(2, 0)$ $X = 2, Y = 0$ $x+3 = 2, y-2 = 0$ $x = -1, y = 2$ $A(-1,2)$
		$(-2,0)$ $X = -2, Y = 0$ $x+3 = -2, y-2 = 0$ $x = -5, y = 2$ $A'(-5,2)$



61. தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5 மீ உயரத்தில் தரைக்கு இணையாக பொருத்தப்பட்ட ஒரு குழாயிலிருந்து வெளியேறும் நீர் தரையைத் தொடும் பாதை ஒரு பரவளையத்தை ஏற்படுத்துகிறது. மேலும் இந்த பரவளையப் பாதையின் முனை குழாயின் வாயில் அமைகிறது. குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5 மீ கீழே நீரின் பாய்வானது குழாயின் முனை வழியாகச் செல்லும் நிலை குத்துக்கோட்டிற்கு 3 மீட்டர் தூரத்தில் உள்ளது எனில் குத்துக் கோட்டிலிருந்து எவ்வளவு தூரத்திற்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழும் என்பதைக் காண்க.





கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் படி பரவளையம் கீழ்நோக்கி திறப்புடையதாக அமைகிறது

$$x^2 = -4ay$$

P என்ற புள்ளி பரவளையப் பாதையில் குழாய் மட்டத்திற்கு 2.5 மீ கீழேயும், குழாயின் முனை வழியே செல்லும் நிலை குத்துக் கோட்டிற்கு 3 மீ அப்பாலும் உள்ளது.

P என்பது$(3, -2.5)$

எனவே, $9 = -4a(-2.5)$

$$a = \frac{9}{10}$$

∴ பரவளையத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 = -4 \times \frac{9}{10} y$$

குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியிலிருந்து x_1 தூரத்துக்கு அப்பால் நீரானது தரையில் விழுவதாக கொள்க. ஆனால் குழாயானது தரைமட்டத்திலிருந்து 7.5மீ உயரத்தில் அமைந்துள்ளது.

$(x_1, -7.5)$ என்ற புள்ளி பரவளையத்திலுள்ளது.

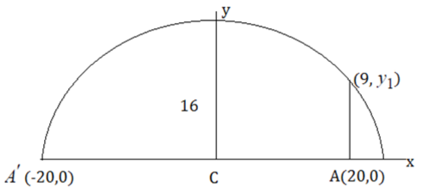
$$x_1{}^2 = -4 \times \frac{9}{10} \times (-7.5) = 27$$

$$x_1 = 3\sqrt{3}$$

∴ எனவே, தண்ணீர் தரையைத் தொடும் இடத்துக்கும் குழாயின் முனையிலிருந்து வரையப்படும் குத்துக்கோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $3\sqrt{3}$ மீ.

62. ஒரு பாலத்தின் வளைவானது அரை நீள்வட்டத்தின் வடிவில் உள்ளது. கிடைமட்டத்தில் அதன் அகலம் 40 அடியாகவும் மையத்திலிருந்து அதன் உயரம் 16 அடியாகவும் உள்ளது எனில் மையத்திலிருந்து வலது அல்லது இடப்புறத்தில் 9 அடி தூரத்தில் உள்ள தரைப்புள்ளியிலிருந்து பாலத்தின் உயரம் என்ன?

பாலத்தின் நடுப்புள்ளியை மையம் $C(0,0)$ஆக எடுத்துக் கொள்வோம். கிடைமட்டம் 40 அடி எனவே முனைகள் $A(20,0)$ மற்றும் $A'(-20,0)$



$2a = 40 \Rightarrow a = 20, b = 16$

சமன்பாடு

$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{256}=1$

மையத்திலிருந்து 9 அடி வலப்புறத்தில் உயரத்தை y_1 என்க. எனவே $(9, y_1)$ என்ற புள்ளி சமன்பாட்டில் உள்ளது.

$\frac{9^2}{400}+\frac{{y_1}^2}{256}=1$

$\frac{{y_1}^2}{256}=1-\frac{81}{400}=\frac{319}{400}$

${y_1}^2=256\left(\frac{319}{400}\right)$

$\Rightarrow y_1=\frac{16\sqrt{319}}{20}=\frac{4\sqrt{319}}{5}$

∴ மையத்திலிருந்து வலது அல்லது இடதுபுறத்தில் 9 அடி தூரத்தில் உள்ள தரைப்புள்ளியிலிருந்து பாலத்தின் உயரம் $\frac{4\sqrt{319}}{5}$அடி

63. $x^2+y^2=52$ என்ற வட்டத்திற்கு $2x+3y=6$ என்ற நேர்க்கோட்டிற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க

$x^2+y^2=52$ கொடுக்கப்பட்ட வளைவரை புள்ளி (x_1, y_1)ல் வரையப்படும் தொடுகோடு $2x+3y=6$ க்கு இணையாக உள்ளது.

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=-\frac{2}{3}$

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1,y_1)}=-\frac{x_1}{y_1}$

$-\frac{2}{3}=-\frac{x_1}{y_1}$

$x_1=\frac{2}{3}y_1$

(x_1, y_1) வளைவரை $x^2+y^2=52$ ல் அமைந்துள்ளது

$\therefore {x_1}^2+{y_1}^2=52$

$\left(\frac{2}{3}y_1\right)^2+{y_1}^2=52$

$13{y_1}^2=9\times 52$

${y_1}^2=36$

$y_1=\pm 6$

$y_1=6$ எனில் $x_1=4$ மற்றும்

$y_1=-6$ எனில் $x_1=-4$

$(4,6)$ மற்றும் $(-4,-6)$ தேவையான புள்ளிகளாகும்.

$(4,6)$ ல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$y-6=-\frac{2}{3}(x-4)$

$3y-18=-2x+8$

WAY TO SUCCESS

$2x + 3y - 26 = 0$

$(-4, -6)$ ல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$y + 6 = -\frac{2}{3}(x + 4)$

$3y + 18 = -2x - 8$

$2x + 3y + 26 = 0$

64. $w = u^2 e^v$ என்ற சார்பில் $u = \frac{x}{y}$ மற்றும் $v = y \log x$ எனுமாறு இருப்பின் $\frac{\partial w}{\partial x}$ மற்றும் $\frac{\partial w}{\partial y}$ ஐ சங்கிலி விதிகளைப் பயன்படுத்திக காண்க

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \text{ மற்றும் } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$\frac{\partial w}{\partial u} = 2ue^v \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = u^2 e^v$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{x} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \log x$

$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2ue^v}{y} + u^2 e^v \frac{y}{x} = x^y \frac{x}{y^2}(2 + y)$

$\frac{\partial w}{\partial y} = 2ue^v \left(-\frac{x}{y^2}\right) + u^2 e^v \log x$

$= \frac{x^2}{y^3} x^y [y \log x - 2]$

65. $y^2 = (x-5)^2(x-6)$ என்ற வளைவரை மற்றும் முறையே (i) $x = 5$ மற்றும் $x = 6$ (ii) $x = 6$ மற்றும் $x = 7$ ஆகிய கோடுகளுக்கு இடையேயான பரப்புகளைக் காண்க.

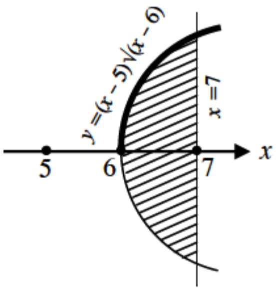
(i) $y^2 = (x-5)^2(x-6)$

$y = (x-5)\sqrt{x-6}$

வளைவரையானது x அச்சை $x = 5$ மற்றும் $x = 6$இல் வெட்டுகிறது. x ஆனது 5 க்கும் 6 க்கும் இடையில் எந்த ஒரு மதிப்பை பெற்றாலும் y^2 இன் மதிப்பு குறையாக உள்ளது.

$\therefore 5 < x < 6$ என்ற இடைவெளியில் வளைவரை அமையாது. $\therefore$ $x = 5$ மற்றும் $x = 6$ என்ற இடைவெளியில் பரப்பு 0 ஆகும்.

(ii) தேவையான பரப்பு $\int_a^b y\,dx$



வளைவரை x அச்சை பொறுத்து சமச்சீராக இருப்பதால்

பரப்பு $= 2\int_6^7 (x-5)\sqrt{x-6}\,dx$

$= 2\int_0^1 (t+1)\sqrt{t}\,dt$

$= 2\int_0^1 \left(t^{3/2} + t^{1/2}\right) dt$

$= 2\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$t = x - 6$

$dt = dx$

x	6	7
t	0	1

$= 2\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)$

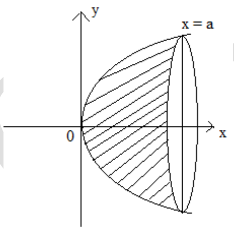
$= 2\left(\frac{6+10}{15}\right)$

$= \frac{32}{15}$ சதுர அலகுகள்

66. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் அதன் செவ்வகலம் வரையிலான பரப்பினை x -அச்சின் மீது சுழற்றும்போது கிடைக்கும் திடப் பொருளின் வளைபரப்பைக் காண்க.

$y^2 = 4ax, x = 0, x = a$ மற்றும் x-அச்சு இவற்றால் அடையப்படும் பரப்பை x-அச்சைப் பொறுத்து சுழற்றும் போது தேவையான திடப் பொருளின் வளைப்பரப்பு கிடைக்கும்

$S = 2\pi\int_0^a y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$



$y^2 = 4ax$

x ஐ பொறுத்து வகையிட

$2y\frac{dy}{dx} = 4a$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{2a}{y}\right)^2}$

$= \sqrt{1+\frac{4a^2}{y^2}}$

$= \sqrt{\frac{y^2+4a^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{4ax+4a^2}{y^2}}$

$= \sqrt{\frac{4a(x+a)}{y^2}}$

$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y.\frac{\sqrt{4a}.\sqrt{x+a}}{y} = 2\sqrt{a}.\sqrt{x+a}$

$S = 2\pi\int_0^a y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$= 2\pi\int_0^a 2\sqrt{a}.\sqrt{x+a}\,dx$

$= 4\pi\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x+a}\,dx$

$= 4\pi\sqrt{a}\int_0^a (x+a)^{1/2}\,dx$

$= 4\pi\sqrt{a}\left[\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$

$= \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left[((a+a)^{\frac{3}{2}} - (0+a)^{\frac{3}{2}})\right]$

$= \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left[((2a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})\right]$

$= \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left[((2a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})\right]$

$= \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left[2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right]$

$= \frac{8\pi a^2}{3}\left[2\sqrt{2}-1\right]$ சதுர அலகுகள்

WAY TO SUCCESS

67. தீர்க்க $(2\sqrt{xy}-x)dy+ydx=0$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$

$$y=vx$$

$L.H.S=v+x\frac{dv}{dx}$; $R.H.S=\frac{-v}{2\sqrt{v}-1}=\frac{v}{1-2\sqrt{v}}$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1-2\sqrt{v}}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1-2\sqrt{v}}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v-v+2v\sqrt{v}}{1-2\sqrt{v}}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2v\sqrt{v}}{1-2\sqrt{v}}$$

$$\left(\frac{1-2\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}\right)dv=2\frac{dx}{x}$$

$$\left(v^{-\frac{3}{2}}-2\frac{1}{v}\right)dv=2\frac{dx}{x}$$

தொகையிட $-2v^{-1/2}-2\log v=2\log x+2\log c$

$$-v^{-1/2}=\log(vxc)$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}}=\log(cy)$$

$$cy=e^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

$$ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}}=c$$

68. ரேடியம் சிதையும் மாறுவீதமானது, அதில் காணப்படும் அளவிற்கு விகிதமாக அமைந்துள்ளது. 50 வருடங்களில் ஆரம்ப அளவிலிருந்து 5 சதவீதம் சிதைந்திருக்கிறது எனில் 100 வருட முடிவில் மீதியிருக்கும் அளவு என்ன? [A_0 ஐ ஆரம்ப அளவு எனக் கொள்க]

t என்ற நேரத்தில் ரேடியத்தின் அளவு A என்க

$$A=A(t)$$

$$\frac{dA}{dt}\alpha A\Rightarrow\frac{dA}{dt}=kA\Rightarrow A=ce^{kt}$$

$t=0$ எனில் $A=A_0$

$\therefore\ A_0=ce^0=c$

$\therefore\ A=A_0e^{kt}$

50 வருடங்களில் ரேடியம் ஆரம்ப நிலையிலிருந்து 5 % சிதைவுறுகிறது.

$t=50$ எனில் , $A=.95\,A_0$

$\therefore\ 0.95\,A_0=A_0e^{50k}\Rightarrow e^{50k}=0.95$

மேலும் $t=100$ எனில்

$$A=A_0e^{100k}=A_0\left(e^{50k}\right)^2=A_0(.95)^2=0.9025A_0$$

100 வருட முடிவில் மீதியிருக்கும் ரேடியத்தின் அளவு $0.9025A_0$

WAY TO SUCCESS

69. ஒரு பேருந்து நிலையத்தில் ஒரு நிமிடத்திற்கு உள்ளே வரும் பேருந்துகளின் எண்ணிக்கை பாய்ஸான் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது எனில் $\lambda = 0.9$ எனக் கொண்டு (i) 5 நிமிட கால இடைவெளியில் சரியாக 9 பேருந்துகள் உள்ளே வர (ii) 8 நிமிட கால இடைவெளியில் 10க்கும் குறைவாக பேருந்துகள் உள்ளே வர (iii) 11 நிமிட கால இடைவெளியில் குறைந்தபட்சம் 14 பேருந்துகள் உள்ளே வர, நிகழ்தகவு காண்க

(i) ஒரு நிமிடத்தில் உள்ளே வரும் பேருந்துகளுக்கான $\lambda = 0.9$

$\therefore$ 5 நிமிடங்களில் உள்ளே வரும் பேருந்துகளுக்கான $\lambda = 0.9 \times 5 = 4.5$

$$P\{\text{சரியாக 9 பேருந்துகள் உள்ளே வர}\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^9}{9!}$$

$$P(X = 9) = \frac{e^{-4.5}(4.5)^9}{9!}$$

(ii) $P\left\{\begin{matrix}\text{8 நிமிடங்களில் 10 பேருந்துகளுக்கு} \\ \text{குறைவாக உள்ளே வர}\end{matrix}\right\} = P(X < 10)$

இங்கு $\lambda = 0.9 \times 8 = 7.2$

$$\text{தேவையான நிகழ்தகவு} = \sum_{x=0}^{9} \frac{e^{-7.2}(7.2)^x}{x!}$$

(iii) $P\left\{\begin{matrix}\text{11 நிமிடங்களில் குறைந்தபட்சம்} \\ \text{14 பேருந்துகள் உள்ளே வர}\end{matrix}\right\} = P(X \geq 14)$

$= 1 - P(X < 14)$

இங்கு $\lambda = 0.9 \times 11 = 9.9$

$$\text{தேவையான நிகழ்தகவு} = 1 - \sum_{x=0}^{13} \frac{e^{-9.9}(9.9)^x}{x!}$$

70(a). வழக்கமான பெருக்கலின் கீழ் 1இன் nஆம் படி மூலங்கள் முடிவான எபீலியன் குலத்தை அமைக்கும் எனக்காட்டுக

1 இன் nஆம் படி மூலங்களாவன $1, \omega, \omega^2 \dots \omega^{n-1}$

$G = \{1, \omega, \omega^2 \dots \omega^{n-1}\}$ என்க.

இங்கு $\omega = \text{cis}\,\frac{2\pi}{n}$

(i) அடைப்பு விதி:

$\omega^l, \omega^m \in G, 0 \leq l, m \leq (n-1)$

$\omega^l \omega^m = \omega^{l+m} \in G$ என நிரூபிக்க வேண்டும்

நிலை (i)

$l + m < n$ என்க

$l + m < n$ எனில் $\omega^{l+m} \in G$

நிலை(ii)

$l + m \geq n$ என்க

வகுத்தல் கோட்பாட்டின்படி,

$l + m = (q.n) + r,\ 0 \leq r < n,$ மிகை முழு எண்.

$\omega^{l+m} = \omega^{qn+r} = (\omega^n)^q . \omega^r$

$= (1)^q . \omega^r = \omega^r \in G \quad \because 0 \leq r < n$

அடைப்பு விதி உண்மையாகும்.

(ii) சேர்ப்பு விதி: கலப்பெண்களின் கணத்தில் பெருக்கலானது எப்பொழுதும் சேர்ப்பு விதியை உண்மையாக்கும்.

$\omega^l.(\omega^p.\omega^m) = \omega^l.\omega^{(p+m)} = \omega^{l+(p+m)}$

$= \omega^{(l+p)+m} = (\omega^l.\omega^p).\omega^m \ \ \forall\, \omega^l, \omega^p, \omega^m \in G$

(iii) சமனி விதி:

சமனி உறுப்பு $1 \in G$ மற்றும் அது

$$1.\omega^l = \omega^l.1 = \omega^l \quad \forall \omega^l \in G$$

என்பதை பூர்த்தி செய்கிறது.

(iv) எதிர்மறை விதி:

$\omega^l \in G$ க்கு $\omega^{n-l} \in G$ மற்றும்

$$\omega^l.\omega^{n-l} = \omega^{n-l}.\omega^l = \omega^n = 1$$

இவ்வாறாக எதிர்மறை விதி உண்மையாகிறது.

$\therefore$ $(G,.)$ ஒரு குலமாகும்.

(v) பரிமாற்று விதி:

$$\omega^l.\omega^m = \omega^{l+m} = \omega^{m+l} = \omega^m.\omega^l \ \ \forall \omega^l, \omega^m \in G$$

$\therefore$ $(G,.)$ ஒரு எபீலியன் குலமாகும். G இல் n உறுப்புகள் மட்டுமே உள்ளதால் $(G,.)$ஆனது n வரிசை கொண்ட முடிவான எபீலியன் குலமாகும்.

70 (b). $(0,\pi)$இடைவெளியில் $f(\theta) = \sin 2\theta$ என்ற சார்பு எந்த இடைவெளிகளில் குழிவு அடைகின்றன என்பதையும் மற்றும் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகளையும் காண்க.

$f(\theta) = \sin 2\theta$; $(0,\pi)$யில்

$f'(\theta) = 2\cos 2\theta$

$f''(\theta) = -4\sin 2\theta$

$f''(\theta) = 0 \Rightarrow 2\theta = 0, \pi, 2\pi$

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

ஆனால் $0, \pi \notin (0,\pi)$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$

இங்கு $\frac{\pi}{2}, (0,\pi)$ யை $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ மற்றும் $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ என பிரிக்கின்றது

$\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ வில் $f''(\theta) < 0$ மற்றும்

$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ யில் $f''(\theta) > 0$ ஆகும்.

எனவே $f(\theta)$ என்பது $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$வில் கீழ்நோக்கிக் குழிவாகவும், $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ல் மேல் நோக்கி குழிவாகவும் உள்ளது. $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$அதாவது $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ஒரு வளைவு மாற்றுப் புள்ளியாகும்.

தயாரிப்பு

க. தினேஷ் M.Sc., M.Phil., P.G.D.C.A., (Ph.D.,)

வெற்றிக்கு வழி குழு